F 1812

BULETINUL
POLITEHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 2

(Fasc. 1. Janvier à Juin 1947)

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1947

3/1.
1/47-1.

Le présent *Bulletin* se compose des articles originaux de Mathématique, Physique, Chimie, Sciences naturelles et Technique pas encore publiés *in extenso* dans d'autres revues scientifiques.

Le Comité de Rédaction se propose de faire publier chaque année deux fascicules du *Bulletin* d'environ 160 pages chacun.

Les auteurs assument toute responsabilité en ce que regarde les articles publiés.

Les manuscrits, d'un style concis et correct, doivent être rédigés en français et dactylographiés. Le *Bulletin* publie aussi les articles des auteurs de l'étranger rédigés en anglais, en français, en espagnol, en italien et en allemand. L'ordre de leur publication correspond en principe à la classification décimale internationale. Selon les possibilités, chaque auteur reçoit gratuitement au moins 50 tirages à part. Les prix des clichés sont à la charge des auteurs.

Dès que les conditions techniques le permettront, les manuscrits pourront être rédigés dans n'importe quelle langue d'usage international courant.

COMITÉ DE RÉDACTION

Prof. Dr. Ing. Gh. Alexa
Prof. Dr. Al. Cişman
Prof. Dr. D. I. Mangeron
Prof. Ing. Dr. César Parteni
Prof. Dr. Şt. Popesco

AVIS

Toutes les communications relatives à la rédaction et à l'administration du *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy* (envoi des manuscrits, abonnements, échanges, services des numéros, etc.) doivent être adressées à M. le Prof. D. I. Mangeron, Directeur du

Séminaire Mathématique de
L'Ecole Polytechnique de Jassy,
Jassy – Iaşi
(Roumanie)

Prix de l'abonnement pour un an (2 fascicules) à partir du 1-er janvier 1947:

Etranger. Tarif international: 20 frs. suisses; le fascicule: 10 frs. suisses.
Abonamentul anual: 1.000.000 lei, o fascicolă 750.000 lei.
Abonamentul pentru autorităţi: 2.000.000 lei.
Abonamentele se achită pînă la 15 August 1947.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9, – IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

BULLETIN
DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE JASSY

Tome 2

Fasc. 1 (Janvier à Juin 1947)
et
Fasc. 2 (Juillet à Décembre 1947)

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1946

Copyright by Politehnica „Gh. Asachi" din Iaşi
Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30.5.1946.
Nr. aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1.6.1946.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9. - IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

1989

F

1812

Le travail typographique concernant ce „Bulletin" a été executé par les soins de
MM. SAMUEL SAFIR, chef de travaux,
ADRIEN DOGARU, assistant,
GEORGES RĂCHIŢEANU, assitant,
IOSIF BERVIN, mecanicien en chef.

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Fotyonalfeltár 4185

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

INDEX DU TOME II
DU
BULLETIN DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE JASSY
- 1947 -

I. Index des Auteurs.

		Pages
V. Ababii & (Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)		
I. N. Ciochină	(Voir : I. N. Ciochină)	498
Gérard d'Albon (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Détermination de la position d'une source sonore mobile ou fixe à l'aide de l'oscillographe	471
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	592
"	"	593
Gh. Alexa & (Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)		
Cristofor Simionescu	Contribution à la connaissance de l'huile de chènevis	486
Herman T. R. Aude (Dr., Prof à l'Univ. Colgate Hamilton, N. Y.)	The pattern for the distribution of the number c when the diophantine equation $ax+by=c$ has exactly n solutions	10
C. P. Bogdan (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	Sur les surfaces lieu de coniques	121
P. Babalean & (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)		
M. Celan	(Voir : M. Celan)	537
Const. Borș (Prof. au Lycée, P. Neamț)	Sur les courbes concurrentes dans la géométrie centro-affine	71
G. D. Borș & (Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Bucarest)		
N. I. Ioanid	(Voir : N. I. Ioanid)	490
Mihail St. Botez (Dr., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	232
N. Calinicenco (Dr., Maître de Conf. à l'Univ., Jassy)	Mesures magnétiques à Jassy de 1941 à 1947. II. Inclinaison magnétique	447
C. Calistru (Ing., Chef. de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur un nouveau procédé de préparation de quelques bains galvaniques à l'aide du courant alternatif	495

		Pages
Cleopatra Catrinici (Ing., Ministère de l'Agric., Bucarest)	Notes sur la Biologie et les moyens de destruction du Tanymecus dilaticollis Gyll („Gârgârița porumbului").	527
M. Celan & (Dr., Chef de travaux à l'Ecole Polyt., Iassy)		
P. Babalean	Sur l'examen microscopique et histochimique des tissus affectés par la gelée	537
Gh. Ciobanu (Assistant à l'Ec. Polyt., Iassy)	Sur une certaine surface réglée liée à une surface périsphère	117
I. N. Ciochină & (Dr. Ing., Uzines Métallurgiques, Reșița)		
V. Ababii	Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, III.	498
I. N. Ciochină & *Radu Vasiliu*	Idem, IV	509
I. N. Ciochină	Idem, V.	514
Alex. Cișman & (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Iassy) *E. Luca*	Lampe à vapeur de mercure fonctionnant comme oscillateur à relaxations	481
Alex. Cișman & *E. Luca*	Lampe à vapeur de mercure comme amplificateur	562
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Iassy)	Notes d'Analyse, I. Sur la définition du logarithme dans le domaine réel	81
"	Etudes sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes. I. L'indice de non-associativité	347
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	233
"	"	235
"	"	571
"	"	572
"	"	574
Vasile Corlățeanu & (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Iassy) *César Parteni Antoni*	(Voir : César Parteni Antoni)	156
V. Corlățeanu & *César Parteni Antoni &* *V. Hanganu*	(Voir : César Parteni Antoni et V. Hanganu)	166
V. Corlățeanu	Contributions théorique et expérimentale à l'étude d'un moteur synchrone par rapport à la variation de la tension d'alimentation	375
G. Costeanu (Dr., Prof. à l'Univ. de Iassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	244
Ion Creangă (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Iassy)	Sur une famille de transformations entre deux surfaces réglées	35
"	Sur une correspondance entre deux surfaces réglées	341
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	236

		Pages
R. Deaux (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Mons)	Sur trois homographies du plan de Gauss	106
C. V. Gheorghiu (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	La phototropie au point de vue de la mésomérie	141
I. S. Gheorghiu (Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Bucarest)	Le quadripôle en T-circuit équivalent du moteur monophasé à répulsion à décalage de balais	435
Virgiliu G. Gheorghiu (Ing. Dr., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur une nouvelle méthode de mesure des coefficients de frottements	450
H. Hadwiger (Dr., Prof. à l'Univ. de Bern)	Multikongruenz ebener Mengen und Pythagoreischer Lehrsatz	98
Adolf Haimovici (Dr., Chef de Travaux à l'Univ. de Jassy)	Sur une certaine déformation des congruences de courbure nulle	22
Mendel Haimovici (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	Sur les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de III-e espèce nulle	46
V. Hanganu & (Chef de travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)		
César Parteni Antoni & *V. Corlăţeanu*	(Voir : César Parteni Antoni & V. Corlăţeanu)	166
Gh. Iliescu & (Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)		
E. Luca	(Voir : E. Luca)	203
† M. Konteschweller	Nécrologue	253
N. I. Ioanid &' (Dr., Prof. à l'Univ., Bucarest)		
G. D. Borş	Nouvelles réactions microchimiques pour l'identification du cardiazol	490
S. J. Jasper (Dr., Prof. à l'Univ. Kentucky)	Helices in a flat space of four dimensions	262
Victor Lalan (Dr., Prof. à l'Ens. Sup. libre à Paris)	Étude des coefficients du binôme, modulo nombre premier p	255
E. Luca & (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)		
Şt. Petrescu	(Voir : Şt. Petrescu)	193
E. Luca &' *Gh Iliescu*	Contributions à l'étude des chutes internes de tension aux transformateurs dans le cas des radiographies instantanées à forte intensité	203
E. Luca & *Alex. Cişman*	(Voir : Alex. Cişman)	481
E. Luca & *Alex. Cişman*		562

		Pages
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Recherches sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur	89
"	Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des spectres concernant certains problèmes aux limites	372
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	239
"	"	241
"	"	243
"	"	575
"	"	578
"	"	580
"	"	582
"	"	585
"	"	587
"	"	589
"	"	594
"	"	596
"	"	597
F. Marcus (Dr. Ing., Services techniques de la ville de Botoşani)	Sur quelques surfaces en relation avec les congruences de Waelsh	267
Octav Munteanu (Chef de Travaux a l'Ec. Polyt., Jassy)	Application du problème de prolongement d'un système associatif dénombrable	19
N. Negoescu (Assistant a l'Univ. de Jassy)	Sur une équation de récurrence triangulaire	93
S. Oprişor (Ing., Maître de Conf. a l'Ec. Polyt. Jassy)	Influence du poids sur la traction par adhérence pour les véhicules routiers et ferroviaires	211
César Parteni Antoni & (Ing. Dr., Prof. a l'Ec. Polyt., Jassy) *V. Corlăteanu*	La longueur de l'entrefer dans un moteur d'induction polyphassé	156
César Parteni Antoni & *V. Corlăteanu* & *V. Hanganu*	Perturbations produites par le fonctionnement d'un groupe moteur asynchrone triphasé – compresseur à piston sur l'intensité du courant absorbé au réseau	166
St. Petrescu (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Cluj)	Sur les éléments singuliers et sur la géométrisation des systèmes de deux équations de Pfaff à huit variables	290
V. Petrescu & (Dr., Prof. a l'Ec. Polyt., Jassy) *E. Luca*	Considérations sur le meilleur rendement d'utilisation des écrans fluorescents dans les rayons X	193
Ilie Popa (Dr., Prof. a l'Univ. de Jassy)	Sur un théorème de géométrie élémentaire	79
St. Popescu (Dr., Prof. a l'Ec. Polyt., Jassy)	Anomalies chez les plantes cultivées, II.	174

		Pages
N. Popinceanu (Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur le régime intermittent des moteurs électriques	182
Ștefan Procopiu (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	Mesures magnétiques à Jassy de 1941 à 1947. I. Déclinaison magnétique et composante horizontale	443
»	Valeurs des éléments magnétiques et des variations séculaires à Jassy, pendant 17 ans, de 1931 à 1947. Variation du magnétisme terrestre en Roumanie de 1772 à 1947	457
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	591
Fritz Reutter (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Karlsruhe)	Über ganze rationale Funktionen einer dualkomplexen Veränderlichen	273
Ștefania Ruscior (Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur un certaine correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces cerclées	26
Lucius N. Săveanu (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Calcul des déformations élastiques des pièces pendant les cylindrages aux tours automatiques en fonction des paramètres technologiques de l'usinage	218
Cristofor Simionescu & (Ing., Chef. de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)		
Gh. Alexa	(Voir : Gh. Alexa)	486
Nicolae Tănăsescu (Dr. Ing., Direction des Forêts C. Lung Mold.)	Les sables mouvants de Vâlcov-Jibrieni	544
Em. Topa (Dr., Prof. à l'Univ. de Cluj)	Contribution à la chorologie de Loranthus Europaeus	180
H. Vasiliu (Dr. Ing., Prof. Hon. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur la cause de la présence du Sodium dans les eaux des Océans d'approximativement trente fois plus que le Potassium	228
R. Vasiliu & (Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)		
I. N. Ciochină	(Voir : I. N. Ciochină)	509
T. Vescan (Dr., Prof. à l'Univ „Bolyai", Cluj)	O explicație simplă a efectului Faraday	478
A. Wintner (Dr., Prof. à l'Univ. „John Hopkins, Baltimore, Ma.)	Arithmetical monotone sequences	3

II. Index des matières

A

Astronomie	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	587

B.

Biographies	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	594–7
† *M. Konteschweller*	Nécrologue	253

Biologie animale

Pages

Cleopatra Catrinici
(Ing., Ministère de l'Agric., Bucarest) Notes sur la Biologie et les moyens de destruction du Tanymecus dilaticollis Gyll („Gârgârița porumbului"). 527

Biologie végétale

M. Celan &
(Dr., Chef de travaux à l'Ecole Polyt., Jassy)
P. Babalean &
(Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) Sur l'examen microscopique et histochimique des tissus affectés par la gelée 537

St. Popescu
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) Anomalies chez les plantes cultivées, II. 174

Botanique

Em. Topa
(Dr., Prof., à l'Univ. de Cluj) Contribution à la chorologie de Loranthus europaeus 180

Bulletin Bibliographique (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 232-247 et 571-599

» (Voir : Livres reçus par la rédaction) 600-603

C.

Chimie

C. V. Gheorghiu
(Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) La phototropie au point de vue de la mésomérie 141

N. I. Ioanid &
(Dr., Prof à l'Univ., Bucarest)
G. D. Bors
(Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Bucarest) Nouvelles réactions microchimiques pour l'identification du cardiazol 490

Chimie Physique

C. Calistru
(Ing., Chef. de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur un nouveau procédé de préparation de quelques bains galvaniques à l'aide du courant alternatif 495

I. N. Ciochină &
(Dr. Ing., Uzines Métallurgiques, Reșița)
V. Ababii
(Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy) Nouvelles théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, III. 498

I. N. Ciochină &
Radu Vasiliu Idem, IV 509

I. N. Ciochină Idem, V. 514

H. Vasiliu
(Dr. Ing., Prof. Hon. à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur la cause de la présence du Sodium dans les eaux des Océans d'approximativement trente fois plus que le Potassium 228

Chimie Technologique Pages

Gh. Alexa &
(Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)
Cristofor Simionescu
(Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy) Contribution à la connaissance de l'huile de chènevis 486

Colorants organiques (Voir: Comptes rendus des livres reçus) 244

Comptes rendus des livres reçus 232-244 & 571-599

Congrès scientifiques (Voir: Comptes rendus des livres reçus)

D.

Déformations élastiques

Lucius N. Săveanu
(Dr. Ing., Maître de Conf. a l'Ec. Polyt., Jassy) Calcul des déformations élastiques des pièces pendant les cylindrages aux tours automatiques en fonction des paramètres technologiques de l'usinage 218

H.

Histoire des Sciences (Voir: Comptes rendus des livres reçus)

L.

Livres reçus par la rédaction (Voir: Bulletin Bibliographique)

M.

Machines électriques

César Parteni Antoni &
(Ing. Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)
Vasile Corlăteanu
La longueur de l'entrefer dans un moteur d'induction polyphasé 156

César Parteni Antoni &
V. Corlăteanu &
V. Hanganu
(Chef de travaux à l'Ec. Polyt., Jassy) Perturbations produites par le fonctionnement d'un groupe moteur asynchrone triphasé - compresseur à piston sur l'intensité du courant absorbé au réseau 166

V. Corlăteanu
(Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) Contributions théorique et expérimentale à l'étude d'un moteur synchrone par rapport à la variation de la tension d'alimentation 375

I. S. Gheorghiu
(Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Bucarest) Le quadripôle en T-circuit équivalent du moteur monophasé à répulsion à décalage de balais 435

N. Popinceanu
(Ing., Maître de Conf. à l'Ec Polyt. Jassy) Sur le régime intermittent des moteurs électriques 182

Machines hydrauliques (Voir: Comptes rendus des livres reçus) 592

Machines termiques (Voir: Comptes rendus des livres reçus) 593

Magnétisme

		Pages
N. Calinicenco (Dr., Maître de Conf. à l'Univ., Jassy)	Mesures magnétiques à Jassy de 1941 à 1947. II. Inclinaison magnétique	447
Ștefan Procopiu (Dr., prof. à l'Univ. de Jassy)	Mesures magnétiques à Jassy de 1941 à 1947. I. Déclinaison magnétique et composante horizontale	443
»	Valeurs des éléments magnétiques et des variations séculaires à Jassy, pendant 17 ans, de 1931 à 1947. Variation du magnétisme terrestre en Roumanie de 1772 à 1647	457

Mathématiques

Herman T. R. Aude (Dr., Prof. à l'Univ. Colgate, Hamilton N. Y.)	The pattern for the distribution of the number c when the diophantine equation $ax+by=c$ has exactly n solutions	10
C. P. Bogdan (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	Sur les surfaces lieu de coniques	121
Const. Borș (Prof. au Lycée, P. Neamț)	Sur les courbes concurrentes dans la géométrie centro-affine	71
Gh. Ciobanu (Assistant à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur une certaine surface réglée liée à une surface périsphère	117
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Notes d'Analyse, I. Sur la définition du logarithme dans le domaine réel	81
»	Etudes sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes. I. L'indice de non-associativité	347
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	233
»	»	235
»	»	571
»	»	572
»	»	574
Ion Creangă (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur une famille de transformations entre deux surfaces réglées	35
»	Sur une correspondance entre deux surfaces réglées	341
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	236
R. Deaux (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Mons)	Sur trois homographies du plan de Gauss	106
H. Hadwiger (Dr., Prof. à l'Univ. de Bern)	Multikongruenz ebener Mengen und Pythagoreischer Lehrsatz	98
Adolf Haimovici (Dr., Chef de Travaux à l'Univ. de Jassy)	Sur une certaine déformation des congruences de courbure nulle	22
Mendel Haimovici (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	Sur les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de III-e espèce nulle	49
S. J. Jasper (Dr., Prof. à l'Univ. Kentucky)	Helices in a flat space of four dimensions	262

		Pages
Victor Lalan (Dr., Prof. à l'Ens. Sup. libre à Paris)	Etude des coefficients du binôme, modulo nombre premier p	255
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Recherches sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur	89
"	Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des spectres concernant certains problèmes aux limites	372
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	239 ; 597
F. Marcus (Dr. Ing., Services techniques de la ville de Botoşani)	Sur quelques surfaces en relation avec les congruences de Waelsh	267
Octav Munteanu (Chef de Travaux a l'Ec. Polyt., Jassy)	Application du problème de prolongement d'un système associatif dénombrable	19
N. Negoescu (Assistant a l'Univ. de Jassy)	Sur une équation de récurrence triangulaire	93
Şt. Petrescu (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Cluj)	Sur les éléments singuliers et sur la géométrisation des systèmes de deux équations de Pfaff à huit variables	290
Ilie Popa Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	Sur un théorème de géométrie élémentaire	79
Fritz Reutter (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Karlsruhe)	Über ganze rationale Funktionen einer dualkomplexen Veränderlichen	273
Stefania Ruscior (Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur un certaine correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces cerclées	26
A. Wintner (Dr., Prof. à l'Univ. „John Hopkins, Baltimore, Ma.)	Arithmeticaly monotone sequences	3

Mathématique appliquées (Voir : Comptes rendus des livres reçus)

Mécanique (Voir : Comptes rendus des livres reçus)

P.

Phénomènes oscillatoires

Alex. Cişman &
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)
E. Luca
(Dr Ing. Maître de Conf. a l'Ec. Polyt. Jassy) Lampe à vapeur de mercure fonctionnant comme oscillateur à relaxations 481

Alex. Cişman &
E. Luca Lampe à vapeur de mercure comme amplificateur 562

Phototropie

C. V. Gheorghiu
(Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) La phototropie au point de vue de la mésomérie 141

		Pages
Physique		
Gérard d'Albon (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Détermination de la position d'une source sonore mobile ou fixe à l'aide de l'oscillographe	471
N. Calinicenco	(Voir : Magnétisme)	
Al. Cisman & *E. Luca*	(Voir : Phénomènes oscillatoires)	
"	"	
Virgiliu G. Gheorghiu (Ing. Dr., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur une nouvelle méthode de mesure des coefficients de frottements	450
Ştefan Procopiu	Rapport entre la chaleur moléculaire de fusion et la température absolue de fusion des métaux monoatomiques et des composés chimiques	
"	(Voir : Magnétisme)	
"	"	
T. Vescan (Dr., Prof. à l'Univ „Bolyai", Cluj)	O explicaţie simplă a efectului Faraday	478
Portraits	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	244
R.		
Radiotechnique	M. Konteschweller (Nécrologue)	
Rayons X		
E. Luca & *Gh. Iliescu*	Contributions à l'étude des chutes internes de tension aux transformateurs dans le cas des radiographies instantanées à forte intensité	203
V. Petrescu & (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)		
E. Luca	Considérations sur le meilleur rendement d'utilisation des écrans fluorescents dans les rayons X	193
S.		
Sylviculture		
Nicolae Tănăsescu (Dr. Ing., Direction des Forêts C. Lung Mold.)	Les sables mouvants de Vâlcov-Jibrieni	544
T.		
Termodynamique		
St. Procopiu	(Voir : Physique)	
Technique	(Voir : Machines électriques, termiques, hidrauliques, traction mécanique)	
Traction mécanique		
S. Oprişor (Ing., Maître de Conf. a l'Ec. Polyt. Jassy)	Influence du poids sur la traction par adhérence pour les véhicules routiers et ferroviaires	211
V.		
Ventillation industrielle	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	

BULETINUL
POLITEHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

MŰSZAKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET
MŰEGYETEM

Tome 2

(Fasc. 1. Janvier à Juin 1947)

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1947

Copyright by Politehnica „G. Asachi" din Iaşi.

Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30. 5. 1946.

Nr. Aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1. 6. 1946.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9. – IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

Buletinul Politehnicii „Gh. Asachi" din Iaşi
Bulletin de l'École Polytechnique de Jassy
Tome II. Fasc. 1. (Janvier à Juin 1947)

512

ARITHMETICALLY MONOTONE SEQUENCES

by

A. WINTNER

The D-matrices of Toeplitz have originally been introduced [1]) in order to solve the analytical problem of regularity and boundedness in the case of an ordinary Dirichlet series. These matrices, which are defined by (3) below, have proved to be indispensable in certain problems of a more arithmetical nature. [2]) In what follows, the „Möbius" case of these matrices will be used in order to suggest an arithmetical counterpart of Hausdorff's theory of completely monotone sequences. [3])

1. Let Γ denote the infinite matrix in which the element at the intersection of the n-th row and the m-th column is

$$\Gamma: \qquad (-1)^m C_m^n; \qquad n,m = 0,1,2, \ldots, \tag{1}$$

where the C's denote the binomial coefficients. In particular, the n-th diagonal element of Γ is 1 or -1 according as n is even (> 0) or odd; all elements of Γ above the principal diagonal vanisch; the sum of all elements contained in the n-th row is 0 unless $n = 0$, in which exceptional case it reduces to $C_0^0 = 1$. It is easily verified that

$$\Gamma^{-1} = \Gamma. \tag{2}$$

Instead of n, $m = 0, 1, 2, \ldots$, let n, $m = 1, 2, \ldots$, and, if α_1, $\alpha_2, \ldots$ is any sequence of numbers, denote by $[\alpha]$ the infinite matrix in which the element at the intersection of the n-th row and the m-th column is

$$[\alpha]: \alpha_{n/m}; \qquad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

where α_k is defined to be 0 if the quotient $k = n/m$ is not an inte-

1. O. Toeplitz, *Zur Theorie der Dirichletschen Reihen*, American Journal of Mathematics, vol. 60 (1938), pp. 880–888.

2. A. Wintner, *On Töpler's wave analysis*, ibid., vol. 69 (1947).

3. F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentfolgen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 9 (1921), pp. 74–109 (I) and pp. 280–299 (II).

ger. In other words, $[\alpha]$ is the infinite matrix in which the n-th column

$$(3\text{ bis}) \qquad (0)_{n-1},\ \alpha_1,\ (0)_{n-1},\ \alpha_2,\ (0)_{n-1},\ \ldots,$$

where $(0)_{n-1}$ denotes a block of $n-1$ zeros, with the understanding that the first column, where $n-1=0$, is $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. In particular, every diagonal element of $[\alpha]$ is α_1; all elements above the diagonal vanish; the sum of all elements contained in the n-th row is

$$\sum_{d \mid n} \alpha_d ,$$

where the summation index runs through all divisors, d, of n (including $d=1$ and $d=n$).

If $\alpha_n = \mu(n)$, where $\mu(n)$ is Möbius' factor, the sum in the last formula line is 0 unless $n=1$, in which exceptional case it reduces to $\mu(1)=1$. This is not the only analogy between this matrix, which will be denoted by

$$(4) \qquad M=[\mu],$$

and the matrix (1). In fact, the matrix (4), defined by (3) or (3 bis) when $\alpha_k = \mu(k)$, proves to represent the „multiplicative" counterpart of an „additive" enumeration which corresponds to (1). A deviation from the analogy takes place in the reciprocal matrices, since, as easily verified, the involutory character, (2), of the matrix Γ must be replaced by

$$(5) \qquad M^{-1}=[1].$$

Here $[1]$ denotes the matrix which results by placing $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=1$ in (3), (3 bis).

If $[\alpha]$, $[\beta]$ are the matrices belonging to two arbitrary sequences, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, and $\beta_1, \beta_2, \ldots$, and if

$$(6) \qquad \{\lambda\} = \| \lambda_n e_{nm} \| ; \qquad n, m = 1, 2, \ldots$$

denotes, with reference to an arbitrary sequence $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, the diagonal matrix the n-th diagonal element of which is λ_n (so that, by (6), the matrix $\{1\}$ is $\| e_{nm} \|$, the unit matrix), then

$$(7) \qquad \Big([\beta] \{\lambda\} [\alpha] x \Big)_n = \sum_{j \mid n} \beta_{n/j} \lambda_j \sum_{i \mid j} \alpha_{j/i} x_i ,$$

(i is the index of the interior summation, in which j, the index of the exterior summation, is any fixed divisor of n). It is understood that $(\Phi x)_n$ on the left of (7) denotes the n-th component of the vector, Φx, into which a vector, $x=(x_1, x_2, \ldots)$, is transformed by the ma-

trix Φ, the latter being the matrix product $\Phi = [\beta]\left\{\lambda\right\}[\alpha]$. The truth of (7) follows by calculating this matrix product.

Consider, in particular, the linear transformation,

$$y = M^{-1}\left\{\lambda\right\} M x, \tag{8}$$

of $x = (x_1, x_2, \ldots)$, into $y = (y_1, y_2, \ldots)$, where $\left\{\lambda\right\}$ is an arbitrarily chosen diagonal matrix, (6). According to (4) and (5), the matrix of the transformation (8) is $[1]\left\{\lambda\right\}[\mu]$. It follows therefore from (7) that the explicit form of the linear substitution (8) is

$$y_n = \sum_{j|n} \lambda_j \sum_{i|j} \mu(j/i)\, x_i . \tag{9}$$

If the coefficients of $x_1, \ldots, x_n$ are collected, (9) appears in the form

$$y_n = \sum_{m=1}^{n} x_m \nabla_m^n \lambda, \tag{10}$$

if the ∇'s are defined by

$$\nabla_m^n \lambda = \sum_{m|d|n} \mu(d/m)\, \lambda_d . \tag{11}$$

It is understood that d, the summation index in (11), runs through those divisors of n which are multiples of m (with the inclusion of $d = m$, if $m|n$), and that $\nabla_m^n \lambda$ denotes 0 when the sum (11) is vacuous:

$$\nabla_m^n \lambda = 0 \text{ unless } n = km, \text{ where } k = 1,2, \ldots . \tag{12}$$

The n-th diagonal element of the matrix of the linear substitution (10) is $\nabla_n^n \lambda$, which, according to (11), has the value

$$\nabla_n^n \lambda = \lambda_n , \tag{13}$$

since $\mu(n/n) = \mu(1) = 1$. (A corollary of (10) and the representation of (8) is that

$$M^{-1}\left\{\lambda\right\} M \text{ has an inverse if and only if every } \lambda_n \neq 0, \tag{14}$$

but this condition will not required.)

2. With reference to a sequence

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots , \tag{15 bis}$$

let the differences $\Delta^i \lambda_j$, where $i = 0, 1, \ldots$ and $j = 0, 1, \ldots$, be defined by

$$\Delta^0 \lambda_j = \lambda_j , \qquad \Delta^1 \lambda_j = \lambda_j - \lambda_{j+1} , \qquad \Delta^i = \Delta^1 \Delta^{i-1} .$$

Then, in terms of the binomial coefficients C_m^n,

$$\Delta^i \lambda_j = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r C_r^i \lambda_{j+r} . \tag{11 bis}$$

The sequence (15 bis) is called *completely monotone* (S c h u r) if

$$\Delta^i \lambda_j \geqq 0 \tag{16 bis}$$

holds for $i, j = 0, 1, 2, \ldots$.

In view of the last two formula lines, the definition (12) and the parallelism between the two matrices (1), (4) suggest the introduction of the following definition : A sequence

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \tag{15}$$

is *completely monotone in the arithmetical sense* if each of the corresponding sums (11) is non-negative, that is, if

$$\nabla_m^n \lambda \geqq 0 \tag{16}$$

holds for all pairs of positive integers n, m. For the sake of shortness, the italicized property will be referred to as the *D-monotony* of (15), the *D* indicating the connection of the sums (11) with the D i r i c h l e t rule of multiplication (in contrast, (11 bis) corresponds, via (1), to the C a u c h y rule of multiplication).

According to (16) and (13),

$$\lambda_n \geqq 0 \tag{17}$$

must hold for every n. On the other hand,

$$\lambda_n \leqq \lambda_1 . \tag{18}$$

In fact, (13) shows that (18) is contained in the more general assertion

$$\nabla_m^n \lambda \leqq \lambda_1 . \tag{19}$$

But (16) implies that (19) is certainly true if

$$\sum_{m=1}^{n} \nabla_m^n \lambda = \lambda_1 \tag{20}$$

is true. And (20) is an identity (in n), which holds even if (16) is not assumed.

In fact, (12) and (11) show that the sum on the left of (20) is identical with

$$\sum_{m|n} \Delta_m^n \lambda = \sum_{m|n} \sum_{m|d|n} \lambda_d \mu (d/m),$$

where d is the index of the interior summation. This double sum can be rearranged into

$$\sum_{d|n} \lambda_d \sum_{m|d} \mu(d/m),$$

where m is the index of the interior summation. Accordingly, the assertion of (20) is equivalent to the statement that the sum multiplying λ_d in the last formula line is 1 or 0 according as $d=1$ or $d>1$; in other words (if d and m are interchanged), that

$$\sum_{d|m} \mu(d)$$

is 1 or 0 according as $m=1$ or $m>1$. But this alternative is (or is equivalent to) the definition of the function $\mu(k)$; so that the proof is complete.

In view of (12), the inequalities (16) are always satisfied if n is not of the form km. Hence the condition of D-monotony can be reduced to

$$\nabla_m^{km} \lambda \geqq 0, \tag{21}$$

where $m = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ and, according to (11),

$$\nabla_m^{km} \lambda = \sum_{d|k} \mu(d) \lambda_{md} . \tag{22}$$

3. It will now be shown that the sequence

$$1^{-x}, 2^{-x}, \ldots, n^{-x}, \ldots \tag{23}$$

is D-monotone for every non-negative x.

First, the sum (22) becomes

$$\nabla_m^{km} \lambda = m^{-x} \mu_x(k) \text{ if } \lambda_n = n^{-x}, \tag{24}$$

where

$$\mu_x(k) = \sum_{d|k} d^{-x} \mu(d). \tag{25}$$

Hence, the reduced criterion, (21), shows that the assertion to be proved is equivalent to the statement that the sums (25) are non-negative whenever x is. For reasons of continuity, somewhat more will be proved if it is shown that the sums (25) are positive whenever x is.

A function, $f(k)$, of k $(= 1,2, \ldots)$ is called multiplicative if $f(k_1 k_2)$ is $f(k_1)\, f(k_2)$ whenever k_1 and k_2 are relatively prime. It is easily verified that, if $f(k)$ and $g(k)$ are multiplicative, then

$$h(k) = \sum_{d|k} f(d)\, g(k/d)$$

is. Since $f(k) = \mu(k)$ and $g(k) = k^{-x}$, where x is arbitrary, are multiplicative, it follows that

$$\sum_{d|k} \mu(d)\, (k/d)^x$$

is a multiplicative function of k. But the latter function is identical with $k^x \mu_x(k)$, by (25) Since the product of two multiplicative functions is multiplicative, and since k^{-x} is a multiplicative function of k, it follows that the same is true of $\mu_x(k)$.

It is clear that, if $f(k)$ is multiplicative, then the inequality $f(k) > 0$ holds for $k = 1,2,\ldots$ if it holds for $k = p^i$, where p is an arbitrary prime and $i = 1,2,\ldots$. Hence, in order to prove that $\mu_x(k) > 0$ if $x > 0$, it is sufficient to show that $\mu_x(p^i) > 0$ if $x > 0$. However, from (25),

$$\mu_x(p^i) = \sum_{j=0}^{i} p^{-jx} \mu(p^j)$$

or, since $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ and $\mu(p^2) = \mu(p^3) = \ldots = 0$,

$$\mu_x(p^i) = 1 - p^{-x}. \tag{26}$$

Since (26) implies that $\mu_x(p^i) > 0$ if $x > 0$, the proof is complete.

4. It is clear from the definition, (16), that, if $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda''_1, \lambda''_2, \ldots$ are two D-monotone sequences and c', c'' two non-negative constants, then the sequence $c'\lambda'_1 + c''\lambda''_1$, $c'\lambda'_2 + c''\lambda''_2, \ldots$ is D-monotone. It is also clear that, if $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon), \ldots$ is a D-monotone sequence for every fixed (small) positive ε and if the limit $\lambda_n(+0)$ exists for every n, then the sequence $\lambda_1(+0)$, $\lambda_2(+0), \ldots$ is D-monotone. Since the sequence (23) is D-monotone for every $x > 0$, this pair of rules leads to the following method of construction:

If $F(x)$ is any non-decreasing bounded function on the half-line $x \geq 0$, then the sequence $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ defined by

$$\lambda_n = \int_0^\infty n^{-x}\, dF(x), \qquad (n = 1,2,\ldots;\ dF \geq 0) \tag{27}$$

is D-monotone.

In other words, the solubility of the momentum problem (27) is sufficient for the D-monotony of a given sequence $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. It remains undecided whether or not this sufficient condition is necessary as well.

The momentum problem (27) can be written in the form

$$\lambda_n = \int_0^1 x^{\log n}\, dF^*(x), \qquad (n = 1,2,\ldots;\ dF^* \geq 0), \tag{28}$$

where the function

$$F^*(x) = -F(-\log x)$$

is non-decreasing and bounded (for $0<x\leq 1$) if and only if the same is true of the function $F(x)$ (for $0\leq x<\infty$). Hence, the question as to the necessity for the existence of a solution of the momentum problem (27) could be decided by comparing (28) and the defining set of inequalities, (16), with the set of inequalities which, according to Hausdorff (loc. cit.[3]), part II, Satz IV on p. 287), characterize the solubility of an arbitrary momentum problem

$$\lambda_n = \int_0^1 x^{t_n-1}\, dF^*(x), \qquad (n=1,2,\ldots;\ dF^*\geq 0)$$

(here $t_0, t_1, \ldots$ is any given sequence of exponents satisfying

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n<\ldots \qquad \text{and} \sum_{n=1}^{\infty} 1/t_n=\infty;$$

so that $t_{n-1}=\log n$ in the present case). But such a comparison seems to involve cumbersome rearrangements. Correspondingly, the direct *Strahl* construction, applied by Hausdorff (loc. cit.[3]), p. 109) in the case $t_{n-1}=n$, would be preferable, if the answer is affirmative.

The John Hopkins University
Baltimore 18, Maryland. U. S. A.

(Reçu le 10 février 1947).

THE PATTERN FOR THE DISTRIBUTION OF THE NUMBERS c WHEN THE DIOPHANTINE EQUATION $ax+by=c$ HAS EXACTLY n SOLUTIONS

by

HERMAN T. R. AUDE

The aim of this paper is to consider the Diophantine equation $ax+by=c$, not for the purpose of finding its solutions, but to study the relationships that exist between n, the number of its solutions, and the three positive integers, a, b, and c. The integers a and b will be relatively prime and in any one problem or discussion the pair, a, b, will be considered fixed, while the number c will be considered as a parameter with the positive integers for its range. The solutions will be the n sets of integral values of x and y, greater than zero, which satisfy the equation. The interdependence of the numbers n and c leads to two questions or types of problems: one, to find n, the number of the solutions, when c has a given value; the other, to find all the values of c which correspond to an assumed value of n. These two problems are related so that the answer to the one points the way to the solution of the other.

With the numbers a and b fixed and $a<b$, which does not destroy generality, it will be shown that it is only when $a=1$ that all of the values of c, which correspond to a given value of n, are found as one group of consecutive integers; and that in all other cases the values of c which correspond to a given value of n are distributed over the range of integers in a typical manner or pattern. Such pattern will be different for each number pair, a, b. But when a pattern for a fixed number pair, a, b, has been determined for one value of n, say $n=0$, it will be found that it is repeated for other values of n.

The Relationships between the numbers c and n

A particular exemple will show that the relationship between

the numbers c and n may appear quite irregular. Consider the following table which holds for the numbers c and n of the equation $4x + 7y = c$:

c	39	43	44	56
n	2	2	1	1

An increase in the parameter, c, for the values selected, does not give an increase in n, the number of solutions. Evidently the range of c should be extented. Even then a first glance may not give any promise of law and order. But the equation itself is the reason, or at least it will supply it. Therefore, to find relationships between the parameter, c, and n, the number of solutions, turn to the general equation:

$$ax + by = c \tag{1}$$

where – for convenience in the notations – an *element* c_n will represent any value of c for which the equation (1) has exactly n solutions. All the elements c_n, wherever located on the range of integers will constitute the *class* C_n. *An interval* on the range of integers will be taken to mean two or more consecutive integers.

To determine the location on the scale of integers of the elements of the class C_n, it is necessary to fix the place of the two extreme elements: c_n (least) and c_n (greatest). But for the determination of the location of the elements c_n in respect to elements which may precede and follow, it is also necessary to consider the values of the elements c_{n-1} (greatest) and c_{n+1} (least).

It is known *) that the values of the least and the greatest elements of the class c_n are:

$$c_n\,(\text{least}) = (n-1)\,ab + a + b\,; \qquad c_n\,(\text{greatest}) = (n+1)\,ab. \tag{2}$$

It then follows that

$$c_{n-1}\,(\text{greatest}) = nab, \quad \text{and} \quad c_{n+1}\,(\text{least}) = nab + a + b. \tag{3}$$

By taking $a < b$, there are only two allowable arrangements in order of size for the four elements in (2) and (3), according as $a = 1$, or $a \neq 1$.

I. When $a = 1$, the arrangement is given by the relations

$$c_{n-1}\,(\text{greatest}) < c_n\,(\text{least}) < c_n\,(\text{greatest}) < c_{n+1}\,(\text{least})\,;$$

or

$$nab < (n-1)\,ab + a + b < (n+1)\,ab < nab + a + b. \tag{4}$$

*) Dickson's *History of the theory of Numbers*. Vol. II p. 65.

Since $a = 1$, the four numbers in (4) become

$$nb < (n-1)b + 1 + b < (n+1)b < nb + 1 + b$$

and it is seen that the first two numbers, as well as the last two numbers, are consecutive integers for every allowable value of n. This means that the class C_n is represented by one and only one interval of exactly b elements. It is preceded by b elements which constitute the class C_{n-1} and it is followed by b elements which make up the class C_{n+1}. On the range of integers there is neither overlapping nor gaps between successive classes. Each class which consists of b elements is located by the relations given in (2).

Example. For the equation $x + 7y = c$ the following table expresses the relation between the parameter, c, and n, the number of solutions:

n	0	1	.....	k
c	$1, 2, \ldots, 7$	$8, 9, \ldots, 14$	.....	$7k+1, 7k+2, \ldots\ldots, 7k+7$

The equation $x + 7y = 31$ has exactly $n = 4$ solutions. But to the value $n = 4$ there correspond the seven numbers of the class C_4: *29, 30, 31 32, 33, 34, 35.*

II. When $a \neq 1$, the order of the four selected elements is

$$c_n \text{ (least)} < c_{n-1} \text{ (greatest)} < c_{n+1} \text{ (least)} < c_n \text{ (greatest)}$$

or

$$(5) \qquad (n-1)ab + a + b < nab < nab + a + b < (n+1)ab.$$

In this case the situation is not so simple. It will be seen that the numbers given in (5) define on the range of integers three intervals, which will be denoted $I_{n-1,n}$, I_n, $I_{n,n+1}$. The interval $I_{n-1,n}$ extends from $c = (n-1)ab + a + b$ *to* $c = nab$. It contains $(a-1)(b-1)$ elements which belong to the two classes C_{n-1} and C_n. The interval I_n extends from $c = nab + 1$ *to* $c = nab + a + b - 1$ and contains $a + b - 1$ elements which all belong to the class C_n. The interval $I_{n,n+1}$ contains also $(a-1)(b-1)$ elements, but these belong to the two classes C_n and C_{n+1}. It is thus seen that the elements of the class C_n are to be found on every one of the three intervals.

At this point it should be noted that the relationships between the parameter, c, and n, the number of solutions, have been established. They are given by the two statements (4) and (5). However, the answers to the two problems, to find n for a given value of c, or to find all the values of c which correspond to a given value of n are available only for the case when $a = 1$. The interpretation of the relations given in (5) shows that progress has been made for the case when $a \neq 1$.

The step forward consists in having fixed the intervals on the range of integers within which all the elements of the class C_n are located. A particular example will again be introduced to point the way to determine the pattern or manner in which the elements c_n are distributed.

The Pattern for the Distribution of the Elements c_n

Assume that it is desired to locate the intervals on which can be found the values of c_n for the equation $4x + 7y = c$. The relations in (5) show that c_4 (least) $= 95$, c_3 (greatest) $= 112$, c_5 (least) $= 123$ and c_4 (greatest) $= 140$. Therefore the elements which make up the class c_4 are located on three intervals as follows: Among the 18 elements from $c = 95$ to $c = 112$, all of the 10 elements from $c = 113$, to $c = 122$, and among the 18 elements from $c = 123$ to $c = 140$. This gives the bounds for the elements of the class C_4. It should be noted that on the first and the third interval the elements of the class C_4 are intermingled, respectively, with elements of the classes C_3 and C_5.

Before turning to the matter of selecting the elements of the class C_4 on these two intervals, it is well to show by a general proof that the order of arrangement or pattern which holds for the elements c_3 and c_4 on the first interval also applies to the third interval, but for the elements c_4 and c_5.

The general proof for this repetition of pattern will follow from the fact that *an increase or a decrease in the value of the parameter, c, by the number, ab, will increase or decrease respectively the number of solutions by unity.* This means that if c' is an element of the class C_n, then $c' + ab$ is an element of the class C_{n+1}; also $c' - ab$ is an element of the class C_{n-1} if $n > 0$.

For the proof assume that the equation $ax + by = c'$ has the n solutions $(x_1, y_1), \ldots, (x_k - b; y_k + a), (x_k, y_k), (x_k + b, y_k - a), \ldots (x_n, y_n)$, where $x_1 \leq b$ and $y_n \leq a$. It is then seen that the following $n + 1$ values of x and y: $(x_1, y_1 + a), (x_1 + b, y_1), \ldots (x_k, y_k + a), (x_k + b, y_k), \ldots (x_n, y_n + a), (x_n + b, y_n)$ will satisfy the equation $ax + by = c' + ab$ and will constitute all of its allowable solutions.

That this theorem is also true when $n = 0$ can be seen by turning to the graphic representation of the equation $(ax + by = c', c' \neq 0)$. On the part of the line in the first quadrant there will not be any integral point (a point with integral coordinates), since it is assumed that there is no acceptable solution. But on the part of the line in the second quadrant, there are an infinite number of integral points. Let the integral point nearest to or on the y-axis have the coordinates

(x_2, y_2); then $-b < x_2 \leq 0$, and $0 < y_2 \leq a$. But the points $(x_2 + b, y_2)$, $(x_2 + 2b, y_2 - a)$, ... are on the graph of the equation $ax + by = c' + ab$. Of these, however, it is only the first point $(x_2 + b, y_2)$ which lies in the first quadrant. Whence the equation $ax + by = c' + ab$ has only one solution.

It can also be shown that if the equation $ax + by = c'$ has exactly n solutions, $n = 1, 2, \ldots$; then the equation $ax + by = c' - ab$ will have exactly $n - 1$ solutions.

It follows, that to classify the values of the parameter, c, of equation (1), it is sufficient to classify only the elements from $c = 1$ to $c = ab$. These elements will belong in a certain pattern to the two classes C_0 and C_1. The consecutive integers $nab + 1$, $nab + 2$, ..., $(n + 1)\,ab$ will follow that same pattern, but will belong to the classes C_n and C_{n+1}.

Example. The equation $4x + 7y = c$ has $n = 0$ or no solution when $c = 24$. Consequently, when c has the values : $c = 52 = 24 + 28$, $c = 80 = 2 \cdot 28 + 24$, $c = 322 = 11 \cdot 28 + 24$, the corresponding values for n, the number of solutions, are $n = 1$, $n = 2$, $n = 11$.

Turning to the general case, it is seen that the range of the parameter, c, from $c = 1$ to $c = ab$ can be divided into the two intervals : I_0, from $c = 1$ to $c = a + b - 1$; where every element of c is of the class C; and the interval $I_{0,1}$, from $c = a + b$ to $c = ab$. This second interval consists of $(a - 1)(b - 1)$ elements which belong to the classes C_0 and C_1, according to a pattern typical for each number pair a, b. It follows, that the interval I_n, from $c = nab + 1$ to $c = nab + a + b - 1$ contains $a + b - 1$ elements where every element is of the class C_n; furthermore, that the pattern of the elements c_n and c_{n+1} on the interval $I_{n,n+1}$ from $c = nab + a + b$ to $c = (n + 1)\,ab$ is the same as that for the elements c_0 and c_1 on the interval $I_{n,n+1}$.

Returning to the particular exemple $4x + 7y = c$, it is seen that when each of the elements $c = 1, 2, \ldots, 28$, in consecutive order, has been placed into its proper class C_0 or C_1, then the elements $c = 85, 86, \ldots, 112$ ~ in order ~ will follow that same pattern, but for the classes C_3 and C_4. Since the elements of the first interval I_0 from $c = 1$ to $c = 10$ belong to the class C_0, there remain the 18 elements of the interval $I_{0,1}$ from $c = 11$ to $c = 28$ to be classified into the classes C_0 and C_1, or to be assigned the class-numbers $n = 0$ or $n = 1$. Assume this done. It will give the table

(6)

c	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	1	0	0	0	1	0	0	1	1
c	28	27	26	25	24	23	22	21	20
n	0	1	1	1	0	1	1	0	0

The second half of the table has been recorded in reverse order to show that the distribution of the elements of this latter group follows the pattern of the first, but with an interchange of the two class-numbers.

Symmetry of the Pattern

It will be proved that *if the first half of the elements on the interval $I_{0,1}$ from $c = a + b$ to $c = ab$ are distributed, according to a certain pattern, into the classes C_0 and C_1, then the second half of the elements will follow that same pattern in reverse, but into the two classes C_1 and C_0.*

This interval $I_{0,1}$ contains $(a - 1)(b - 1)$ elements, an even number, which will be ordered in pairs: the first element with the last, the second with the element next to the last, and so on; so that any element $c = i$ will be paired with its *co-element* $c = j$, where $i + j = ab + a + b$. With this notation established, it is sufficient to show that if the element $c = c'$, where $a + b \leq c' \leq ab$, is of the class C_0, or the class C_1, then its co-element $c = ab + a + b - c'$ is, respectively, of the class C_1, or the class C_0. In other words, if the equation $ax + by = c'$ has no or one solution, then to correspond the equation $ax + by = ab + a + b - c'$ will have one or no solution.

Assume that the equation

$$ax + by = c' \tag{7}$$

has the one solution (x_2, y_2), then these values are limited so that $1 \leq x_1 < b$, and $1 \leq y_1 < a$. The co-element $c = ab + a + b - c'$ belongs to the equation

$$ax + by = ab + a + b - c'. \tag{8}$$

Addition of the equations (7) and (8) after the substitution $x = x_1$ and $y = y_1$ in (7) gives the condition

$$a(x + x_1) + b(y + y_1) = ab + a + b. \tag{9}$$

The right member of (9) by (2) is seen to be c_2 (least) $= ab + a + b$. It follows that the equation (9) has the two solutions $(1, a + 1)$ and $(b + 1, 1)$. Using the first solution gives

$$x + x_1 = 1 \text{ and } y + y_1 = a + 1,$$

whence

$$x \leqq 0 \quad \text{and} \quad 1 < y \leqq a.$$

But this set (x, y) is not an acceptable solution. Wherefore equation (8) has no solution. The use of the second solution of (9) would lead to the same conclusion.

Next, assume that equation (7) has no solution. On the graph of this equation there is no integral point in the first quadrant. Moving to the left along the line let the first integral point be the point $Q(x_2, x_2)$ where $-b + 1 < x_2 \leqq 0$ and $1 < y_2 < a$. These coordinates satisfy equation (7), whence

$$ax_2 + by_2 = c_1.$$

The co-element of c' belongs to the equation

$$ax + by = ab + a + b - c'.$$

As before, addition gives the equation

$$a(x + x_2) + b(y + y_2) = ab + a + b.$$

One of its two solutions is

$$x + x_2 = 1 \quad \text{and} \quad y + y_2 = 1 + a.$$

It follows that the values of x and y are positive integers, wherefore the element $ab + a + b - c'$ is of the class C_1.

The same result could be obtained by moving to the right along the line represented by (7) and then use in a similar manner the first integral point on the x-axis or in the fourth quadrant.

The preparation for the classification of the elements on the interval from $c = a + b$ to $c = ab$ is complete. The distribution of the elements of the first half of the interval in the classes C_0 and C_1 make half the pattern. The elements of the second half will follow this half-pattern in reverse with the proper changes in class.

Since every element, c, of the class C_1 on the interval from $c = a + b$ to $c = ab$ can be written in the form.

$$c_1 = ha + kb, \quad h = 1, 2 \ldots, b - 1; \quad h = 1, 2, \ldots, a - 1$$

the remaining elements are those which cannot be thus recorded and they are of the class C_0. In this manner cover only the first $\frac{1}{2}(a - 1)(b - 1)$ elements beginning with $c = a + b$ and then apply the pattern thus obtained in reverse to the elements of the second half.

Example. For variety, use this time the equation $5x + 7y = c$

and classiiy the elements from $c = 1$ to $c = 35$. The 11 elements of the first interval from $c = 1$ to $c = 11$ are of the class C_0. On the second interval from $c = 12$ to $c = 35$ consider only the first half of the elements: $c = 12, 13 \ldots, 25$. Of these twelve elements the four elements $c = 1.5 + 1.7 = 12$, $c = 2.5 + 1.7 = 17$, $c = 1.5 + 2.7 = 19$, and $c = 3.5 + 1.7 = 22$ are of the class C_1. The remaining eight elements are of the class C_0. This gives the table and pattern for the first half of the interval

c	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0

.

This pattern reversed applied to the second half with the proper changes in n gives the table

c	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
n	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

.

For the equation $5x + 7y = c$ the classification of the elements $c = 1, 2, \ldots, 35$ is complete, and hence the classification for all the elements c.

To find n, the number of solutions for the two equations $5x + 7y = 99$, $5x + 7y = 100$, becomes simple. The two values of c are written $99 = 2.35 + 29$, $100 = 2.35 + 30$. The values of n are read from the table for $c' = 29, 30$. These are $n = 1, 0$, and the equations $5x + 7y = 99$ will have $n = 3$, while the second equation will have $n = 2$ solutions.

The second problem, to find all the values of c which correspond to a given value of n, can also be solved. Returning to the first special example $4x + 7y = c$, let us find every element c that belongs to the class C_1. These elements will be found on three intervals, and the problem is divided accordingly.

1. Since the elements of the interval from $c = 1$ to $c = 10$ are of the class C_0, it follows that the 10 elements from $c = 29$ to $c = 38$ are of the class C_1.

2. The table in (6) shows that for the second interval from $c = 11$ to $c = 28$ the following elements are of the class C_1: $11, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 26, 27$.

3. Since the interval from $c = 11$ to $c = 28$ contains 9 elements of the class C_0, as shown in the table (6), it follows that on the interval from $c = 1.28 + 11 = 39$ to $c = 2.28 = 56$ there exist 9 elements of the class C_1. These are obtained from those elements in table (6) for which $n = 0$ by adding the number 28 to each. They are: $40, 41, 42, 44, 45, 48, 49, 52, 56$.

MUDAPEST KÖNYVTÁR

These three groups of numbers give all of the 28 elements which belong to the class C_1.

In view of the preceding it is seen that the elements of the class C_4, the 28 values of c for which $n = 4$ are obtained from the 28 elements of the class C_1 by adding the number $3 . 28 = 84$ to each.

It will be easily seen that for the general equation $ax + by = c$ every class C_n, except $n = 0$, consists of $a . b$ elements, while the class C_0 will consist of $\frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1$ elements.

For the Diophantine equation $ax + by = c$ the relations that have been developed and the examples that have been used show how, for a fixed pair of numbers a, b, to solve the two problems: First for a given value of the parameter, c, to find n, the number of solutions. Second, for a given value of n to find all the corresponding values of c.

The solutions of both problems are made to depend upon the classification of the first $a.b$ elements $1, 2, \ldots, ab$. Of these the first group $1, 2, \ldots a + b - 1$ will belong to the class C_0. The remaining $(a-1)(b-1)$ elements $a + b, a + b + 1, \ldots, ab$ should be tabulated as to $n = 0$ or $n = 1$, whereupon solutions of the two problems can be obtained as already shown.

Finally, it may be of interest to note that the problem to find the solutions of the equation $4x + 7y = 475$ where $475 = 16.28 + 27$ can be made to depend upon the one solution of the equation $4x + 7y = 27$ which is $(5, 1)$. Since $c = 475 = 6.28 + 27$, the equation $4x + 7y = 475$ will have $n = 17$ solutions. Using the least allowable value for x which is $x = 5$, the corresponding value of y is found to be $y = 65$. Therefore, the first solution of $4x + 7y = 475$ is $(5, 65)$. The remaining 16 solutions are: $(12, 61), (19, 57), \ldots . (117, 1)$.

It is a simple matter to generalize this method. For it is sufficient to note that if the equation $ax + by = c$ has more than one solution it can be written in the form

$$ax + by = c = k\,ab + c'\,;\ k = 1, 2, \ldots$$

where c' is selected so that the equation $ax + by = c'$ has exactly one solution, which denote (x_1, y_1) where $1 \leq x_1 \leq b$. By substitution in the given equation it is seen that when $x = x_1$, then $y = y_1 + k.a$. Whereupon the $k + 1$ solutions arranged in order are:

$$(x_1, y_1 + ka), (x_1 + b, y_1 + (k-1)\,a), \ldots, (x_1 + kb, y_1).$$

Colgate University,
Hamilton, N. Y.,
U. S. A.

(Reçu le 25 Février 1947).

APPLICATIONS DU PROBLÈME DE PROLONGEMENT D'UN SYSTÈME ASSOCIATIF DÉNOMBRABLE

par

OCTAV MUNTEANU

Dans un article publié dans ce même recueil *), M. Al. Climescu a étudié le prolongement d'un système associatif donné A dans un système $B > A$**).

A propos de ce problème, nous nous proposons de déterminer le prolongement du système associatif de la sommation et de la multiplication des nombres entiers naturels pour tous les points du domaine $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, respectivement $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$.

I. Nous allons déterminer d'abord une fonction $f(x,y)$ ayant les propriétés suivantes :

1^0. $f(m,n) = m + n$ (où m,n sont des entiers $\geqslant 0$),

2^0. $f(x,y) = p$ (p entier ; pour tout couple $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, au moins une des variables x,y n'étant pas entière),

3^0. $f[x,f(y,z)] = f[f(x,y), z]$.

Soit $x \neq$ entier et m entier.

L'équation de l'associativité nous donne ;

$$f[m,f(x,m)] = f[f(m,x), m].$$

En imposant à cette équation la condition 1^0, on obtient :

$$m + f(x,m) = f(m,x) + m$$

ou $f(x,m) = f(m,x)$ (condition de commutativité pour les éléments m,x).

Supposons maintenant m,n entiers, alors

$$f[m,f(x,n)] = f[f(m,x), n].$$

En appliquant de nouveau la cond. 1^0, l'équation prend la forme $m + f(x,n) = f(m,x) + n$.

---

*) Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy, Tome I, fasc. 2, pp. 211-224.

**) Nous renvoyons à la page 220 du travail cité ci-dessus pour le sens exact qu'on attribue à la notion de prolongement d'un système associatif.

ou $f(m,x)+n=m+f(x,n)=m+f(n,x)$; pour $n=0$, on en déduit

$f(m,x)=f(x,m)=m+f(0,x)$.

Soient $f(0,x)=m$, $f(0,y)=n$. Alors

$f[0,f(x,y)]=f[f(0,x),y]=f(m,y)$.

Mais $f[0,f(x,y)]=0+f(x,y)=f(x,y)$ (cond. 1^0 et 2^0).

Donc $f(x,y)=f(m,y)=m+f(0,y)=m+n$.

La fonction $f(m,y)$ est maintenant complètement déterminée.

On voit facilement qu'elle satisfait à la cond. 2^0.

Supposons $f(0,x)=m$, $f(0,y)=n$, $f(0,z)=p$.

On a $f[x,f(y,z)]=f(x,n+p)=f(n+p,x)=n+p+f(0,x)=$
$=m+n+p$.

De même $f[f(x,y),z]=f(m+n,z)=m+n+f(0,z)=m+n+p$.

Donc $f[x,f(y,z)]=f[f(x,y),x]$.

L'associativité est complètement démontrée et de plus toute solution est aussi commutative.

II. La seconde question que nous nous sommes proposé est de déterminer une fonction $f(x,y)$ correspondant aux propriétés :

1^0. $f(m,n)=mn$, (m,n entiers ≥ 1),

2^0. $f(x,y)=p$, (p entier ; au moins une des deux variables n'étant pas entière),

3^0. $f[x,f(y,z)]=f[f(x,y),z]$.

Comme dans le premier exemple en écrivant l'équation de l'associativité, on obtient

$f[m,f(x,m)]=f[f(m,x),m]$.

En appliquant la cond. 1^0, on a

$mf(x,m)=f(m,x)\,m$

Donc $f(x,m)=f(m,x)$.

Pour m,n entiers, la condition d'associativité donne

$f[m,f(x,n)]=f[f(m,x),n]$

ou $mf(x,n)=f(m,x)\,n$, c'est à dire pour $n=1$

$f(m,x)=f(x,m)=m\,f(1,x)$.

On peut choisir arbitrairement les valeurs $f(1,x)$ pour x non entier.

Soit $f(1,x)=m$, $f(1,y)=n$,

alors $f[1,f(x,y)]=f[f(1,x),y]=1.\,f(x,y)=f(m,y)=m.\,f(1,y)=mn$
(cond. 1^0 et 2^0).

La fonction $f(x,y)$ est complètement définie et en notant

$f(1,x)=m$, $f(1,y)=n$, $f(1,z)=p$,

on doit avoir

$f[x,f(y,z)] = f(x,np) = f(np,x) = npf(1,x) = mnp.$
de même $f[f(x,y),z] = f(mn,z) = mn.\ f(1,z) = mnp.$
Donc $f[x,f(y,z)] = f[f(x,y),z]$.

L'associativité est verifiée pour des valeurs x,y,z arbitraires et de plus, toute solution est commutative.

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

Reçu le 31 Décembre 1946).

SUR UNE CERTAINE DÉFORMATION DES CONGRUENCES DE COURBURE NULLE

par

ADOLF HAIMOVICI

Dans une Note récente [1]), nous avons étudié quelques cas particuliers du problème de la déformation des congruences de sphères. Comme suite de cette Note et d'une suggestion de M. I. Popa qui nous a conduit à définir comme sphères parallèles, deux sphères se coupant sur une sphère fixe, nous nous sommes proposé d'étudier un autre cas particulier, en liaison étroite avec la correspondance par plans tangents parallèles : c'est le problème de la déformation des congruences de sphères qui conserve l'angle de deux sphères infiniment voisines, deux sphères correspondantes se coupant sur une sphère fixe de l'espace.

Soit $\mathbf{A}$ la sphère génératrice de la congruence (Γ), sujette à la déformation de l'espèce considérée plus haut. Soient u_1 et u_2 les paramètres dont dépend cette sphère ; soit encore :

$$d\mathbf{A}^2 = d\varphi^2 = E(du^1)^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G(du_2)^2,$$

l'élément d'angle de (Γ), E,F,G, étant des fonctions de u_1 et u_2.

Soit maintenant $\mathbf{Q}$ une sphère constante normalisée de manière que :

$$\mathbf{Q}^2 = 1$$

et désignons par Ω le cosinus de l'angle fait par $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \Omega;$$

désignons enfin par $\mathbf{A}$ la sphère correspondante à $\mathbf{A}$ dans la congruence déformée (Γ) : l'expression de $\mathbf{A}$ sera :

$$\bar{\mathbf{A}} = \lambda\,\mathbf{A} + \mu\,\mathbf{Q},$$

λ et μ étant des fonctions de u_1, u_2. qui, pour que l'on ait :

$$\bar{\mathbf{A}}^2 = 1,$$

doivent satisfaire à la relation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\,\Omega = 1.$$

L'élément d'angle de $(\bar{\Gamma})$ sera donné par:

$$d\mathbf{A}^2 = d\bar{\varphi}^2 = d\lambda^2 + \lambda^2\, d\mathbf{A}^2 + d\mu^2 + 2d(\lambda\Omega)\, d\mu$$

ou, en éliminant Ω:

$$d\bar{\varphi}^2 = d\lambda^2 - \frac{2\lambda d\lambda d\mu}{\mu} - (1-\lambda^2)\frac{d\mu^2}{\mu^2} + \lambda^2\, d\mathbf{A}^2;$$

de l'égalité des deux formes différentielles $d\varphi^2$ et $d\bar{\varphi}^2$, on déduit:

$$d\bar{\varphi}^2 = d\varphi^2 = \frac{d\lambda^2}{1-\lambda^2} - 2\frac{\lambda d\lambda d\mu}{\mu(1-\lambda^2)} - \frac{d\mu^2}{\mu^2}.$$

En posant maintenant:

$$\lambda = \sin\alpha, \quad \mu = e^{\beta}\ ^{2})$$

cette dernière prend la forme:

$$d\varphi^2 = d\alpha^2 - 2\operatorname{tang}\alpha\, d\alpha\, d\beta - d\beta^2. \tag{1}$$

On reconnait sans peine que la courbure de cette forme est nulle.
Il résulte donc le théorème suivant:

Les seules congruences admettant une déformation de l'espèce considerée sont de courbure nulle[3]).

Pour connaître la généralité de la congruence déformée, rapportons d'abord la congruence initiale à un réseau tel que l'élément d'angle prenne la forme:

$$d\varphi^2 = du_1^2 - du_2^2 \tag{2}$$

et cherchons les fonctions α et β qui transforment (1) en (2).
A ce but, il faut résoudre le système suivant:

$$\left(\frac{\delta\alpha}{\delta u_1}\right)^2 - 2\operatorname{tang}\alpha\frac{\delta\alpha}{\delta u_1}\frac{\delta\beta}{\delta u_1} - \left(\frac{\delta\beta}{\delta u_1}\right)^2 = 1, \tag{3}$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta u_1}\frac{\delta\alpha}{\delta u_1} - \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{\delta\alpha}{\delta u_1}\frac{\delta\beta}{\delta u_2} + \frac{\delta\alpha}{\delta u_2}\frac{\delta\beta}{\delta u_1}\right) - \frac{\delta\beta}{\delta u_1}\frac{\delta\beta}{\delta u_2} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\delta\alpha}{\delta u_2}\right)^2 - 2\operatorname{tang}\alpha\frac{\delta\alpha}{\delta u_2}\frac{\delta\beta}{\delta u_2} - \left(\frac{\delta\beta}{\delta u_2}\right)^2 = -1. \tag{5}$$

En posant:

$$\Phi(u_1, u_2) = \log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\Psi(u_1, u_2) = \beta - \log\cos\alpha,$$

$$(6) \qquad \left(\frac{\delta \Phi}{\delta u_1}\right)^2 - \left(\frac{\delta \Psi}{\delta u_1}\right)^2 = 1, \qquad \left(\frac{\delta \Phi}{\delta u_2}\right)^2 - \left(\frac{\delta \Psi}{\delta u_2}\right)^2 = -1.$$

Cherchons d'abord la solution de ce système ; en dérivant les deux membres de la première équation par rapport à u_2, et ceux de la deuxième par rapport à u_1, on obtient :

$$\frac{\delta \Phi}{\delta u_1}\frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_1 \delta u_2} - \frac{\delta \Psi}{\delta u_1}\frac{\delta^2 \Psi}{\delta u_1 \delta u_2} = 0, \qquad \frac{\delta \Phi}{\delta u_2}\frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_1 \delta u_2} - \frac{\delta \Psi}{\delta u_1}\frac{\delta^2 \Psi}{\delta u_1 \delta u_2} = 0$$

et comme on doit avoir évidemment :

$$\frac{\delta \Phi}{\delta u_1}\frac{\delta \Psi}{\delta u_2} - \frac{\delta \Phi}{\delta u_1}\frac{\delta \Psi}{\delta u_1} \neq 0,$$

il suit que :

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_1 \delta u_2} = \frac{\delta^2 \Psi}{\delta u_1 \delta u_2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\Phi = U_1(u_1) + U_2(u_2), \qquad \Psi = V_1(u_1) + V_2(u_2).$$

En remplaçant ces valeurs de Φ et de Ψ dans (6), on trouve :

$$\left(\frac{dU_1}{du_1}\right)^2 - \left(\frac{dV_1}{du_1}\right)^2 = 1, \qquad \left(\frac{dU_2}{du_2}\right)^2 - \left(\frac{dV_2}{du_2}\right)^2 = -1.$$

En supposant que ni U_1 ni U_2 ne se réduisent pas à des constantes, on peut changer les paramètres u_1 et u_2 de manière que

$$U_1 = u_1, \quad U_2 = u_2.$$

Il suit :

$$V_1 = a \quad , \quad V_2 = \pm \sqrt{2}\, u_2 + b$$

et :

$$\Phi = u_1 + u_2, \qquad \Psi = \pm \sqrt{2}\, u_2 + b + a$$

a, b étant des constantes arbitraires. Si on suppose maintenant :

$$U_2 = a = \text{const.}$$

et l'on choisit le paramètre u_1 de manière que :

$$U_1 = u_1,$$

il suit que :

$$V_1 = b, \quad V_2 = \pm u_2$$

et :

$$\Phi = u_1 + a \quad , \quad \Psi = \pm u_2 + b.$$

il résulte alors, dans le premier cas :

$$\alpha = \operatorname{arctang\,sh}(u_1 + u_2), \quad \beta = \pm \sqrt{2}\,(u_2 + a + b) - \log\cos(u_1 + u_2),$$

et dans le deuxième :

$$\alpha = \operatorname{arctang\,sh}(u_1 + a), \quad \beta = u_2 + b - \log\cos(u_1 + a).$$

On s'assure aisément que seulement la deuxième solution vérifie l'équation (4). Il resulte donc des considérations de plus haut que les déformées des congruences dont il est question dépendent de deux constantes arbitraires. L'expression de la sphère $\overline{\mathbf{A}}$ sera :

$$\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{tangh}(u_1 + a)\,\mathbf{A} + \frac{e^{\pm u_2 + b}}{\cos h\,(u_1 + a)}\,\mathbf{Q}.$$

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1946).

Travaux cités

1) A. Haimovici, *Sur une certaine déformation des congruences de sphères.* Bull. Ecole Polyt. de Jassy, vol. I, fasc. 2 (1946) pp. 238 - 255.

2) Nous considérons la transformation au point de vue analytique, les fonctions pouvant prendre aussi des valeurs complexes.

3) Le congruences de courbure nulle ont été étudiées par M. Paul Vincensini, J. de Math. pures et appliquées, IX, T. 16 (1937), pp. 315 - 329.

SUR UNE CERTAINE CORRESPONDANCE PAR PLANS TANGENTS PARALLÈLES ENTRE DEUX SURFACES CERCLÉES

par

STEFANIA RUSCIOR (M.me)

1. L'étude de la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces a été initiée par Peterson [1]) et developpée par divers auteurs [2]).

On a ainsi étudié la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces reglées, avec correspondance des génératrices.

Nous nous proposons ici d'étudier le problème analogue de la correspondance par plans tangents parallèles pour une classe de surfaces cerclées qui conservent les cercles.

2. Considérons deux surfaces cerclées (S) et (S_1) et cherchons les conditions nécessaires pour que la correspondance par plans tangents parallèles entre ces surfaces conserve les cercles.

Considérons ici la surface (S) générée par un cercle (C) qui se deplace avec son centre sur une courbe gauche (γ), le plan du cercle étant normal à cette courbe. Si la courbe (γ) est définie par l'équation vectorielle

$$\bar{x} = \bar{x}(v), \tag{1}$$

le paramètre v représentant l'arc de la courbe, l'équation de la surface (S), rapportée à un système de coordonnées fixe $Oxyz$, dans les notations classiques, sera :

$$\bar{X} = \bar{x}(v) + r(v)[\bar{n} \sin u + \bar{b} \cos u], \tag{2}$$

où r représente le rayon du cercle et u l'angle déterminé par la normale principale de la courbe (γ) avec le rayon mené dans un point générique de la surface.

Soit

$$\bar{X}_1 = \bar{x}_1(v_1) + r_1(v_1)[\bar{n}_1 \sin u_1 + \bar{b}_1 \cos u_1] \tag{3}$$

l'équation de la surface (S_1), les notations ayant la même signification que dans les formules (1) et (2).

La correspondance entre ces deux surfaces est de telle manière que les plans tangents aux surfaces dans les points correspondants soient parallèles.

Les paramètres de direction du plan tangent à la surface (S) dans un point $M(X, Y, Z)$, déterminés par le produit vectoriel de forme connue, sont :

$$(4)\quad [\bar{x}'_u, \bar{x}'_v] = r[\bar{n}\cos u - \bar{b}\sin u, \bar{t} + r'(\bar{t}\sin u + \bar{b}\cos u) + r(\bar{n}'\sin u + \bar{b}'\cos u)],$$

où l'accent indique la dérivée par rapport au paramètre.

Remplaçant $\bar{n}'$ et $\bar{b}'$ d'après les formules de Frenet, on obtient :

$$\left[\bar{x}'_u, \bar{x}'_v\right] = r\left[\bar{n}\cos u - \bar{b}\sin u, \bar{t} + r'(\bar{t}\sin u + \bar{b}\cos u) - r\sin u\left(\frac{\bar{t}}{R} + \frac{\bar{b}}{T}\right) + r\frac{\bar{n}}{T}\cos u\right].$$

En tenant compte des relations

$$[\bar{t}, \bar{n}] = \bar{b}\ ,\ [\bar{n}, \bar{b}] = \bar{t}\ ,\ [\bar{b}, \bar{t}] = \bar{n}$$

et ordonnant suivant $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$, l'expression devient :

$$\bar{N} = \bar{t}(rr'\cos^2 u) + \bar{n}\left[-r\sin u\left(1 + r'\sin u - \frac{r}{R}\sin u\right)\right] + b\left[-r\cos u\left(1 + r'\sin u - \frac{r}{R}\sin u\right)\right],$$

$\bar{N}$ étant le vecteur normal du point M à la surface (S).

Les projections t_x, n_x, b_x des vecteurs $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ sur l'axe Ox sont, à un facteur multiplicatif près,

$$x'r'\cos^2 u$$

$$-x''R\sin u\left(1 + r'\sin u - \frac{r}{R}\sin u\right)$$

$$-R\cos u(y'z'' - z'y'')\left(1 + r'\sin u - \frac{r}{R}\sin u\right).$$

De même, les projections t_{1x}, n_{1x}, b_{1x} des vecteurs $\bar{t}_1, \bar{n}_1, \bar{b}_1$ sur l'axe Ox seront :

$$x'_1 r'_1 \cos^2 u_1$$

$$- x''_1 R_1 \sin u_1 \left(1 + r'_1 \sin u_1 - \frac{r_1}{R_1} \sin u_1\right)$$

$$- R_1 \cos u_1 (y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1) \left(1 + r'_1 \sin u_1 - \frac{r_1}{R_1} \sin u_1\right).$$

Soient

$$N_x = t_x + n_x + b_x$$
$$N_{1x} = t_{1x} + n_{1x} + b_{1x}$$

les projections de $\overline{N}$ et $\overline{N}_1$ sur l'axe Ox. Les projections sur les axes Oy et Oz, soit N_y, N_{1y}, N_z, N_{1z}, ont une forme analogue, obtenue par des permutations circulaires des x,y,z.

La condition qui exprime que les plans tangents dans des points correspondants sont parallèles est :

$$\frac{N_x}{N_{1x}} = \frac{N_y}{N_{1y}} = \frac{N_z}{N_{1z}}. \tag{5}$$

Remplaçant dans les expressions de $N_x, N_{1x}, \ldots$ les $t_x, n_x, \ldots$ par les valeurs obtenues plus haut, on a :

$$\frac{x'r' \cos^2 u - \left(1 + r' \sin u - \frac{r}{R} \sin u\right)\left[x'' R \sin u + R \cos u (y'z'' - z'y'')\right]}{x'r'_1 \cos^2 u_1 - \left(1 + r'_1 \sin u_1 - \frac{r_1}{R_1} \sin u_1\right)\left[x''_1 R_1 \sin u_1 + R_1 \cos u_1 (y'_1 z''_1 - z'_1 y''_1)\right]} = \tag{5'}$$

$$= \frac{N_y}{N_{1y}} = \frac{N_z}{N_{1z}}.$$

Les deux équations (5) déterminent en général une correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces cerclées. Pour que cette correspondance conserve les cercles, ces équations doivent être équivalentes à deux relations de la forme :

$$v_1 = f(v)$$
$$u_1 = F(u,v).$$

Pour mettre en évidence la liaison qui existe entre u et u_1, calculons d'abord les produits scalaires suivants :

$$(\overline{N}, \overline{n}) = - k \sin u$$
$$(\overline{N}_1, \overline{n}) = (\overline{n}, \overline{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\overline{n}, \overline{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\overline{n}, \overline{b}_1) \cos u_1$$
$$(\overline{N}, \overline{b}) = - k \cos u$$
$$(\overline{N}_1, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\overline{b}, \overline{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\overline{b}, \overline{b}_1) \cos u_1,$$

avec

$$k = 1 + r' \sin u - \frac{r}{R} \sin u$$

$$k_1 = 1 + r'_1 \sin u_1 - \frac{r_1}{R_1} \sin u_1 .$$

En utilisant les propriétés élémentaires concernant les règles sur les proportions, on a :

$$\frac{N_x}{N_{1x}} = \frac{N_y}{N_{1y}} = \frac{N_z}{N_{1z}} = \frac{(\bar{N}, \bar{n})}{(\bar{N}_1, \bar{n})} = \frac{(\bar{N}, \bar{b})}{(\bar{N}_1, \bar{b})},$$

mais

$$\frac{(\bar{N}, \bar{n})}{(\bar{N}_1, \bar{n})} = \frac{-k \sin u}{(\bar{n}, \bar{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\bar{n}, \bar{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\bar{n}, \bar{b}_1) \cos u_1}$$

$$\frac{(\bar{N}, \bar{b})}{(\bar{N}_1, \bar{b})} = \frac{-k \cos u}{(\bar{b}, \bar{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\bar{b}, \bar{n}_1) \sin u_1 - k_1 (b, \bar{b}_1) \cos u_1}$$

donc

$$\frac{-k \sin u}{(\bar{n}, \bar{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\bar{n}, \bar{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\bar{n}, \bar{b}_1) \cos u_1} =$$

$$= \frac{-k \cos u}{(\bar{b}, \bar{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\bar{b}, \bar{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\bar{b}, \bar{b}_1) \cos u_1} .$$

Par des considérations analogues, concernant l'égalité des rapports

$$\frac{(\bar{N}, \bar{n}_1)}{(\bar{N}_1, \bar{n}_1)} = \frac{(\bar{N}, \bar{b}_1)}{(\bar{N}_1, \bar{b}_1)}$$

on obtient :

$$\frac{(\bar{n}_1, \bar{t}) r' \cos^2 u - k (\bar{n}_1, \bar{n}) \sin u - k (\bar{n}_1, \bar{b}) \cos u}{-k_1 \sin u_1} =$$

$$= \frac{(\bar{b}_1, \bar{t}) r' \cos^2 u - k (\bar{b}_1, \bar{n}) \sin u - k (\bar{b}_1, \bar{b}) \cos u}{-k_1 \cos u_1} .$$

Les dernières équations nous donnent facilement :

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} u = \dfrac{(\bar{n}, \bar{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\bar{n}, \bar{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\bar{n}, \bar{b}_1) \cos u_1}{(\bar{b}, \bar{t}_1) r'_1 \cos^2 u_1 - k_1 (\bar{b}, \bar{n}_1) \sin u_1 - k_1 (\bar{b}, \bar{b}_1) \cos u_1} \\ \operatorname{tg} u_1 = \dfrac{(\bar{n}_1, \bar{t}) r' \cos^2 u - k (\bar{n}_1, \bar{n}) \sin u - k (\bar{n}_1, \bar{b}) \cos u}{(\bar{b}_1, \bar{t}) r' \cos^2 u - k (\bar{b}_1, \bar{n}) \sin u - k (\bar{b}_1, \bar{b}) \cos u} . \end{cases}$$

Par un changement de paramètre sur la courbe (γ_1) génératrice de la surface (S_1) on peut avoir $v_1 = v$.

La correspondance par plans tangents parallèles des surfaces (S) et (S_1), étudiée ci-dessus, conserve les cercles si les équations (6) déterminent $u_1 = F(u, v)$.

Puisque on a ici deux équations de la forme :

$$\operatorname{tg} u = f(u_1, v)$$
$$\operatorname{tg} u_1 = f_1(u, v),$$

on peut déterminer en général, sur deux cercles correspondants ($v = \text{const}$), un nombre fini de points qui se correspondent par plans tangents parallèles.

Nous nous proposons de trouver les conditions pour qu'il existe une telle correspondance pour tous les points des cercles.

Dans ce cas les équations (6) doivent avoir une infinité de solutions pour u et u_1, (avec $v = \text{const}$), c'est-à-dire elles doivent être équivalentes.

Cherchons les conditions dans les quelles le problème est possible.

Mettons :

$$x = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{u_1}{2},$$

Les équations (6) deviennent :

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{(\bar{n}, \bar{t}_1)\, r'_1 (1-y^2)^2 - (1+y^2+2\varrho_1 y)[(\bar{n}, \bar{n}_1).\, 2y + (\bar{n}, \bar{b}_1)(1-y^2)]}{(\bar{b}, \bar{t}_1)\, r'_1 (1-y^2)^2 - (1+y^2+2\varrho_1 y)[(\bar{b}, \bar{n}_1).\, 2y + (\bar{b}, \bar{b}_1)(1-y^2)]}$$

(7)

$$\frac{2y}{1-y^2} = \frac{(\bar{n}_1, \bar{t})\, r' (1-x^2)^2 - (1+x^2+2\varrho x)[(\bar{n}_1, \bar{n}).\, 2x + (\bar{n}_1, \bar{b})(1-x^2)]}{(b_1, t)\, r' (1-x^2)^2 - (1+x^2+2\varrho x)[(\bar{b}_1, \bar{n}_1).\, 2x + (\bar{b}_1, \bar{b})(1-x^2)]},$$

où $\varrho = r' - \dfrac{r}{R}$ et $\varrho_1 = r'_1 - \dfrac{r_1}{R_1}$.

Les relations qui expriment que les deux équations sont équivalentes, sont :

(8)

$$(\bar{n}, \bar{t}_1)\, r'_1 + (\bar{n}, \bar{b}_1) = 0 \qquad (\bar{n}_1, \bar{t})\, r' + (\bar{n}_1, \bar{b}) = 0$$
$$(\bar{b}, \bar{t}_1)\, r'_1 + (\bar{b}, \bar{b}_1) = 0 \qquad (\bar{b}_1, \bar{t})\, r' + (\bar{b}_1, \bar{b}) = 0$$
$$(\bar{n}, \bar{n}_1) - \varrho_1 (\bar{n}\, \bar{b}_1) = 0 \qquad (\bar{n}_1, \bar{n}) - \varrho (\bar{n}_1, \bar{b}) = 0$$
$$(\bar{b}, \bar{n}_1) - \varrho_1 (\bar{b}, \bar{b}_1) = 0 \qquad (\bar{b}_1, \bar{n}) - \varrho (\bar{b}_1, \bar{b}) = 0$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{n},\bar{t}_1)\,r'_1 - 2\varrho_1\,(\bar{n},\bar{n}_1) &= C\,[(\bar{n}_1,\bar{t})\,r' - 2\,\varrho(\bar{n}_1,\bar{n})]\\
2(\bar{b},\bar{t}_1)r'_1 - 4\,\varrho_1\,(\bar{b},\bar{n}_1) &= C\,[(\bar{n}_1,\bar{n}) + \varrho\,(\bar{n}_1,\bar{b})]\\
(\bar{n},\bar{n}_1) + \varrho_1\,(\bar{n},\bar{b}_1) &= C\,[2(\bar{b}_1,\bar{t})\,r' - 4\,\varrho\,(\bar{b}_1,\bar{n})]\\
(\bar{b},\bar{n}_1) \cdot\ \varrho\,(\bar{b},\bar{b}_1) &= C\,[(\bar{b}_1,\bar{n}) + \varrho\,(\bar{b}_1,\bar{b})]\\
(\bar{b},\bar{t}_1)\,r'_1 - (\bar{b},\bar{b}_1) &= C\,[(\bar{n}_1,\bar{n}) + \varrho\,(\bar{n}_1,\bar{b})]\\
(\bar{n},\bar{n}_1) + \varrho_1\,(\bar{n},\bar{b}_1) &= C[(\bar{b}_1,\bar{t})\,r' - (\bar{b}_1,\bar{b})]\\
(\bar{n},\bar{t}_1)\,r'_1 - (\bar{n},\bar{b}_1) &= C\,[(\bar{n}_1,\bar{t})\,r' - (\bar{n}_1,\bar{b})]\\
(\bar{n},\bar{t}_1)\,r'_1 - (\bar{n},\bar{b}_1) &= C[(\bar{n}_1,\bar{t})\,r' - 4\,\varrho\,(\bar{n}_1,\bar{n})]\\
2(\bar{n},\bar{t}_1)\,r'_1 - 4\,\varrho_1\,(\bar{n},\bar{n}_1) &= C\,[(\bar{n}_1\,\bar{t})\,r' - (\bar{n}_1,\bar{b})]
\end{aligned}
$$

où C représente le facteur de proportionnalité des coéfficients.

Par des combinaisons effectuées sur les relations (8) on obtient :

$$(\bar{n},\bar{t}_1)\,r'_1 = C\,(\bar{n}_1,\bar{t})$$

$$(\bar{n},\bar{b}_1)\,\varrho_1 = (\bar{n}_1,\bar{b})\,\varrho.$$

Les valeurs de $(\bar{n},\bar{t}_1)$ et $(\bar{n},\bar{b}_1)$ qu'on deduit d'ici, substituées dans l'équation

$$(\bar{n},\bar{t}_1)\,r'_1 - (\bar{n},\bar{b}_1) = C\,[(\bar{n}_1,\bar{t})\,r' - (\bar{n}_1,\bar{b})]$$

nous donne

$$(9) \qquad (\bar{n}_1,\bar{b})\left(C - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) = 0.$$

Cette relation est possible si $(\bar{n}_1,\bar{b}) = 0$, ou $C - \frac{\varrho}{\varrho_1} = 0$.

Dans le premier cas, les équations (8) nous donnent encore :

$$
\begin{aligned}
(\bar{n}_1,\bar{t}) &= 0\\
\varrho_1 &= c\varrho\\
\varrho &= \varrho_1\\
(\bar{b},\bar{b}_1) &= 0\\
(\bar{n},\bar{n}_1) &= 0
\end{aligned}
$$

mais si on a :

$$(\bar{n}_1,\bar{b}) = 0 \quad \text{et} \quad (\bar{n}_1,\bar{t}) = 0$$

résulte que $\bar{n} = \bar{n}_1$, *donc les courbes* (γ) *et* (γ_1) *se trouvent en correspondance* C o m b e s c u r e.

Les relations

$$\varrho_1 = c\varrho \quad , \quad \varrho_1 = \varrho$$

nous donnent $C = 1$, donc le deuxième facteur de l'équation (9) devient nul, en même temps avec le premier.

Enfin les relations $(\bar{b}, \bar{b}_1) = 0$ et $(\bar{n}, \bar{n}_1) = 0$ sont impossibles puisque $\bar{b} = \bar{b}_1$ et $\bar{n} = \bar{n}_1$ se que nous montre que le système (8) est compatible seulement dans le cas où $x = y$.

Donc si on a:

$$\bar{t} = \bar{t}_1 \quad , \quad u = u_1 \quad , \quad \varrho = \varrho_1$$

les équations (6) sont équivalents et la correspondance des surfaces est une correspondance par plans tangents parallèles, qui conserve les cercles.

En conclusion, une telle correspondance n'est pas possible que si:

a) Les cercles générateurs des surfaces (S) et (S_1) sont situés dans des plans parallèles $(\bar{t} = \bar{t}_1)$.

b) L'angle déterminé par la normale principale de la courbe (γ) avec le rayon mené dans un point de la surface est egale avec l'angle correspondant de la surface (S_1) $(u = u_1)$.

c) Les rayons des cercles satisfont aux conditions suivantes, déduites de (8) et (5):

$$r'_1 - \frac{r_1}{R_1} = r' - \frac{r}{R} \qquad (10)$$

$$r' = r'_1,$$

d'où on détermine les rayons des cercles correspondants, à une constante près:

$$r_1 = \frac{C R_1}{R - R_1} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{C R}{R - R_1}.$$

3. Soit (G) la droite déterminée par deux points correspondants M et M_1, définis par les vecteurs de position $\bar{X}$ et $\bar{X}_1$. On déduit facilement, par des considérations géometriques élémentaires, que si les points M et M_1 décrivent deux cercles correspondants, la droite (G) détermine un cône.

Nous nous proposons de trouver la courbe décrite par le sommet du cône, quand les cercles correspondants se deplacent sur les courbes (γ) et (γ_1).

L'équation de la droite (G) sera:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \bar{x}_2 &= \bar{x} + r(\bar{n}\sin u + \bar{b}\cos u) + \\ &+ \lambda\,[\bar{x}_1 - \bar{x} - (r_1 - r)(\bar{n}\sin u + \bar{b}\cos u)], \end{aligned}$$

$\bar{x}_2$ représentant le vecteur de position d'un point de la droite.

Mettons

$$\bar{x}_1 - \bar{x} = \bar{A} \quad , \quad r_1 - r = B,$$

l'équation (11) devient :

$$\bar{x}_2 = \bar{x} + \lambda\,\bar{A} + (r - \lambda\,B)(\bar{n}\sin u + \bar{b}\cos u).$$

Cette équation représente l'équation paramétrique du cône généré par la droite.

Le sommet est le point singulier de la surface. On a :

$$[\bar{x}_u\,,\,\bar{x}_\lambda] = [r(\bar{n}\cos u - \bar{b}\sin u) - \lambda B(\bar{n}\cos u - \bar{b}\sin u)\,,$$
$$\bar{A} - B(\bar{n}\sin u + \bar{b}\cos u)]$$

ou

$$(r - \lambda\,B)\,[\bar{n}\cos u - \bar{b}\sin u \quad , \quad \bar{A} - B(\bar{n}\sin u + \bar{b}\cos u)] = 0.$$

Puisque le deuxième facteur diffère de zéro, le point singulier de la surface est defini par :

$$r - \lambda\,B = 0$$

ou bien

$$\lambda = \frac{r}{r_1 - r}.$$

Donc, le lieu cherché est :

$$\bar{x}_2 = \frac{r_1\,\bar{x}_1 - r\,\bar{x}}{r_1 - r}.$$

La tangente à cette courbe est :

$$\bar{x}'_2 = \bar{t} + \frac{(\bar{x}_1\,r'_1 - \bar{x}\,r')(r_1 - r) - (\bar{x}_1\,r_1 - \bar{x}\,r)(r'_1 - r')}{(r_1 - r)^2}$$

ou

$$\bar{t}_2 - \bar{t} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x})(r'\,r_1 - r'_1\,r)}{r_1 - r}.$$

Mais $r' = r'_1$, donc

$$\bar{t}_2 - \bar{t} = (\bar{x}_1 - \bar{x})\,r'.$$

On voit que si $r' = 0$, on a $\bar{t}_2 = \bar{t}$, donc si les surfaces correspondantes sont des surfaces canal, la courbe decrite par le sommet du cône est en correspondance Combescure avec les courbes (γ) et (γ_1)

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1946).

Travaux cités

1) J. Peterson. - *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes.* Toulouse Ann. (2). 7, (1905), pag. 5-43.

2) A. Myller. - *La transformation par plans tangents parallèles.* Bull. Sci. Math (2), 52, (1928), pag. 259-265.

3) I. Creangă. - *La correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces reglées, avec correspondance des génératrices.* C. R. de l'Acad. de Sci. de Roumanie 1. (1936) pag. 287-291.

4) A. Haimovici. - *Sur une certaine déformation des congruences des sphères.* Bull. Ec. Polytechnique de Jassy, I Fasc. 2. (1946), pag. 238-255.

SUR UNE FAMILLE DE TRANSFORMATIONS ENTRE DEUX SURFACES RÉGLÉES

par

I. CREANGĂ

1. Considérons les transformations K, entre les points des deux surfaces réglées Σ_1 et Σ_2, qui conservent les génératrices et, pour chacune des génératrices correspondantes, sont des homographies.

Pour individualiser une correspondance T de la famille K, il faut que soit donnée la correspondance des génératrices entre les surfaces Σ_1 et Σ_2 et trois courbes sur Σ_1 ainsi que les trois courbes correspondantes sur Σ_2, qui servent pour déterminer les homographies de chaque paire de génératrices correspondantes. On voit donc que la famille K dépend de quatre fonctions arbitraires: une fonction qui fait le choix des génératrices correspondantes et trois fonctions qui fixent les trois courbes sur Σ_2, correspondantes des trois courbes de Σ_1, prises arbitrairement.

Les correspondances considérées transforment une famille R de courbes de la surface Σ_1, dans une famille R de la surface Σ_2.

Les familles R sur une surface réglée, sont des familles, dont les courbes coupent les génératrices suivant des divisions homographiques. Elles sont introduites et étudiées parfaitement par M. le Prof. Octav Mayer dans trois mémoires [1]. Tous les résultats trouvés par Mr. Octav Mayer, liés des familles R et sur les invariants et les covariants de deux familles R ou d'une famille R et une couple de courbes sont conservés par les transformations de la famille K, entre Σ_1 et Σ_2.

La famille K, considérée, peut être décomposée en deux classes: 1^0 les transformations qui conservent les mêmes paires de génératrices de Σ_1 et Σ_2, en changeant les courbes qui définissent l'homographie entre les génératrices; 2^0 les transformations qui, en conservant les mêmes courbes pour déterminer les homographies entre les points des génératrices, changent le choix des couples de génératrices correspondantes.

Dans cette note, en commençant l'étude de telles transformations

K, nous fixons l'attention sur les transformations de la première classe et surtout, sur la congruence des droites, qui lient les points correspondants.

2. Les surfaces Σ_1 et Σ_2, rapportées à un système projectif homogène de coordonnées, ont les équations :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_1(t) + u\,\bar{x}_2 t) \\ \bar{y} &= \bar{x}_3(t_1) + u_1 \bar{x}_4(t_1) \end{aligned}$$

où, en adoptant la notation vectorielle, $\bar{x}_1(t)$ et $\bar{x}_2(t)$ sont les courbes directrices Σ_1 et $\bar{x}_3(t_1), \bar{x}_4(t_1)$ sont les courbes directrices sur Σ_2. Une transformation T est donnée par les relations :

$$(2) \qquad \begin{aligned} t_1 &= \varphi(t) \\ u_1 &= \frac{a(t).u + b(t)}{c(t).u + d(t)} . \end{aligned}$$

On suppose les fonctions $\bar{x}_i$, φ a,b,c,d continues et dérivables autant qu'il est nécessaire. On peut prendre toujours sur les surfaces Σ_1 et Σ_2, pour coordonnées curvilignes, les systèmes des génératrices et une couple de familles R, correspondante par T. Si, en plus, l'on fait la transformation $t_1 = \varphi(t)$ sur le paramètre des courbes directrices de Σ_2 et l'on prend pour courbes directrices sur Σ_1, resp. Σ_2, deux couples correspondantes, les relations (2) deviennent :

$$(3) \qquad t_1 = t \; ; \; u_1 = u.$$

Il faut remarquer que, sans restreindre la généralité, l'on peut supposer sur l'une ou sur l'autre des surfaces Σ_1 ou Σ_2 les lignes asymptotiques prises pour $u = c^{te}$. On suppose cela toujours, sauf l'avis contraire, pour Σ_1. Cette remarque résulte du fait que les lignes asymptotiques forment une famille R, sur une surface réglée.

Toutes les transformations de la première classe, relativement à la transformation T, sont données par (2) où $\varphi(t)$ est une fonction connue et a, b, c, d sont des fonctions arbitraires. Parmi ces transformations, on trouve les transformations A, qui conservent les lignes asymptotiques.

En utilisant la notation : $\frac{da}{dt} = \dot{a}$ etc. pour désigner la dérivation relative à t, les transformations A sont données par les solutions du système d'équations différentielles :

$$(4) \qquad \begin{aligned} \dot{a}c - \dot{c}a &= \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 \\ \dot{b}c - \dot{c}b + \dot{a}d - \dot{a}\dot{d} &= 2\alpha ab + \beta(c\,b + a.d) + 2\gamma c.d \\ \dot{b}d - \dot{d}b &= \alpha b^2 + \beta d.b + \gamma d^2 \end{aligned}$$

où α,β,γ sont les coefficients connus d'équation :

(5) $$\dot{u}_1 = \alpha u_1^2 + \beta u_1 + \gamma$$

des lignes asymptotiques de Σ_2. On voit que la famille A dépend de trois constantes arbitraires.

Considérons deux transformations T et T_1 de la famille K et de la classe déterminée par la fonction φ. Elles induisent sur chacune des deux génératrices correspondantes g_1 et g_2, les homographies K_1 et K_2, qui font correspondre sur la même génératrice, les points qui sont les correspondants par T et T_1 d'un même point de l'autre génératrice. Si les homographies K_1 et K_2 sont hyberboliques, il y a une couple de courbes sur Σ_1 qui est transformée soit par T, soit par T_1, dans la même couple sur Σ_2, ce sont les couples formées par les points doubles des homographies K_1 et K_2.

3. Considérons, maintenant, les transformations T, qui conservent deux lignes asymptotiques. Les discutions précédentes, nous permettent de fixer pour chaque couple des génératrices correspondantes g_1 et g_2, dans la transformation T donnée, un repère local. Nous choisirons, le repère formé par les quatre points correspondants par T et par une transformation asymptotique A. En résumé, nous ferons les hypothèses suivantes :

1°. Les courbes $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$; $\bar{x}_3(t)$, $\bar{x}_4(t)$, qui servent comme courbes directrices pour Σ_1 et Σ_2 sont des lignes asymptotiques sur les surfaces respectives.

2°. Elles sont correspondantes par T : $\bar{x}_1$ avec $\bar{x}_3$ et $\bar{x}_2$ avec $\bar{x}_4$.

3°. Sur Σ_1 les lignes asymptotiques sont les coordonnées curvilignes.

4°. On choisit comme repère local le tétraèdre formé par les points $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$.

Le déplacement infinitésimal du repère est défini alors par les relations :

(6)
$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_1 &= \sum_1^4 a_{1i}\,\bar{x}_i \\
\dot{\bar{x}}_2 &= \sum_1^4 a_{2i}\,\bar{x}_i \\
\dot{\bar{x}}_3 &= \sum_1^4 a_{3i}\,\bar{x}_i \\
\dot{\bar{x}}_4 &= \sum_1^4 a_{4i}\,\bar{x}_i
\end{aligned}$$

où a_{ki} représentent les composants du déplacement du repère mobile. Ces composants sont assujettis à certaines conditions. Pour les trou-

ver nous nous servons des équations différentielles qui déterminent les surfaces réglées Σ_1 et Σ_2, jusqu'à une transformation projective [2]). Les équations de Σ_1 sont :

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_1 &= p_{11}\dot{\bar{x}}_1 + q_{11}\bar{x}_1 + q_{12}\bar{x}_2 \\ \ddot{\bar{x}}_2 &= p_{11}\dot{\bar{x}}_2 + q_{21}\bar{x}_1 + q_{22}\bar{x}_2 \end{aligned} \tag{7}$$

$\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ étant des lignes asymptotiques et la surface Σ_1 étant rapportée au réseau asymptotique. Celles de Σ_2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_3 &= p_{33}\dot{\bar{x}}_3 + q_{33}\bar{x}_3 + q_{34}\bar{x}_4 \\ \ddot{\bar{x}}_4 &= p_{44}\dot{\bar{x}}_4 + q_{43}\bar{x}_3 + q_{44}\bar{x}_4 \end{aligned} \tag{8}$$

étant satisfaite pour Σ_2 seulement la première condition. Notant avec :

$$A_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}\, a_{i\beta}, \tag{9}$$

il en résulte de (6), (7) et (8)

$$\begin{aligned} &A_{13}=p_{11}a_{13}\ ,\ A_{14}=p_{11}a_{14}\ ,\ A_{11}=p_{11}a_{11}+q_{11}\ ,\ A_{12}=p_{11}a_{12}+q_{12} \\ &A_{21}=p_{11}a_{21}+q_{21}\ ,\ A_{22}=p_{11}a_{22}+q_{22}\ ,\ A_{23}=p_{11}a_{23}\ ,\ A_{24}=p_{11}a_{24} \\ &A_{31}=p_{33}a_{31}\ ,\ A_{32}=p_{33}a_{32}\ ,\ A_{33}=p_{33}a_{33}+q_{33}\ ,\ A_{34}=p_{33}a_{34}+q_{34} \\ &A_{41}=p_{44}a_{41}\ ,\ A_{42}=p_{44}a_{42}\ ,\ A_{43}=p_{44}a_{43}+q_{43}\ ,\ A_{44}=p_{44}a_{44}+q_{44}. \end{aligned} \tag{10}$$

L'on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{A_{13}}{a_{13}}=\frac{A_{14}}{a_{14}}=\frac{A_{23}}{a_{23}}=\frac{A_{24}}{a_{24}} \\ &\frac{A_{31}}{a_{31}}=\frac{A_{32}}{a_{32}}\ ;\ \frac{A_{41}}{a_{41}}=\frac{A_{42}}{a_{42}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Observons encore qu'on a aussi quatre conditions tirées de l'expression des invariants des surfaces Σ_1 et Σ_2 :

$$\frac{[\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \ddot{\bar{x}}_1\ \ddot{\bar{x}}_2]}{[\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \dot{\bar{x}}_1\ \dot{\bar{x}}_2]} = I_1 \quad , \quad \frac{[\dot{\bar{x}}_1\ \dot{\bar{x}}_2\ \ddot{\bar{x}}_1\ \ddot{\bar{x}}_2]}{[\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \dot{\bar{x}}_1\ \dot{\bar{x}}_2]} = J_1$$

t :

$$\frac{[\bar{x}_3\ \bar{x}_4\ \ddot{\bar{x}}_3\ \ddot{\bar{x}}_4]}{[\bar{x}_3\ \bar{x}_4\ \dot{\bar{x}}_3\ \dot{\bar{x}}_4]} = I_2 \quad , \quad \frac{[\dot{\bar{x}}_3\ \dot{\bar{x}}_4\ \ddot{\bar{x}}_3\ \ddot{\bar{x}}_4]}{[\bar{x}_3\ \bar{x}_4\ \dot{\bar{x}}_3\ \dot{\bar{x}}_4]} = J_2$$

Alors, il y a :

$$p^2_{11} = I_1 \quad , \quad q_{11}\, q_{22} - q_{12}\, q_{21} = J_1$$
$$p_{33} \cdot p_{44} = I_2 \quad , \quad q_{33}\, q_{44} - q_{34} \cdot q_{43} = J_2 . \tag{12}$$

En plus, ou peut choisir le paramètre ainsi que :

$$[\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3\, \bar{x}_4] = 1 \tag{13}$$

Dans ces conditions, tous les coefficients a_{ik} sont déterminés, aussi que p_{ii} et q_{ij}.

4. Les droites, qui lient les couples des points correspondants, dans la transformation T, donnent lieu à une congruence Γ, dont l'équation est la suivante :

$$\bar{z} = \bar{x} + v\,\bar{y} = \bar{x}_1 + u\,\bar{x}_2 + v\,\bar{x}_2 + uv\,\bar{x}_4. \tag{14}$$

Notons avec ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les coordonnées d'un point par rapport au tétraèdre local formé par deux couples correspondants. Nous avons :

$$\xi_1 = 1 \quad , \quad \xi_2 = u \quad , \quad \xi_3 = v \quad , \quad \xi_4 = u.v. \tag{15}$$

Pour $t = c^{te}$ et $u = c^{te}$, on obtient les droites de la congruence Γ, qui lient les points déterminés par T sur deux génératrices correspondantes g_1 et g_2 ; ces droites forment une demi-quadrique S_1. Pour $t = c^{te}$ et $v = c^{te}$, nous obtenons une seconde famille de droites g^*, dont le lieu géométrique est une demi-quadrique S_2. S_1 et S_2 appartiennent à la quadrique Q :

$$\xi_1\, \xi_4 - \xi_2\, \xi_3 = 0. \tag{16}$$

Les droites g^* sont les éléments générateurs d'une seconde congruence Γ^*, qui contient les surfaces réglées Σ_1 et Σ_2. Toutes les surfaces réglées, extraites de la congruence Γ^*, peuvent être mises en correspondance T avec Σ_1 ou Σ_2, ou entre elles, suivant les droites de la congruence Γ. Inversement, si l'on considère les surfaces réglées de Γ, entre leurs points existe une transformation T^*, suivant les droites de la congruence Γ^*.

Les foyers de la congruence Γ sont donnés par l'équation :

$$\{-a_{41}\, u^2 + (a_{42} - a_{31})\, u + a_{32}\}\, v^2 + \{(a_{43} - a_{21})\, u^2 + \tag{17}$$
$$+ (a_{22} - a_{11} + a_{33} - a_{44})u + (a_{12} - a_{34})\}v + a_{23}u^2 + (a_{13} - a_{24})\, u - a_{14} = 0$$

qu'on obtient en exprimant que le plan tangent à la surface focale $(v = v(t,u))$ contient le point $\bar{x}_1 + u\bar{x}_2$, a_{ik} étant les coefficients du déplacement du repère choisi. Les foyers de la congruence Γ^* s'obtiennent d'une manière analogue et sont donnés par la même équation (17), ordonnée suivant les puissances d'u.

Les foyers qui sont placés sur les génératrices de Σ_1 sont les racines de l'équation :

(18) $$a_{23}\,u^2 + (a_{13} - a_{24})\,u - a_{14} = 0.$$

De même, les foyers placés sur Σ_2, s'obtiennent de :

(19) $$a_{41}\,u^2 + (a_{31} - a_{42})\,u - a_{32} = 0$$

En général, les courbes décrites par les foyers sur Σ_1 et Σ_2 ne sont pas des courbes correspondantes par T. Si elles sont réelles, on peut prendre comme repère, lié intrinséquement à la correspondance T, les quatre foyers, mais alors on doit modifier les équations écrites, qui sont valables seulement dans les cas des courbes directrices correspondantes. Dans ce repère la correspondance T est exprimée par :

$$u_1 = \frac{a\,u + b}{cu + d}.$$

Notant avec f_{ik} les coefficients du déplacement relatifs au nouveau repère choisi, nous obtenons :

(20) $$\frac{a}{b} = -\frac{f_{31}}{f_{32}} \quad ; \quad \frac{c}{d} = -\frac{f_{41}}{f_{42}}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{f_{42}}{f_{23}} \quad , \quad \frac{b}{d} = \frac{f_{41}}{f_{13}}.$$

Entre les coefficients f_{ik} doit avoir lieu la condition :

(21) $$f_{13} \cdot f_{24} \cdot f_{32} \cdot f_{41} = f_{14} \cdot f_{23} \cdot f_{42} \cdot f_{31}$$

et la correspondance T a la forme :

(22) $$u_1 = \frac{f_{14} \cdot f_{42}}{f_{13} \cdot f_{34}} \cdot \frac{f_{32} - f_{31} \cdot u}{f_{42} - f_{41} \cdot u}.$$

5. Considérons le cas particulier où la première équation (18) est vérifiée identiquement. Pour cela, il faut :

(23) $$a_{14} = a_{23} = 0$$
$$a_{13} = a_{24}.$$

C'est le cas où la quadrique Q reste tangente suivant la génératrice g_i à la surface réglée Σ_1. L'une des nappes focales est la surface Σ_1 et la transformation T fait correspondre aux points M_1 de la génératrice g_1, les points M_2 de g_2 qui sont les intersections de g_2 avec les plans tangents en M_1 à Σ_1. Dans ce cas tous les points de g_1 sont des foyers. Les foyers de g_2 sont donnés par l'équation (19). En choisissant comme courbes directrices sur Σ_2 les courbes décrites par les foyers et sur Σ_1 ses correspondantes, on doit avoir encore :

(24) $$a_{41} = a_{32} = 0$$

Avec la notation (9), les lignes asymptotiques de Σ_1 sont données par:

$$2a_{13}\dot{u} - A_{23}u^2 + (A_{24} - A_{13})u + A_{14} = 0. \tag{25}$$

et celles de Σ_2, de l'équation:

$$2a_{13}a_{42}\dot{u} - a_{42}A_{41}u^2 + (a_{31}A_{42} - a_{42}A_{31})u + a_{31}A_{32} = 0. \tag{26}$$

L'on peut fixer comme points unités sur g_1 et g_2 les points de l'une des lignes asymptotiques correspondantes par T. Nous avons ainsi deux relations entre les coefficients a_{ij}, qui en résultent de (25) et (26). De même si l'on fait le choix du paramètre v de telle manière qu'on ait:

$$[\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \dot{\bar{x}}_1\ \dot{\bar{x}}_2] = 1$$

on obtient:

$$a_{13} = \pm 1. \tag{27}$$

On peut ainsi déterminer tous les coefficients a_{ij}. Dans ce cas, l'autre nappe focale outre la surface Σ_1, est engendrée par une cubique, donnée par l'équation:

$$v = -\frac{(a_{43} - a_{21})u^2 + (a_{22} + a_{33} - a_{11} - a_{44})u + a_{12} - a_{24}}{(a_{42} - a_{31})u}. \tag{28}$$

Cette cubique coupe encore la génératrice g_1 en deux points qui sont donnés par l'équation:

$$(a_{43} - a_{21})u^2 - (a_{22} + a_{33} - a_{11} - a_{44})u + a_{12} - a_{34} = 0. \tag{29}$$

6. Une autre cas particulier est celui pour lequel la correspondance considérée au § 5 est bilatérale. Alors, outre les conditions (23) et (24), il y a, en plus,:

$$a_{42} = a_{31}. \tag{30}$$

Dans ce cas, la surface Σ_2 est elle aussi une nappe focale et la correspondance T est déterminée par la condition que les plans tangents à Σ_1, respt. à Σ_2, aux points correspondants contiennent la couple de ces points correspondants. Etant données deux surfaces réglées arbitrairement, en général cette transformation n'est pas possible.

Nous nous proposons de déterminer toutes les surfaces Σ, qui peuvent être mises en telle correspondance avec une surface réglée donnée Σ_1.

Pour cela nous prenons sur Σ_1 les courbes directrices deux asymptotiques et nous rapportons la surface Σ_1 au réseau asymptotique. On a donnés les equations différentielles, qui définissent la surface Σ_1:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_1 &= p_{11}\dot{\bar{x}}_1 + q_{11}\bar{x}_1 + q_{12}\bar{x}_2 \\ \ddot{\bar{x}}_2 &= p_{11}\dot{\bar{x}}_2 + q_{21}\bar{x}_1 + q_{22}\bar{x}_2. \end{aligned} \tag{31}$$

On doit déterminer les deux autres fonctions $\overline{x}_3$ et $\overline{x}_4$, pour avoir la surface réglée Σ_2, avec les conditions imposées.

Le deplacement du repère, dans ce cas, présente la forme:

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
\dot{\overline{x}}_1 &= a_{11}\,\overline{x}_1 + a_{12}\,\overline{x}_2 + a_{13}\,\overline{x}_3\\
\dot{\overline{x}}_2 &= a_{21}\,\overline{x}_1 + a_{22}\,\overline{x}_2 + a_{13}\,\overline{x}_4\\
\dot{\overline{x}}_3 &= a_{31}\,\overline{x}_1 + a_{33}\,\overline{x}_3 + a_{34}\,\overline{x}_4\\
\dot{\overline{x}}_4 &= a_{31}\,\overline{x}_2 + a_{43}\,\overline{x}_3 + a_{44}\,\overline{x}_4.
\end{aligned}
$$

L'on considère les dix coefficients du déplacement comme des fonctions inconnues de t. Si l'on peut trouver ces fonctions, alors les fonctions $\overline{x}_3$ et $\overline{x}_4$ sont exprimées par:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
\overline{x}_3 &= \frac{\dot{\overline{x}}_1 - a_{11}\,\overline{x}_1 - a_{12}\,\overline{x}_2}{a_{13}}\\
\overline{x}_4 &= \frac{\dot{\overline{x}}_2 - a_{21}\,\overline{x}_1 - a_{22}\,\overline{x}_2}{a_{13}}.
\end{aligned}
$$

Dans ce but, nous éliminons les fonctions $\overline{x}_3$ et $\overline{x}_4$, entre les équations (36) et (35). L'élimination nous conduit aux équations:

$$
\begin{aligned}
&a_{13}\,\ddot{\overline{x}}_1 - \left\{(a_{11} + a_{33})\,a_{13} + \dot{a}_{13}\right\}\dot{\overline{x}}_1 - a_{13}(a_{12} + a_{34})\,\dot{\overline{x}}_2\\
&\quad + \left\{a_{11}\,\dot{a}_{13} + a_{13}(a_{11}\,a_{33} + a_{34}\,a_{21} - a_{31}\,a_{13} - \dot{a}_{11})\right\}\overline{x}_1\\
&\quad + \left\{a_{12}\,\dot{a}_{13} + a_{13}(a_{12}\,a_{33} + a_{34}\,a_{22} - \dot{a}_{12})\right\}\overline{x}_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
&a_{13}\,\ddot{\overline{x}}_2 - a_{13}(a_{21} + a_{43})\,\dot{\overline{x}}_1 - \left\{(a_{22} + a_{44})\,a_{13} + \dot{a}_{13}\right\}\dot{\overline{x}}_2\\
&\quad + \left\{a_{2}\,\dot{a}_{13} + a_{13}(a_{11}\,a_{43} + a_{21}\,a_{44} - \dot{a}_{21})\right\}\overline{x}_1\\
&\quad + \left\{a_{22}\,\dot{a}_{13} + a_{13}(a_{12}\,a_{43} + a_{22}\,a_{44} - a_{31}\,a_{3} - \dot{a}_{22})\right\}\overline{x}_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Les relations (31) et (34) doivent être équivalentes, par suite, on doit avoir:

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
&a_{11} + a_{33} + \frac{\dot{a}_{13}}{a_{13}} = p_{11}\\
&a_{12} + a_{34} = 0\\
&a_{11}\,\frac{\dot{a}_{13}}{a_{13}} + a_{11}\,a_{33} + a_{34}\,a_{21} - a_{13}\,a_{31} - \dot{a}_{11} = -q_{11}\\
&a_{12}\,\frac{\dot{a}_{13}}{a_{13}} + a_{12}\,a_{33} + a_{34}\,a_{22} - \dot{a}_{12} = -q_{12}
\end{aligned}
$$

$$a_{22} + a_{44} + \frac{\dot{a}_{13}}{a_{13}} = p_{11}$$

$$a_{21} + a_{43} = 0$$

$$a_{21}\frac{\dot{a}_{13}}{a_{13}} + a_{11}a_{43} + a_{21}a_{44} - \dot{a}_{21} = -q_{21}$$

$$a_{22}\frac{\dot{a}_{13}}{a_{13}} + a_{12}a_{34} + a_{22}a_{44} - a_{31}a_{13} - \dot{a}_{22} = -q_{22}.$$

En plus, l'hypothèse : $[\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4] = 1$, donne :

(36) $$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0.$$

Nous avons neuf équations pour dix fonctions inconnues. L'on prend l'une d'elles arbitrairement, soit par exemple a_{11}. Alors, l'intégration du système, nous conduit aux résultats suivants :

$$a_{13} = k_1 e^{\int p_{11}\,dt}$$

$$\dot{a}_{22} + a^2_{22} - p_{11}a_{22} - (\dot{a}_{11} + a^2_{11} - p_{11}a_{11}) - q_{22} + q_{11} = 0$$

$$\dot{a}_{12} + (a_{11} + a_{22} - p_{11})a_{12} - q_{12} = 0$$

$$\dot{a}_{21} - (a_{11} + a_{22} + p_{11})a_{21} - q_{21} = 0$$

(37)
$$a_{33} = -a_{11}$$
$$a_{44} = -a_{22}$$
$$a_{34} = -a_{12}$$
$$a_{43} = -a_{21}$$

$$a_{31} = \frac{p_{11}a_{11} + q_{11} - (\dot{a}_{11} + a^2_{11} + a_{12}a_{21})}{a_{13}}.$$

Les équations (37) introduisent quatre constantes arbitraires. Observons que si l'on prend $k_1 = 0$ (ou $a_{13} = 0$), la surface Σ_1 serait développable et le problème considéré ne pourrait pas être posé.

7. Comme exemple, considérons le cas où la surface Σ_1 est une demi-quadrique. Alors :

(38) $$p_{11} = q_{11} = q_{21} = q_{12} = q_{22} = 0.$$

Les équations (40) intégrées, donnent :

(39) $$a_{13} = k_1$$

$$a_{31} = -\frac{\dot{a}_{11} + a^2_{11} + k_3 k_4}{k_1}$$

$$a_{12} = k_3\, e^{-\int\left(2a_{11} + \dfrac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}\right)dt} = -a_{34}$$

$$a_{21} = k_4\, e^{\int\left(2a_{11} + \dfrac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}\right)dt} = -\,a_{43}$$

$$a_{22} = a_{11} + \frac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt} = -\,a_{44}$$

$$a_{33} = -\,a_{11}.$$

On obtient pour $\bar{x}_3$ et $\bar{x}_4$ les expressions :

40)
$$\bar{x}_3 = \frac{\dot{\bar{x}}_1 - a_{11}\,\bar{x}_1 - k_3\, e^{\int\left(2a_{11} + \dfrac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}\right)dt}\sqrt{\bar{x}_2}}{k_1}$$

$$\bar{x}_4 = \frac{\dot{\bar{x}}_2 - k_4\, e^{\int\left(2a_{11} + \dfrac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}\right)dt}\cdot\bar{x}_1 - \left(a_{11} + \dfrac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}\right)\bar{x}_2}{k_1}$$

où l'on a:

(41)
$$\bar{x}_1 = \bar{a} + t\bar{b}$$
$$\bar{x}_2 = \bar{c} + t\bar{d}$$

$\bar{a}, \bar{b}\ \bar{c}, \bar{d}$ étant quatre points fixes qui déterminent un repère fixe. Les coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ d'un point de la courbe directrice $\bar{x}_3$, rapportées au tétraèdre fixe, sont :

(42)
$$\xi_1 = -\,a_{11}$$
$$\xi_2 = 1 - a_{11}\,t$$
$$\xi_3 = -\,k_3\,F(v)$$
$$\xi_4 = -\,k_3\,F(v).t$$

où :

$$F(v) = e^{-\int\left(2a_{11} + \dfrac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{k_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}\right)dt}.$$

De même, les coordonnées $(\eta_1\,\eta_2\,\eta_2\,\eta_4)$ de la courbe $\bar{x}_4$, sont:

$$(40)\qquad \begin{aligned} \eta_1 &= -K_4 F^{-1}(v) \\ \eta_2 &= -K_4 F^{-1}(v).t \\ \eta_3 &= -G(v) \\ \eta_4 &= 1 - tG(v) \end{aligned}$$

où: $$G(v) = a_{11} + \frac{e^{-\int 2a_{11}\,dt}}{K_2 + \int e^{-\int 2a_{11}\,dt}\,dt}.$$

Si l'on prend pour a_{11} une constante $(a_{11} = k)$ et l'on fait, en plus $k_2 = 0$, ou trouve:

$$(41)\qquad \begin{aligned} F(v) &= 1 \\ G(v) &= -k. \end{aligned}$$

Alors, $\bar{x}_3$ et $\bar{x}_4$ sont elles aussi des droites:

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= (-k\bar{a} + \bar{b} - k_3\bar{c}) - t(k\bar{b} + k_3\bar{d}) \\ \bar{x}_4 &= -(k_4\bar{a} - k\bar{c}) + \bar{d} - t(k_4\bar{b} - k\bar{d}) \end{aligned}$$

et la surface réglée Σ_2:

$$\begin{aligned} \bar{y} = \bar{x}_3 + u\bar{x}_4 = &-(k + k_4 u)\bar{a} + (1 - kt - k_4 t.u)\bar{b} - \\ &-(k_3 - ku)\bar{c} + (u - k_3 t + ktu)\bar{d} \end{aligned}$$

est elle aussi une demi-quadrique. On constate que la quadrique Q, variable, reste tangente suivant les deux génératrices correspondantes, aux deux quadriques fixes Q_1 et Q_2.

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1946).

Travaux cités

1. a) Octav Mayer - *Etudes sur les surfaces réglées* Bul. Fac de Ştiinţi Cernăuţi. Vol. II, 1928, pag. 1-33.
b) Octav Mayer - *Sur les surfaces réglées (III).*
c) Octav Mayer - *Sur les congruences de droites.* Ann. Sc. de l'Univ. de Jassy, Tome XXVI, 1940 pag. 299-308 et 613-625.
2. Fubini G.-Cech E. - *Geometria Proiettiva Differenziale.*

SUR LES ESPACES DES FAMILLES SIMPLEMENT TRANSITIVES DE TRANSFORMATIONS DE VARIABLES A COURBURE DE III-e ESPÈCE NULLE

par

MENDEL HAIMOVICI

Introduction. Connexions affines de l'espace. Equations de structure. Objet de ce travail.

Dans quelques travaux précédents [1]), nous avons étudié les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables

$$(I) \qquad \mathcal{X}^i = F^i(x^j, a^j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons montré qu'on peut associer à une telle famille de transformations un espace à $2n$ dimensions dans lequel les coordonnées d'un point sont $\mathcal{X}^i$, x^i. On peut définir dans cet espace six connexions affines.

Supposons que le système d'équations (I) soit l'intégrale générale du système de Pfaff complètement intégrable

$$(I') \qquad \Omega^i = \omega^i$$

où Ω^i et ω^i sont des formes de Pfaff indépendantes, respectivement en $\mathcal{X}^i$, x^i, $d\mathcal{X}^i$ et en $\mathcal{X}^i$, x^i, dx^i.

Supposons associé à chaque point de l'espace un repère formé par $2n$ vecteurs $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{e}_i$ tel que le déplacement infinitésimal du point P ait pour composantes Ω^i, ω^i.

Si nous introduisons la connexion affine de II-e espèce les équations de structure de l'espace seront

---

1) Bull. Sect. Scient. Acad. Roum. XXVIII (1945) p. 143-147; Annales Scient. Univ. Jassy XXX (1947) (sous presse); Bull. Math. Soc. Roum. Sciences (sous presse); Mathematica, Cluj (sous presse).

$$
(II)\quad \begin{cases} (\Omega^i)' - \sum_{j=1}^{n} [\Omega^j \Pi^i_j] = \sum_{jk} A^i_{jk} [\Omega^j \Omega^k] \\ (\omega^i)' - \sum_{j=1}^{n} [\omega^j \Pi^i_j] = \sum_{(jk)} A^i_{jk} [\omega^j \omega^k] \qquad (A^i_{jk} + A^i_{kj} = 0) \\ (\Pi^i_j)' - \sum_{r=1}^{n} [\Pi^r_j \Pi^i_r] = \sum_{k,l=1}^{n} R^i_{jkl} [\Omega^k \omega^l]. \end{cases}
$$

Les composantes Π^i_j de la connexion affine, le tenseur de torsion A^i_{jk} et le tenseur de courbure R^i_{jkl} sont bien déterminés.

Si nous introduisons la connexion affine que nous avons appelée de III-e espèce A, nous avons les équations de structure

$$
(III)\quad \begin{cases} (\Omega^i)' - \sum_{j=1}^{n} [\Omega^j H^i_j] = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} A^i_{jk} [\Omega^j \omega^k] \\ \qquad\qquad (A^i_{jk} + A^i_{kj} = 0) \\ (\omega^i)' - \sum_{j=1}^{n} [\omega^j H^i_j] = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} A^i_{jk} [\Omega^j \omega^k] \\ (H^i_j)' - \sum_{r=1}^{n} [H^r_j H^i_r] = \frac{1}{2} \sum_{(rs)} \left\{ R^i_{sjr} - R^i_{rjs} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (A^i_{kr} A^k_{sj} - A^i_{ks} A^k_{rj}) \right\} \times \\ \times [\Omega^r \Omega^s] + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} \left\{ R^i_{srj} + R^i_{rjs} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (A^i_{kr} A^k_{js} - A^i_{ks} A^k_{jr}) \right\} \times \\ \times [\Omega^r \omega^s] + \frac{1}{2} \sum_{(rs)} \left\{ R^i_{rsj} - R^i_{srj} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (A^i_{kr} A^k_{sj} - A^i_{ks} A^k_{rj}) \right\} [\omega^r \omega^s]. \end{cases}
$$

Dans ces formules A^i_{jk} et R^i_{jkl} sont les mêmes que dans (Π). Entre les composantes H^i_j de cette connexion affine et Π^i_j on a les relations

$$
(IV)\qquad H^i_j = \Pi^i_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} A^i_{jk} (\Omega^k + \omega^k).
$$

Pour avoir les autres connexions affines, on peut considérer au lieu de l'espace des variables X^i, x^i celui des variables X^i, a^i resp. des variables x^i, a^i.

Considérons (I) les x^i comme des paramètres des transformations des a^i dans X^i et construisons la connexion affine de I-e espèce de l'espace des variables X^i, a^i exactement comme nous l'avons fait pour l'espace des variables X^i, x^i. On aura en chaque point un repère formé par $2n$ vecteurs $\bar{\mathbf{E}}^i$ et $\bar{\mathbf{e}}^i$ et le déplacement d'un point P aura pour

composantes des formes de Pfaff Ω^i , $\tilde{\omega}^i$ où $\tilde{\omega}^i$ sont n formes différentielles linéaires en da^i telles que l'on ait identiquement, par suite de (I),

$$\Omega^i = \omega^i + \tilde{\omega}^i . \tag{V}$$

Si nous construisons dans cet espace la connexion affine de II-e espèce resp. de III-e espèce A et que l'on revienne ensuite à l'espace des X^i , x^i à l'aide des relations (I) et (V), on obtient les connexions affines que nous avons appelées resp. de I-e espèce A et de III e espèce B.

On peut procéder de la même manière en considérant l'espace des x^i, a^i. On obtient ainsi les connexions affines de II-e espèce B resp. de III-e espèce C.

Nous avons étudié dans les travaux cités les espaces à courbure de I-e espèce (où II-e espèce A ou B) nulle. Dans ce travail nous étudions les espaces à courbure de III-e espèce A nulle. Ces espaces seront appelés „espaces S^a" et les transformations qui les définissent „transformations S^a". Nous trouvons sous forme finie des formes auxquelles peuvent être amenées les équations (I). Nous nous occupons ensuite du cas où serait nulle la courbure de III-e espèce B ou C. Ces espaces seront appelés respectivement S et S^a et on désignera par les mêmes signes les familles respectives de transformations de variables.

§ 1. *Relations auxquelles satisfont les composantes des tenseurs de courbure et de torsion d'un espace S dans un système de repères quelconque.*

1. La courbure de l'espace étant nulle on aura d'après (III)

$$\left\{\begin{aligned} &R^i_{sjr} - R^i_{rjs} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(A^i_{kr}A^k_{sj} - A^i_{ks}A^k_{rj}) = 0 \\ &R^i_{srj} + R^i_{rjs} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(A^i_{kr}A^k_{js} - A^i_{ks}A^k_{jr}) = 0 \\ &R^i_{rsj} - R^i_{srj} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(A^i_{kr}A^k_{sj} - A^i_{ks}A^k_{rj}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

De la première et de la deuxième de ces relations on déduit en les ajoutant membre à membre et en tenant compte de l'antisymétrie des A^i_{jk} par rapport aux indices inférieurs

$$R^i_{sjr} + R^i_{srj} = 0. \tag{2}$$

On vérifie aisément que si cette relation et une des (1) sont satisfaites, toutes les trois (1) le seront.

Vu les relations d'intégrabilité [1])

$$A^i_{jk}/\omega^r = R^i_{jkr} - R^i_{kjr}$$

$$A^i_{jk}/\Omega^r = R^i_{krj} - R^i_{jrk}$$

on obtient de la première des relations (1)

$$A^i_{rs}/\Omega^j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(A^i_{kr}A^k_{sj} - A^i_{ks}A^k_{rj}) = 0 \tag{3}$$

et de la relation (2)

$$A^i_{jk}/\omega^r = A^i_{jk}/\Omega^r . \tag{4}$$

On vérifie aisément que par suite des relations (3) et (4) seront remplies aussi les conditions d'intégrabilité

$$A^i_{jk}/\Omega^r + A^i_{kr}/\Omega^j + A^i_{rj}/\Omega^k = A^i_{jk}/\omega^r + A^i_{kr}/\omega^j + A^i_{rj}/\omega^k =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} A^i_{rk}A^s_{jr} + \sum_{s=1}^{n} A^i_{sj}A^s_{rk} + \sum_{s=1}^{n} A^i_{sr}A^s_{kj} . \tag{5}$$

Pour avoir l'expression des composantes du tenseur de courbure R^i_{jsr}, faisons dans la deuxième relation (1) les deux permutations circulaires des indices s, r, j et ajoutons membre à membre à (1) les résultats. On obtient

$$R^i_{srj} + R^i_{rjs} + R^i_{jsr} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(A^i_{kr}A^k_{js} + A^i_{kj}A^k_{sr} + A^i_{ks}A^k_{rj}) = 0$$

d'où, en retranchant membre à membre (1)

$$R^i_{jsr} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A^i_{kj}A^k_{sr} = 0. \tag{1'}$$

Cette relation peut remplacer toutes les trois relations (1).

§ 2. *Composantes de la connexion affine d'un espace S. Premières conséquences.*

---

1) V. le travail 1. cité. Les quantités A^i_{jk}/Ω^r et A^i_{jk}/ω^r sont définies par la relation

$$DA^i_{jk} = dA^i_{jk} - \sum_{r=1}^{n} \Pi^i_r A^r_{jk} + \sum_{r=1}^{n} \Pi^r_j A^i_{rk} + \sum_{r=1}^{n} \Pi^r_k A^i_{jr} =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} A^i_{jk}/\omega^r \, \omega^r + \sum_{r=1}^{n} A^i_{jk}/\Omega^r \, \Omega^r .$$

2. La courbure de III-e espèce A étant nulle, il suit qu'on peut choisir un système de repères en chaque point tel que les composantes H_j^i de la connexion affine soient nulles. Si un tel système de repères a été choisi, les équations de structure de l'espace se réduisent à

$$(6)\qquad \begin{cases} (\Omega^i)' = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}^i [\Omega^j \omega^k] \\ (\omega^i)' = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}^i [\Omega^j \omega^k]. \end{cases}$$

3. Remarquons que si les formes Ω^i, ω^i satisfont à un système d'équations de la forme (6), il résulte que $H_j^i = 0$ et que A_{jk}^i sont justement les composantes du tenseur de torsion. Cela résulte tout de suite du fait que la connexion affine de III-e espèce A a été définie par des axiomes qui s'expriment analytiquement par cela que les composantes dela torsion sur $\mathbf{E}_i$ et sur $\mathbf{e}_i$ sont égales à $\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}^i [\Omega^j \omega^k]$ avec $A_{jk}^i + A_{kj}^i = 0$. Ces axiomes déterminent les composantes H_j^i de la connexion et les coefficients A_{jk}^i.

4. Faisons encore la remarque que les différences $\Omega^i - \omega^i$ sont des différentielles, puisque, par suite de (6) on a

$$(\Omega^i)' - (\omega_i)' = 0$$

On peut donc poser

$$(7)\qquad \Omega^i - \omega^i = df^i$$

f_i^i étant des fonctions de X^i et de x^i. Si on impose la condition que $f = a^i = c^{te}$, c'est-à-dire que $df^i = 0$, on obtient les équations en termes finis de la famille de transformations de variables sous la forme

$$f^i(X, x) = a^i = c^{te}.$$

§ 3. *Conditions d'intégrabilité des équations de structure. Equations aux différentielles totales auxquelles satisfont les composantes du tenseur de torsion.*

5. En faisant la dérivée extérieure des deux membres de (6) et en tenant compte que les dérivées extérieures de $(\Omega^i)', (\omega^i)'$ sont nulles, on a

$$(8)\qquad \sum_{j,k=1}^{n} [dA_{jk}^i \Omega_j \omega^k] + \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}^i [(\Omega^j)' \omega^k] - \sum_{j,k\ 1}^{n} A_{jk}^i [\Omega^i (\omega_k)'] = 0$$

Si nous remplaçons dans l'expression de dA^i_{jk} les dX^i, dx_i par leurs expressions en fonction de Ω^i, ω^i et que nous désignons par $\frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r}$, $\frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \omega^r}$ les coefficients de Ω^r, ω^r, nous obtenons de cette équation, en tenant compte encore de (6)

$$\sum_{j,k,r=1}^{n} \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r}[\Omega^r \Omega^j \Omega^k] + \sum_{j,k,r=1}^{n} \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \omega^r}[\Omega^j \omega^k \omega^r] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j,k,r,s=1}^{n} A^i_{jk} A^j_{rs}[\Omega^r \omega^s \omega^k] - \frac{1}{2}\sum_{j,k,r,s=1}^{n} A^i_{jk} A^k_{rs}[\Omega^j \Omega^r \Omega^s] = 0$$

ou encore, après certains changements d' indices

$$\sum_{j,k,r=1}^{n}\left(\frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} A^i_{js} A^s_{rk}\right)[\Omega^r \Omega^j \omega^k] + \sum_{j,k,r=1}^{n}\left(\frac{\partial A^i_{rj}}{\partial \omega^k} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} A^i_{js} A^s_{rk}\right)[\Omega^r \omega^j \omega^k] = 0$$

d'où nous tirons

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r} - \dfrac{\partial A^i_{rk}}{\partial \Omega^j} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\left(A^i_{js} A^s_{rk} - A^i_{rs} A^s_{jk}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial A^i_{rj}}{\partial \omega^k} - \dfrac{\partial A^i_{rk}}{\partial \omega^j} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\left(A^i_{js} A^s_{rk} - A^i_{ks} A^s_{rj}\right) = 0. \end{cases}$$

6. En ajoutant membre à membre à chacune de ces équations les deux autres équations qu'on obtient en permutant circulairement les indices j,k,r, on a (en tenant compte que $A^i_{jk} = -A^i_{kj}$)

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r} + \dfrac{\partial A^i_{kr}}{\partial \Omega^j} + \dfrac{\partial A^i_{rj}}{\partial \Omega^k} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\left(A^i_{js} A^s_{rk} + A^i_{ks} A^s_{jr} + A^i_{rs} A^s_{kj}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial A^i_{jk}}{\partial \omega^r} + \dfrac{\partial A^i_{kr}}{\partial \omega^j} + \dfrac{\partial A^i_{rj}}{\partial \omega^k} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\left(A^i_{js} A^s_{rk} + A^i_{ks} A^s_{jr} + A^i_{rs} A^s_{kj}\right) = 0. \end{cases}$$

En retranchant membre à membre de chacune de ces équations l'équation respective de (9) il résulte, après des changements d'indice

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r} = \dfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} A^i_{rs}\, A^s_{kj} \\ \dfrac{\partial A^i_{jk}}{\partial \omega^r} = \dfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} A^i_{rs}\, A^s_{kj}. \end{cases}$$

En tenant compte que

$$dA^i_{jk} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \Omega^r}\Omega^r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \omega^r}\omega^r,$$

ce système d'équations peut être écrit

$$(12)\qquad dA^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} A^i_{rs}\, A^s_{kj}(\Omega^r + \omega^r).$$

7. Le système d'équations (11) n'est autre que le système des équations (3), (4). Cela est évident à priori, les deux systèmes ayant été obtenus comme conditions d'intégrabilité des équations de structure. Mais il est facile de le vérifier directement. On n'a, pour cela, qu'à partir des relations (3) et (4) et y remplacer A^i_{jk/Ω^r} et A^i_{jk/ω^r} par leurs expressions résultant de la relation

$$(13)\qquad DA^i_{jk} = dA^i_{jk} + \sum_{r=1}^{n} \Pi^i_r A^r_{jk} - \sum_{r=1}^{n} \Pi^r_j A^i_{rk} -$$

$$- \sum_{r=1}^{n} \Pi^r_k A^i_{jr} = \sum_{r=1}^{n} A^i_{jk/\Omega^r}\Omega^r + \sum_{r=1}^{n} A^i_{jk/\omega^r}\omega^r,$$

où, par suite de (IV), Π^i_j a été remplacé par

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} A^s_{js}(\Omega^s + \omega^s)$$

puisque $H^i_j = \Pi^i_j + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} A^i_{js}(\Omega^s + \omega^s)$. Nous renonçons à effectuer ici les calculs dans tous les détails.

8. Faisons encore la remarque que, inversement, du système de relations (11), on peut déduire le système (9). Les calculs sont aisés pour vérifier cette remarque. Les systèmes (9) et (11) sont donc équivalents.

§ 4. *Conditions d'intégrabilité des équations (12). Premières conséquences qui s'en déduisent sur les coefficients* A^i_{jk}.

9. En calculant les covariants bilinéaires des deux membres de

l'équation (12), et en tenant compte que le covariant bilinéaire de dA^i_{jk} est nul, on a

$$\sum_{r,s=1}^{n} [dA^i_{rs} A^s_{kj} (\Omega^r + \omega^r)] + \sum_{r,s=1}^{n} [A^i_{rs}\, dA^s_{kj} (\Omega^r + \omega^r)] + \sum_{r,s=1}^{n} A^i_{ts} A^s_{kj} ((\Omega^r)' + (\omega^r)') = 0.$$

En remplaçant dans cette relation dA^i_{jk} par son expression tirée de (12) et $(\Omega^r)', (\omega^r)'$ par leurs expressions tirées de (6), on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s=1}^{n} A^i_{pq} A^q_{sr} A^s_{kj} [\Omega^p + \omega^p, \Omega^r + \omega^r] + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s=1}^{n} A^i_{rs} A^s_{pq} A^q_{jk} \times$$

$$\times [\Omega^p + \omega^p, \Omega^r + \omega^r] + \sum_{r,s,l,p=1}^{n} A^i_{rs} A^s_{kj} A^r_{pq} [\Omega^p \omega^q] = 0,$$

ou encore, après un changement des indices,

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q,s,r=1}^{n} (A^i_{pq} A^q_{sr} A^s_{kj} + A^i_{rk} A^q_{sp} A^s_{kj}) [\Omega^p + \omega^p, \Omega^r + \omega^r] +$$

$$+ \sum_{r,s,p,q=1}^{n} A^i_{rs} A^s_{kj} A^r_{pq} [\Omega^p \omega^q] = 0.$$

Le coefficient du produit extérieur $[\Omega^p + \omega^p, \Omega^r + \omega^r]$ dans cette expression étant symétrique dans les indices p, r, il suit que la première somme ci-dessus est nulle. On déduit donc

$$\sum_{r,s=1}^{n} A^i_{rs} A^r_{pq} A^s_{jk} = 0. \tag{14}$$

10. En désignant par L^i_{pqs} la quantité $\sum_{r=1}^{n} A^i_{rs} A^r_{pk}$, (14) devient

$$\sum_{s=1}^{n} L^i_{pqs} A^s_{jk} = 0. \tag{15}$$

Supposons qu'entre les relations (15) linéaires en A^s_{jk} il y ait $n-m$ indépendantes, que nous écrirons

$$\sum_{s=1}^{n} L^{\alpha}_{s} A^s_{jk} \qquad (\alpha = 1,2, \ldots, n-m) \tag{16}$$

et que les autres en soient des conséquences. Soient A^s_{σ}. $(\sigma = 1,2,\ldots,m)$ un système de m solutions indépendantes des équations linéaires

$$\sum_{s=1}^{n} L^{\alpha}_{s} A^s = 0. \qquad (\alpha = 1,2, \ldots, n-m). \tag{16'}$$

Toutes les autres solutions seront des combinaisons linéaires de celles-ci.

On aura donc

$$A_{jk}^{s} = \sum_{s=1}^{m} A_{\sigma}^{s} B_{jk}^{\sigma}. \tag{17}$$

Les équations (17) déterminent les B_{jk}^{σ} si les A_{σ}^{s} ont été choisis. Parmi ces équations, il y a, en effet, d'après ce qui a été dit plus haut, m indépendantes.

11. Remarquons qu'entre les quantités B_{jk}^{σ}, il ne peut y avoir de relations de la forme

$$\sum_{\sigma=1}^{m} M_{\sigma} B_{jk}^{\sigma} = 0$$

avec les coefficients M_{σ} non tous nuls. En effet, s'il y en avait p, soit

$$\sum_{\sigma=1}^{m} M_{\sigma}^{\nu} B_{jk}^{\sigma} = 0, \qquad (\nu = 1,2, \ldots, p)$$

on peut voir comme plus haut qu'on aurait

$$B_{jk}^{\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{m-p} B_{\varrho}^{\sigma} C_{jk}^{\varrho} \qquad (\sigma = 1,2, \ldots, m) \tag{18}$$

où B_{ϱ}^{σ} $(\sigma = 1,2, \ldots, m;\ \varrho = 1,2, \ldots, m-p)$ sont $m-p$ systèmes de solutions indépendants des équations linéaires

$$\sum_{\sigma=1}^{m} M_{\sigma}^{\nu} B^{\sigma} = 0 \qquad (\nu = 1,2, \ldots, p)$$

et où les C_{jk}^{ϱ} peuvent être déterminés des relations (18) si les B_{ϱ}^{σ} sont donnés.

De (17) et (18) on déduit

$$A_{jk}^{s} = \sum_{\varrho=1}^{m-p} N_{\varrho}^{s} C_{jk}^{\varrho}$$

avec $N_{\varrho}^{s} = \sum_{\sigma=1}^{m} A_{\sigma}^{s} B_{\varrho}^{\sigma}$. Mais entre les N_{ϱ}^{s} $(\varrho = 1,2, \ldots, m-p)$ il y a $n-m+p$ relations linéaires indépendantes, de la forme

$$\sum_{s=1}^{n} P_{s}^{\tau} N_{\varrho}^{s} = 0 \qquad (\tau = 1,2, \ldots, n-m+p).$$

Il résulte qu'il y en a autant entre les A_{jk}^{s}

$$\sum_{s=1}^{n} P_s^{\tau} A_{jk}^{s} = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que nous avons faite, qu'entre les A_{jk}^{s} il n'y a que $n-m$ relations linéaires.

12. Par suite de (17), les relations (14) deviennent

$$\sum_{r,s=1}^{n} \sum_{\sigma,\beta,\gamma=1}^{m} A_{\sigma}^{i} B_{rs}^{\sigma} A_{\beta}^{r} A_{\gamma}^{s} B_{pq}^{\beta} A_{jk}^{\gamma} = 0.$$

Vu que les A_{σ}^{i} forment un système indépendant et la remarque faite plus haut sur les B_{jk}^{σ}, il suit

$$\sum_{r,s=1}^{n} B_{rs}^{\sigma} A_{\beta}^{r} A_{\gamma}^{s} = 0. \tag{19}$$

§ 5. *Etude plus approfondie des quantités* A_{σ}^{i} *et* B_{jk}^{σ}.

13. Supposons qu'on ait résolu les équations (16') par rapport à $n-m$ des quantités A^{s}, soit, par exemple, par rapport à $A^{m+1}, A^{m+2}, \ldots, A^{n}$. En désignant les autres par R^{β} ($\beta = 1,2, \ldots, m$) on aura des relations de la forme

$$A^{s} = \sum_{\beta=1}^{m} U_{\beta}^{s} R^{\beta}$$

avec

$$U_{\beta}^{s} = 0 \quad \text{si} \quad \beta \neq s \ \text{et} \ \beta, s \leq m \tag{20}$$

et

$$U_{\beta}^{\beta} = 1 \qquad (\beta = 1,2, \ldots, m). \tag{20'}$$

Pour les A_{σ}^{s} ($\sigma = 1,2, \ldots, m$) qui satisfont, comme nous avons dit, aux relations (16'), on pourra donc écrire

$$A_{\sigma}^{s} = \sum_{\beta=1}^{n} U_{\beta}^{s} R_{\sigma}^{\beta} \tag{21}$$

avec (20) et (20'). Remarquons que le déterminant $|R_{\sigma}^{\beta}|$ est différent de zéro. Autrement il y aurait au moins une relation de la forme $\sum_{\sigma=1}^{m} R_{\sigma}^{\beta} P^{\sigma} = 0$ satisfaite quel que soit β. Par suite, on aurait de

(21) $\sum_{\sigma=1}^{m} A_\sigma^s P^\sigma = 0$ quel que soit s et le rang du tableau des A_σ^s serait plus petit que m. Il y aurait donc entre les A_σ^s donc entre les A_{jk}^s plus de $n-m$ relations de la forme (16), contrairement à l'hypothèse.

14. Nous allons démontrer que les quantités U_β^s sont constantes quels que soient les indices s et β, $(\beta \leq m)$.

Remplaçons à cet effet dans l'expression (17) de A_{jk}^i cette expression de A_σ^s:

$$A_{jk}^i = \sum_{\beta,\sigma=1}^{m} U_\beta^i R_\sigma^\beta B_{jk}^\sigma . \tag{17'}$$

Par suite de (17'), on obtient de (12)

$$\sum_{\beta,\sigma=1}^{m} dU_\beta^i R_\sigma^\beta B_{jk}^\sigma + \sum_{\beta,\sigma=1}^{m} U_\beta^i d(R_\sigma^\beta B_{jk}^\sigma) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{m} \sum_{\beta,r,\gamma,\tau=1}^{m} U_\beta^i R_\sigma^\beta B_{rs}^\sigma U_\gamma^s R_\tau^\gamma B_{kj}^\tau (\Omega^r + \omega^r) .$$

Si $i \leq m$ cette relation donne par suite de (20) et (20'), quel que soit $\beta \leq m$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} d(R_\sigma^\beta B_{jk}^\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} \sum_{\sigma,\gamma,\tau=1}^{m} R_\sigma^\beta B_{rs}^\sigma U_\gamma^s R_\tau^\gamma B_{kj}^\tau (\Omega^r + \omega^r)$$

et, par suite de cela, on a quel que soit j, k

$$\sum_{\beta,\sigma=1}^{n} dU_\beta^i R_\sigma^\beta B_{jk}^\sigma = 0$$

d'où, le déterminant des R_σ^β étant différent de zéro, en tenant compte de la remarque du no 11, on déduit

$$dU_\beta^i = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2, \ldots, n \\ \beta = 1,2, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{22}$$

ce qui prouve notre affirmation.

15. Considérons maintenant les quantités B_{jk}^σ et remplaçons chaque couple d'indices $j,k\,(j<k)$ par un seul indice N. On aura donc

$$(23) \qquad B^{\sigma}_{jk} = -B^{\sigma}_{kj} = B^{\sigma}_{N} \qquad (j<k)\left(N=1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}\right) \qquad (\sigma=1,2,\ldots,m)$$

Entre les quantités B^{σ}_{N} il y a $\frac{n(n-1)}{2} - m$ relations indépendantes, de la forme

$$\sum_{N=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} C^{N}_{H} B^{\sigma}_{N} = 0 \qquad \left(H=m+1, m+2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\right) \qquad (\sigma=1,2,\ldots,m).$$

On peut résoudre ces équations par rapport à $\frac{n(n-1)}{2} - m$ des quantités B^{σ}_{N} (σ quelconque mais considéré fixe), soit $B^{\sigma}_{m+1}, B^{\sigma}_{m+2}, \ldots . B^{\sigma}_{\frac{n(n-1)}{2}}$. En désignant par les autres S^{σ}_{τ} ($\tau = 1, 2, \ldots, m$), on aura les relations

$$(24) \qquad B^{\sigma}_{N} = \sum_{\tau=1}^{m} S^{\sigma}_{\tau} V^{\tau}_{N} \qquad (\sigma=1,2,\ldots,m) \qquad \left(N=1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

avec

$$(25) \qquad V^{\tau}_{N} = 0 \qquad \text{pour } N \leq m \qquad \text{et } N \neq \tau$$

et

$$(25') \qquad V^{\tau}_{\tau} = 1.$$

Le déterminant des quantités S^{σ}_{τ} est différent de zéro. Autrement il y aurait des relations de la forme $\sum_{\sigma=1}^{m} K_{\sigma} S^{\sigma}_{\tau}$ satisfaites pour toutes les valeurs de τ. Par suite, on déduirait de (24)

$$\sum_{\sigma=1}^{n} K_{\sigma} B^{\sigma}_{N} = 0$$

ce qui contredit la propriété établie au no. 11.

16. Les quantités V^{τ}_{N} sont constantes quels que soient les indices. Pour le démontrer, remplaçons l'expression (24) de B^{σ}_{N} dans (17)

après avoir remplacé l'indice N par le couple d'indices j, k $(j<k)$ (v. (23)), en faisant aussi la convention $V_{kj}^{\tau}=-V_{jk}^{\tau}$ et $V_{jj}^{\tau}=0$. On a

$$A_{jk}^{i}=\sum_{\sigma,\tau=1}^{n} A_{\sigma}^{i}S_{\tau}^{\sigma}V_{jk}^{\tau},$$

par suite de quoi on obtient de (12)

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{m} A_{\sigma}^{i}S_{\tau}^{\sigma}dV_{jk}^{\tau}+\sum_{\sigma,\tau=1}^{m} d\left(A_{\sigma}^{i}S_{\tau}^{\sigma}\right)V_{jk}^{\tau}= \tag{26}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r,s,=1}^{n}\sum_{\sigma,\tau,\beta,\gamma=1}^{m} A_{\gamma}^{i}S_{\tau}^{\gamma}V_{rs}^{\tau}A_{\beta}^{s}S_{\tau}^{\beta}V_{kj}^{\tau}(\Omega^{r}+\omega^{r}).$$

Si le couple de valeurs j, k correspond à une valeur $N\leq m$, cette relation donne, par suite de (25) et (25') quel que soit i

$$\sum_{\sigma=1}^{n} d\left(A_{\sigma}^{i}S_{\tau}^{\sigma}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}\sum_{\sigma,\beta,\gamma=1}^{m} A_{\gamma}^{i}S_{\tau}^{\gamma}V_{rs}^{\tau}A_{\beta}^{s}S_{\tau}^{\beta}(\Omega^{r}+\omega^{r})$$

et par suite on a de (26) quels que soient j, k

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{m} A_{\sigma}^{i}S_{\tau}^{\sigma}dV_{jk}^{\tau}=0$$

d'où on déduit par suite de l'indépendance des quantités A_{σ}^{i} et S_{τ}^{σ}

$$dV_{jk}^{\tau}=0,$$

ce qui prouve notre affirmation.

§ 6. *Transformation des équations* (12) *et de leurs conditions d'intégrabilité.*

17. Par suite des considérations du paragraphe précédent A_{jk}^{i} aura l'expression

$$A_{jk}^{i}=\sum_{\beta,\gamma,\tau=1}^{m} U_{\beta}^{i}R_{\sigma}^{\beta}S_{\tau}^{\sigma}V_{jk}^{\tau} \tag{27}$$

où U_{β}^{i} et V_{jk}^{τ} sont constants. En posant

$$K_{\tau}^{\beta}=\sum_{\sigma=1}^{m} R_{\sigma}^{\beta}S_{\tau}^{\sigma} \tag{28}$$

on aura pour A_{jk}^{i}

$$A^i_{jk} = \sum_{\beta,\tau=1}^{m} U^i_\beta K^\beta_\tau V^\tau_{jk}. \tag{29}$$

En remplaçant cette expression dans (12) on obtient

$$\sum_{\beta,\tau=1}^{m} U^i_\beta dK^\beta_\tau V^\tau_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} \sum_{\beta,\gamma,\delta,\tau=1}^{m} U^i_\beta K^\beta_\gamma V^\gamma_{sr} U^s_\delta K^\delta_\tau V^\tau_{jk} (\Omega^r + \omega^r)$$

d'où il suit, en tenant compte des propriétés des constantes U^i_β et V^τ_{jk}

$$dK^\beta_\tau = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} \sum_{\gamma,\delta=1}^{m} K^\beta_\gamma V^\gamma_{sr} U^s_\delta K^\delta_\tau (\Omega^r + \omega^r). \tag{30}$$

18. Les conditions d'intégrabilité de ce système peuvent être obtenues directement mais on peut les obtenir en remplaçant A^i_{jk} dans (14) par son expression (29). On obtient

$$\sum_{r,s=1}^{n} \sum_{\beta,\lambda,\gamma,\delta,\sigma,\tau=1}^{m} U^i_\beta K^\beta_\gamma V^\lambda_{rs} U^r_\gamma K^\gamma_\delta V^\delta_{pq} U^s_\sigma K^\sigma_\tau U^\tau_{jk} = 0,$$

d'où il suit

$$\sum_{r,s=1}^{n} V^\sigma_{rs} U^r_\beta U^s_\gamma = 0 \qquad (\sigma,\beta,\gamma = 1, 2, \ldots, m). \tag{31}$$

§ 7. *Transformation du repère. Nouvelle forme des équations de structure. Conséquences sur les formes Ω^i et ω^i. Nouvelle forme des équations* (30) *et de leurs conditions d'intégrabilité. Intégrale générale de ces equations.*

19. Effectuons en chaque point de l'espace une transformation du repère, la même pour tous les points. Cela se traduit par une transformation linéaire à coefficients constants effectuée sur les Ω^i et ω^i. Les composantes H^i_j de la connexion affine restent nulles après une telle transformation. Soit maintenant

$$\left|\begin{array}{ll}
\overline{\Omega}^\sigma = \Omega^\sigma & \\
\overline{\Omega}^a = \sum_{r=1}^{n} (\delta^a_r - \sum_{\beta=1}^{m} U^a_\beta \delta^\beta_r) \Omega^r & \\
\overline{\omega}^\sigma = \omega^\sigma & (\sigma = 1, 2, \ldots, m) \\
\overline{\omega}^a = \sum_{r=1}^{n} (\delta^a_r - \sum_{\beta=1}^{m} U^a_\beta \delta^\beta_r) \omega^r & (a = m+1, \ldots, n)
\end{array}\right. \tag{32}$$

$$\left(\delta^i_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}\right)$$

la transformation effectuée. Par suite les équations de structure (6) donnent pour $i = a > m$

$$(\overline{\Omega}^a)' = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_r^a - \sum_{\beta=1}^{m} U_\beta^a \delta_r^\beta) A_{jk}^r [\Omega^j \omega^k]$$

$$(\overline{\omega}^a)' = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_r^a - \sum_{\beta=1}^{m} U_\beta^a \delta_r^\beta) A_{jk}^r [\Omega^j \omega^k]$$

d'où

$$(33) \quad \begin{cases} (\overline{\Omega}^a)' = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (A_{jk}^a - \sum_{\beta=1}^{m} U_\beta^a A_{jk}^\beta) [\Omega^j \omega^k] \\ (\overline{\omega}^a)' = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (A_{jk}^a - \sum_{\beta=1}^{m} U_\beta^a A_{jk}^\beta) [\Omega^j \omega^k] . \end{cases}$$

Rappelons-nous que

$$A_{jk}^i = \sum_{\beta,\gamma=1}^{m} U_\beta^i R_\gamma^\beta B_{jk}^\gamma$$

et que $R_\gamma^\beta = A_\beta^i$ pour $i = \beta \leq m$. Il suit

$$A_{jk}^i = \sum_{\beta,\gamma=1}^{m} U_\beta^i A_\gamma^\beta B_{jk}^\gamma$$

donc

$$(34) \quad A_{jk}^i = \sum_{\beta=1}^{m} U_\beta^i A_{jk}^\beta .$$

Par suite de cette relation, on déduit de (33)

$$\begin{aligned} (\overline{\Omega}^a)' &= 0 \\ (\overline{\omega}^a)' &= 0 \end{aligned} \qquad (a = m+1, m+2, \ldots, n)$$

Les formes $\overline{\Omega}^a$ et $\overline{\omega}^a$ sont donc des différentielles exactes, $\overline{\Omega}^a$ de fonctions de X^i et $\overline{\omega}^a$ de fonctions de x^i :

$$\overline{\Omega}^a = dF^a(X^1, \ldots, X^n)$$
$$\overline{\omega}^a = df^a(x^1, \ldots, x^n) .$$

En prenant les fonctions F^a, f^a comme nouvelles variables indépendantes X^a, x^a, on pourra écrire en supprimant les bares

$$(33) \quad \begin{aligned} \Omega^a &= dX^a \\ \omega^a &= dx^a . \end{aligned}$$

20. Si toutes ces opérations ont été faites, on aura

$$A^a_{jk} = 0 \qquad \begin{matrix}(a = m+1, \ldots, n)\\ (j,k = 1, 2, \ldots, n)\end{matrix} \tag{36}$$

et il résulte de (27)

$$U^a_\sigma = 0 \qquad \begin{matrix}(\alpha = m+1, \ldots, n)\\ (\sigma = 1, 2, \ldots, m)\end{matrix} \tag{36'}$$

Donc (31) devient

$$\sum_{\varrho,\tau=1}^{m} V^\sigma_{\varrho\tau} U^\varrho_\beta U^\tau_\gamma = 0 \quad (\sigma,\beta,\gamma = 1,2, \ldots, m)$$

et en tenant compte de (20) et (20'), on a

$$V^\sigma_{\varrho\tau} = 0. \tag{37}$$

Par suite de (20), (20'), (36'), et (37), l'équation (30) devient

$$dK^\beta_\tau = \frac{1}{2} \sum_{\gamma,\sigma=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{m} K^\beta_\gamma V^\gamma_{\sigma a} K^\sigma_\tau (\Omega^a + \omega^a). \tag{38}$$

21. De cette dernière équation, on voit que dK^β_τ ne dépend pas de $\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^m$ ni de $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m$. Et puisqu'on a (35), il suit que K^β_τ ne dépend que des variables $\mathcal{X}^a$ et x^a $(a = m+1, \ldots, n)$. Plus précisément, K^β_τ dépend de ces variables par l'intermédiaire des combinaisons $\mathcal{X}^a + x^a$:

$$K^\beta_\tau = K^\beta_\tau (\mathcal{X}^a + x^a) \qquad \begin{matrix}(\beta,\tau = 1, 2, \ldots, m)\\ (a = m+1, \ldots, n).\end{matrix} \tag{39}$$

22. On peut intégrer le système d'équations (38). A cet effet considérons les quantités réciproques des K^β_τ, soit L^σ_β. On a

$$\sum_{\beta=1}^{m} L^\sigma_\beta K^\beta_\tau = \delta^\sigma_\tau. \tag{40}$$

On déduit d'ici

$$\sum_{\beta=1}^{m} dL^\sigma_\beta K^\beta_\tau = - \sum_{\beta=1}^{m} L^\sigma_\beta dK^\beta_\tau. \tag{41}$$

De (38) on déduit en multipliant les deux membres par L^σ_β, en sommant par rapport à β et en tenant compte de (41)

$$\sum_{\beta=1}^{m} dL_\beta^\sigma K_\iota^\beta = -\frac{1}{2} \sum_{a=m+1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} V_{\beta a}^\sigma K_\iota^\beta (\omega^a + \omega^a).$$

d'où

$$dL_\beta^\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{a=m+1}^{n} V_{\beta a}^\sigma (\Omega^a + \omega^a).$$

Les $V_{\beta a}^\sigma$ étant constants, on obtient en intégrant cette équation

$$L_\beta^\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{a=m+1}^{n} V_{\beta a}^\sigma (X^a + x^a) + C_\beta^\sigma \tag{42}$$

C_β^σ étant des constantes arbitraires.

Les L_β^σ étant connus, on obtient les K_β^σ par des calculs élémentaires.

23. Par suite de (29), (20), (20'), (36), (36') et (37), les équations de structure (6) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l}
(\Omega^\sigma)' = -\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{m} K_\beta^\sigma \left\{ \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} V_{\gamma a}^\beta [\Omega^\gamma \omega^a] + \right. \\
\left. + \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} V_{a\gamma}^\beta [\Omega^a \omega^\gamma] + \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\beta [\Omega^a \omega^b] \right\} \\
(\Omega^a)' = 0 \\
(\omega^\sigma)' = -\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{m} K_\beta^\sigma \left\{ \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{m} V_{\gamma a}^\beta [\Omega^\gamma \omega^a] + \right. \\
\left. + \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} V_{a\beta}^\beta [\Omega^a \omega^\gamma] + \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\beta [\Omega^a \Omega^b] \right\} \\
(\omega^a)' = 0 \qquad (\sigma = 1,2,\ldots,m) \qquad (a = m+1,\ldots,n).
\end{array}\right. \tag{43}$$

§ 8. *Expression des formes Ω^i et ω^i. Equations finies des transformations de variables.*

24. Posons

$$\left\{\begin{array}{l}
\Omega^i = \sum_{j=1}^{n} M_j^i \, dX^j \\
\omega^i = \sum_{j=1}^{n} m_j^i \, dx^j .
\end{array}\right. \tag{44}$$

D'après (43) on a $(\Omega^i - \omega^i)' = 0$; donc $\Omega^i - \omega^i$ sont des diférentielles exactes. On pourra donc poser

$$(45)\qquad \begin{cases} M_j^i = \dfrac{\partial M^i}{\partial X^j} \\ m_j^i = -\dfrac{\partial M^i}{\partial x^j} \end{cases}$$

Par suite de (35) on aura

$$(46)\qquad M^a = X^a - x^a + C^a \qquad (a = m+1, \ldots, n)$$

C^a étant des constantes.

25. Si nous posons

$$(47)\qquad \begin{cases} dX^i = \sum_{j=1}^{n} N_j^i \, \Omega^j \\ dx^i = \sum_{j=1}^{n} n_j^i \, \omega^j , \end{cases}$$

on aura

$$(48)\qquad \sum_{k=1}^{n} N_k^i M_j^k = \delta_j^i \ , \ \sum_{k=1}^{n} n_k^i m_j^k = \delta_j^i$$

et

$$(48')\qquad \sum_{k=1}^{n} M_k^i N_j^k = \delta_j^i \ , \ \sum_{k=1}^{n} m_k^i n_j^k = \delta_j^i$$

et par suite de (46) et (45), puisque

$$M_i^a = m_i^a = \delta_i^a \qquad (\text{pour } a > m),$$

il résulte

$$(48'')\qquad \begin{cases} (a) \qquad N_i^a = n_i^a = \delta_i^a \\ (b) \quad \sum_{\gamma=1}^{m} M_\gamma^\sigma N_\tau^\gamma = \delta_\tau^\sigma \ , \ \sum_{\gamma=1}^{m} m_\gamma^\sigma n_\tau^\gamma = \delta_\tau^\sigma , \\ (c) \quad \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma^\sigma M_\tau^\gamma = \delta_\tau^\sigma \ , \ \sum_{\gamma=1}^{m} n_\gamma^\sigma m_\tau^\gamma = \delta_\tau^\sigma , \\ (d) \quad \sum_{\gamma=1}^{m} M_\gamma^\sigma N_a^\gamma + M_a^\sigma = 0 , \ \sum_{\gamma=1}^{m} m_\gamma^\sigma n_a^\gamma + m_a^\sigma = 0 , \\ (e) \quad \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma^\sigma M_a^\gamma + N_a^\sigma = 0 , \ \sum_{\gamma=1}^{m} n_\gamma^\sigma m_a^\gamma + n_a^\sigma = 0 . \end{cases}$$

26. De (44) on déduit, en prenant les covariants bilinéaires,

$$(\Omega^\sigma)' = \sum_{j=1}^{n} [dM_j^\sigma \, dX^j]$$

$$(\omega^\sigma)' = \sum_{j=1}^{n} [dm_j^\sigma \, dx^j]$$

et par suite de (47)

$$(49) \quad \begin{cases} (\Omega^\sigma)' = \sum\limits_{i,j=1}^{n} [dM_i^\sigma N_j^i \Omega^j] \\ (\omega^\sigma)' = \sum\limits_{i,j=1}^{n} [dm_i^\sigma n_j^i \omega^j], \end{cases}$$

ce qu'on peut encore écrire en tenant compte de (48'')

$$(50) \quad \begin{cases} (\Omega^\sigma)' = \sum\limits_{\gamma,\beta=1}^{m} [dM_\gamma^\sigma N_\beta^\gamma \Omega^\beta] + \sum\limits_{a=m+1}^{n} [dM_a^\sigma \Omega^a] + \\ \qquad + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} \sum\limits_{a=m+1}^{n} [dM_\gamma^\sigma N_a^\gamma \Omega^a] \\ (\omega^\sigma)' = \sum\limits_{\gamma,\beta=1}^{m} [dm_\gamma^\sigma n_\beta^\gamma \omega^\beta] + \sum\limits_{a=m+1}^{n} [dm_a^\sigma \omega^a] + \\ \qquad + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} \sum\limits_{a=m+1}^{n} [dm_\gamma^\sigma n_a^\gamma \omega^a]. \end{cases}$$

En comparant ces équations avec (43), il résulte

$$(51) \quad \begin{cases} \sum\limits_{\gamma=1}^{m} dM_\gamma^\sigma N_\beta^\gamma = \frac{1}{2} \sum\limits_{\gamma=1}^{m} \sum\limits_{a=m+1}^{n} K_\gamma^\sigma V_{\beta a}^\gamma \omega^a \qquad (\text{mod } \Omega^i) \\ dM_a^\sigma + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} dM_\gamma^\sigma N_a^\gamma = \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta,\gamma=1}^{m} K_\beta^\sigma V_{a\gamma}^\beta \omega^\gamma + \\ \qquad + \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta=1}^{m} \sum\limits_{\beta=m+1}^{n} K_\beta^\sigma V_{ab}^\beta \omega^b \qquad (\text{mod } \Omega^i) \\ \sum\limits_{\gamma=1}^{m} dm_\gamma^\sigma n_\beta^\gamma = \frac{1}{2} \sum\limits_{\gamma=1}^{n} \sum\limits_{a=m+1}^{n} K_\gamma^\sigma V_{\beta a}^\gamma \Omega^a \qquad (\text{mod } \Omega^i) \\ dm_a^\sigma + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} dm_\gamma^\sigma n_a^\gamma = \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta,\gamma=1}^{m} K_\beta^\sigma V_{a\gamma}^\beta \Omega^\gamma + \\ \qquad + \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta=1}^{m} \sum\limits_{\beta=m+1}^{n} K_\beta^\sigma V_{ab}^\beta \Omega^b \qquad (\text{mod } \omega^i). \end{cases}$$

De la première et de la troiscème de ces relations, en utilisant (*c*) de (48) on tire les expressions de dM_γ^σ et de dm_γ^σ

$$(52)\quad \begin{cases} dM_\gamma^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\beta=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{\beta a}^\tau M_\gamma^\beta \omega^a & (\text{mod } \Omega^i) \\ dm_\gamma^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\beta=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{\beta a}^\tau m_\gamma^\beta \Omega^a & (\text{mod } \omega^i) \end{cases}$$

En remplaçant ces expressions dans la deuxième des relations (51) et en utilisant (*d*) de (48″), on a

$$(53)\quad \begin{cases} dM_a^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\gamma=1}^{m} K_\tau^\sigma V_{a\gamma}^\tau \omega^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{ab}^\tau \omega^b + \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau,\gamma=1}^{m} \sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{\gamma\beta}^\tau M_a^\gamma \omega^b & (\text{mod } \Omega^i) \\ dm_a^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\gamma=1}^{m} K_\tau^\sigma V_{a\gamma}^\tau \Omega^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{ab}^\tau \Omega^b + \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau,\gamma=1}^{m} \sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{\gamma b}^\tau m^\gamma \Omega^b & (\text{mod } \omega^i). \end{cases}$$

27. Pour intégrer le système d'équations (52), (53), observons d'abord que M_γ^σ et m_γ^σ satisfont respectivement aux systèmes d'équations aux différentielles totales

$$(54)\quad dZ^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\beta=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{\beta a}^\tau Z^\beta \omega^a \qquad (\text{mod } \Omega^i)$$

$$(55)\quad dZ^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\beta=1}^{m} \sum_{a=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{\beta a}^\tau Z^\beta \Omega^a \qquad (\text{mod } \omega^i).$$

Or, d'après (38), tous les K_τ^σ satisfont aux mêmes systèmes d'équations aux différentielles totales. Ce sont des systèmes linéaires et homogènes. Leurs intégrales générales sont donc respectivement

$$(54')\quad Z^\sigma = \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \Phi^\tau(X^i)$$

et

$$(55')\quad Z^\sigma = \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \varphi^\tau(x^i)$$

$\Phi^\tau(\mathcal{X}^i)$ et $\varphi^\tau(x^i)$ étant des fonctions arbitraires des variables $\mathcal{X}^i$ resp. x^i
On aura donc

$$(56)\qquad \begin{cases} M_\gamma^\sigma = \sum\limits_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \Omega_\gamma^\tau(\mathcal{X}^i) \\ m_\gamma^\sigma = \sum\limits_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \varphi_\gamma^\tau(x^i), \end{cases}$$

où Φ_γ^τ et φ_γ^τ sont des systèmes de fonctions des variables $\mathcal{X}^i$ resp. x^i soumis à la seule condition d'être indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas des relations de la forme

$$\sum_{\tau=1}^{m} L_\tau \Phi_\gamma^\tau = 0, \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\tau=1}^{m} l_\tau \varphi_\gamma^\tau = 0$$

avec des coefficients L_τ, l_τ non tous nuls.

28. Pour connaître les quantités M_a^σ et m_a^σ, il faut intégrer les systèmes aux différentielles totales (53). A cet effet, faisons dans ce système les substitutions

$$(57)\qquad \begin{cases} M_a^\sigma = \sum\limits_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma P_a^\tau \\ m_a^\sigma = \sum\limits_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma p_a^\tau. \end{cases}$$

On obtient alors, vu (38) les systèmes

$$\sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma dP_a^\tau = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\gamma=1}^{m} K_\tau^\sigma V_{a\gamma}^\tau \omega^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{ab}^\tau \omega^b \qquad (\text{mod } \Omega^i)$$

$$\sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma dp_a^\tau = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\gamma=1}^{m} K_\tau^\sigma V_{a\gamma}^\tau \Omega^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{ab}^\tau \Omega^b \qquad (\text{mod } \omega^i)$$

qu'on peut encore écrire

$$dP_a^\tau = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{m} V_{a\gamma}^\tau \omega^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau \omega^b \qquad (\text{mod } \Omega^i)$$

$$dp_a^\tau = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{m} V_{a\gamma}^\tau \Omega^\gamma + \frac{1}{2} \sum_{b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau \Omega^b \qquad (\text{mod } \omega^i).$$

En tenant compte de (44) et (45) ces systèmes s'écrivent

$$dp_a^\tau = -\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{m} V_{a\gamma}^\tau\, dM^\gamma + \frac{1}{2}\sum_{b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau dx^b \qquad (\mathrm{mod}\ \Omega^i)$$

$$dp_a^\tau = \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{m} V_{a\gamma}^\tau\, dM^\gamma + \frac{1}{2}\sum_{b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau\, d\mathcal{X}^b \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^i)$$

d'où on déduit

$$p_a^\tau = -\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{m} V_{a\gamma}^\tau M^\gamma + \frac{1}{2}\sum_{b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau x^b + \Psi_a^\tau(\mathcal{X}^i)$$

$$p_a^\tau = \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{m} V_{a\gamma}^\tau M^\gamma + \frac{1}{2}\sum_{b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau \mathcal{X}^b + \psi_a^\tau(x^i)$$

et par suite

$$(58)\quad \begin{cases} M_a^\sigma = -\frac{1}{2}\sum_{\tau,\gamma=1}^{m} K_\tau^\sigma V_{a\gamma}^\tau M^\gamma + \frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{m}\sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{ab}^\tau x^b + \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \Psi_a^\tau(\mathcal{X}^i) \\ m_a^\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\tau,\gamma=1}^{m} K_\tau^\sigma V_{a\gamma}^\tau M^\gamma + \frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{m}\sum_{b=m+1}^{n} K_\tau^\sigma V_{ab}^\tau \mathcal{X}^b + \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \psi_a^\tau(x^i), \end{cases}$$

où Ψ_a^τ, ψ_a^τ sont des fonctions arbitraires, respectivement des $\mathcal{X}^i$ et des x^i.

29. En tenant compte de (45), on a

$$dM^\sigma = \sum_{\gamma=1}^{m} M_\gamma^\sigma\, d\mathcal{X}^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} M_a^\sigma d\mathcal{X}^a - \sum_{\gamma=1}^{m} m_\gamma^\sigma dx^\gamma - \sum_{a=m+1}^{n} m_a^\sigma dx^a$$

et par suite de (56) et (58)

$$dM^\sigma = \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \Bigg\{ \sum_{\gamma=1}^{m} \Phi_\gamma^\tau\, d\mathcal{X}^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} \Psi_a^\tau\, d\mathcal{X}^a - \sum_{\gamma=1}^{m} \varphi_\gamma^\sigma\, dx^\gamma -$$

$$- \sum_{a=m+1}^{m} \psi_a^\tau dx^a - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{a=m+1}^{n} V_{a\gamma}^\tau M^\gamma\, d\mathcal{X}^a + \frac{1}{2}\sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau x^b\, d\mathcal{X}^a -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{a=m+1}^{n} V_{a\gamma}^\tau M^\gamma dx^a - \frac{1}{2}\sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau \mathcal{X}^b dx^a \Bigg\}.$$

En faisant dans ce système la substitution

$$(59)\qquad M^\sigma = \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma S^\tau$$

il résulte en tenant compte de (38) que les S^τ doivent satisfaire au système d'équations

$$dS^\tau = \sum_{\gamma=1}^{m} \Phi_\gamma^\tau \, dX^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} \Psi_a^\tau dX^a - \sum_{\gamma=1}^{m} \varphi_\gamma^\tau dx^\gamma - \sum_{a=m-1}^{n} \psi_a^\tau dx^a +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau x^b \, dX^a - \frac{1}{2} \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau X^b \, dx^a .$$

30. On voit immédiatement que les expressions

$$\sum_{\gamma=1}^{m} \Phi_\gamma^\tau \, dX^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} \Psi_a^\tau \, dX^a$$

et

$$\sum_{\gamma=1}^{m} \varphi_\gamma^\tau \, dx^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} \psi_a^\tau \, dx^a$$

doivent être des différentielles exactes, soit

$$dU^\tau(X) = \sum_{\gamma=1}^{m} \Phi_\gamma^\tau \, dX^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} \Psi_a^\tau \, dX^a$$

et

$$dV^\tau(x) = \sum_{\gamma=1}^{m} \varphi_\gamma^\tau dx^\gamma + \sum_{a=m+1}^{n} \psi_a^\tau dx^a .$$

Par suite de quoi, on aura

$$S^\tau = U^\tau(X) - V^\tau(x) + \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau x^b X^a$$

donc, par suite de (59)

$$(60) \qquad M^\sigma = \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \left\{ U^\tau(X) - V^\tau(x) + \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau x^b X^a \right\}.$$

31. Les M^σ étant connus, on connaît aussi Ω^i, ω^i par suite de (44), (45) et (46).

Les équations finies des transformations de variables seront obtenues en égalant à des constantes les fonctions M^σ et M^a :

$$(61) \qquad \begin{cases} \sum_{\tau=1}^{m} K_\tau^\sigma \left\{ U^\tau(X) - V^\tau(x) + \sum_{a,b=m+1}^{n} V_{ab}^\tau x^b X^a \right\} = a^\sigma \\ X^a - x^a = a^a \end{cases}$$

a^σ, a^a sont les paramètres de la famille de transformations.

Ces équations peuvent être écrites par suite de (40)

$$(61') \quad \begin{cases} U^\tau(X) - V^\tau(x) + \sum_{a,b=m+1}^{n} V^\tau_{ab} x^b X^a - \sum_{\gamma=1}^{m} L^\tau_\gamma a^\gamma = C. \\ X^a - x^a = a^a. \end{cases}$$

En résumé, on voit que *tes familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de IIIe espèce A nulle, peuvent être amenées à avoir les équations* (61'). Dans celles-ci $U^\tau(X)$ et $V^\tau(x)$ sont des fonctions arbitraires de X^i resp. x^i assujetties à la seule condition de pouvoir être résolues par rapport à $X^\sigma (\sigma = 1, .. m)$ resp x^σ. $V^\tau_{ab} = - V^\tau_{ba}$ sont des constantes données arbitrairement. L^τ_γ sont données par (42) où $V^\tau_{\gamma a} = - V^\tau_{a\gamma}$ et C^τ_γ sont des constantes arbitraires a^σ, a^a sont les paramètres de la famille de transformations.

On peut d'ailleurs faire une transformation des variables X, x de manière que $U^\tau = \bar{X}^\tau$ et $V^\tau = \bar{x}^\tau$, les X^a et x^a restant les mêmes. Les équations (61') deviennent en supprimant les bares de X et x

$$(61'') \quad \begin{cases} X^\tau - x^\tau + \sum_{a,b=m+1}^{n} V^\tau_{ab} x^b X^a - \sum_{\gamma=1}^{m} L^\tau_\gamma a^\gamma = 0 \\ X^a - x^a = a^a. \end{cases}$$

§ 9. *Composantes des tenseurs de torsion et de courbure de l'espace S.*

33. On a

$$(36) \qquad A^a_{jk} = 0 \qquad (a = m+1, m+2, \ldots, n)$$

D'après (29),

$$(29') \qquad A^\sigma_{jk} = \sum_{\tau=1}^{n} K^\sigma_\tau V^\tau_{jk} \quad (\sigma = 1,2, \ldots, m)$$

On déduit d'ici, par suite de (37)

$$(62) \qquad A^\sigma_{\tau\beta} = 0 \qquad (\sigma, \tau, \beta = 1,2, \ldots, m)$$

34. Pour avoir l'expression de R^i_{jsr}, nous nous reportons à (1'). On voit tout de suite que par suite de (36)

$$(63) \qquad R^a_{jsr} = 0 \quad =$$

Si l'indice supérieur est inférieur à $m+1$, on a

$$R^{\sigma}_{jsr} = -\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{m} A^{\sigma}_{\tau j} A^{\tau}_{sr} \tag{64}$$

et par suite de (36) et de (62) on a

$$R^{\sigma}_{j\beta\gamma} = 0 \tag{65}$$

$$R^{\sigma}_{\beta sr} = 0. \qquad (\sigma,\beta,\gamma = 1,\ldots,m) \tag{66}$$

Pour les autres composantes du tenseur de courbure, on a

$$-R^{\sigma}_{a\gamma b} = R^{\sigma}_{ab\gamma} = -\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{m} A^{\sigma}_{\tau a} A^{\tau}_{b\gamma} = -\frac{1}{2}\sum_{\beta,\tau,\lambda=1}^{m} K^{\sigma}_{\beta} V^{\beta}_{\tau a} K^{\tau}_{\lambda} V^{\lambda}_{b\gamma} \tag{67}$$

$$R^{\sigma}_{abc} = -\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{m} A^{\sigma}_{\tau a} A^{\tau}_{bc} = -\frac{1}{2}\sum_{\beta,\tau,\lambda=1}^{m} K^{\sigma}_{\beta} V^{\beta}_{\tau a} K^{\tau}_{\lambda} V^{\lambda}_{bc}. \tag{68}$$

§ 10. *Espaces à courbure de III-e espèce B ou C nulle.*

35. Pour avoir les équations des familles de transformations des X^i dans les x^i à courbure de III-e espèce B nulle, il suffit d'échanger dans (61') les variables x^i avec les paramètres a^i.

En effet, après ce changement, considérons les transformations des X^i dans les a^i et les x^i comme paramètres et construisons la connexion affine de III-e espèce A pour cette transformation. Elle sera à courbure nulle. Mais nous avons établi que cette connexion affine coïncide avec la connexion affine de III-e espèce B pour les transformations des X^i dans les x^i si on remplace les a^i par X^i, x^i à l'aide de (I) et ω^i par $\Omega^i - \omega^i$ par suite de (V). Ce qui démontre notre propriété.

On établit de la même manière qu'on obtient les équations des transformations des X^i dans les x^i à courbure de III-e espèce C nulle en échangeant dans (61') les X^i avec les a^i.

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1946).

SUR LES COURBES CONCURRENTES DANS LA GÉOMÉTRIE CENTRO-AFFINE

par

CONST. BORȘ

MM. les professeurs O. Mayer et Alex. Myller ont introduit [1]) comme „distance" entre deux points $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$ le déterminant :

$$(a\,b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

et corrélativement, pour l'angle de droites le déterminant :

$$(\alpha\,\beta) = \frac{1}{(a,c)} = \frac{1}{(c,b)}$$

où : $c = \alpha\,\beta$ et a et b sont les points d'intersection des droites α et β respectivement avec les parallèles menés par O à β et α.

La distance entre deux points et l'angle de deux droites ainsi définies, sont des invariants de la Géométrie centro-affine unimodulaire hyperbolique.

1. Les notions de ci-dessus conduisent à la généralisation naturelle des courbes parallèles [2]).

On appelle des courbes parallèles, deux courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$ si l'on peut établir entre elles une correspondance de telle manière, que la distance entre deux points homologues $M(x_1, x_2)$ et $\bar{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ soit constante et les tangentes à ces points soient parallèles, c'est à dire une correspondance définie par les conditions :

$$(x\,\bar{x}) = a \quad ; \qquad (\xi\,\bar{\xi}) = 0.$$

En généralisant, j'appelle des courbes concurrentes, deux courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$ si entre elles l'on peut établir une correspondance de telle manière que les distances entre deux points homologues et l'angle des tangents à ces points soient constants, c'est à dire :

$$(1) \qquad (x, \bar{x}) = a$$

$$(2) \qquad (\xi, \bar{\xi}) = b$$

(a, b constantes).

Les courbes parallèles peuvent être obtenues dans le cas particulier $b = 0$.

Soit :

$$x_i = x_i(\sigma)$$

$$\text{et :} \qquad \bar{x}_i = \bar{x}_i(\bar{\sigma})$$

$$(i = 1,2)$$

les équations paramètriques des courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$ rapportées aux longueurs centro-affines unimodulaires; σ et $\bar{\sigma}$ des arcs des courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$. Ce choix du paramètre entraîne les formules fondamentales de la Géométrie différentielle centro-affine unimodulaire [3] :

$$(3) \qquad (x\,x') = 1$$

$$(3') \qquad (x'\,x'') = K$$

$$(3'') \qquad x'' + K\,x = 0$$

$$\left(x' = \frac{dx}{d\sigma}\right)$$

où K est la courbure centro-affine unimodulaire, définie par :

$$(4) \qquad K = \frac{dT}{d\sigma}$$

et $dT = (\xi, d\xi)$ est l'angle de contingence élémentaire et $d\sigma = (x\,dx)$ est l'élément d'arc dans la Géométrie centro-affine unimodulaire.

Les coordonnées des tangentes aux points M et $\bar{M}$ aux courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$ sont :

$$\xi_1 = x'_2 \qquad \bar{\xi}_1 = \dot{\bar{x}}_2$$

$$\xi_2 = -x'_1 \qquad \bar{\xi}_2 = -\dot{\bar{x}}_1$$

$$\left(\text{avec la notation } \dot{\bar{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\sigma}}\right).$$

La condition (2) peut donc être écrite sons la forme

$$(2') \qquad (x'\,\dot{\bar{x}}) = (x'\,\bar{x}')\frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} = b, \qquad \left(\bar{x}' = \frac{d\bar{x}}{d\sigma}\right).$$

Les équations paramétriques de la courbe $(\bar{\gamma})$ concurrente à la courbe (γ), sont :

$$\bar{x} = ax' + \varphi(\sigma)x \tag{5}$$

comme il résulte de la condition (1) et de la formule fondamentale (3), la fonction φ devant être déterminée par la condition (2'). En dérivant (5) par rapport à σ et en utilisant (3''), nous avons :

$$\bar{x}' = \varphi x' + (\varphi' - aK)x \tag{5'}$$

$$\bar{x}'' = (2\varphi' - aK)x' + (\varphi'' - K\varphi - aK')x. \tag{5''}$$

D'après les formules (3) et (3') relativement à la courbe $(\bar{\gamma})$, il en résulte :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = (\bar{x}\,\bar{x}') \tag{6}$$

et :

$$\bar{K} = (\bar{x}'\,\bar{x}'')\left(\frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}}\right)^3; \tag{6'}$$

en comparant à (2) l'on déduit :

$$(x', \bar{x}') = b(\bar{x}, \bar{x}')$$

et en calculant avec (5) et (5'), il s'en suit que la fonction φ est la solution de l'équation Riccati :

$$\varphi' + \frac{b}{1-ab}\varphi^2 - aK = 0. \tag{7}$$

En connaissant donc une courbe particulière $(\bar{\gamma})$ concurrente à la courbe γ correspondante, c'est à dire une solution particulière de l'équation (7), nous obtenons par des quadratures toutes les courbes concurrentes à la courbe (γ) suivant le système des droites $M\bar{M}$. Il en résulte encore que le birapport dans lequel quatre courbes concurrentes intersectent la droite $M\bar{M}$ est constant.

2. On peut déterminer les invariants centro-affines des courbes concurrentes. Nous avons d'après (6) :

$$(\bar{x}\,\bar{x}') = \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}$$

d'où, selon (5) et (6), l'on déduit :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = \frac{\varphi^2}{1-ab} \tag{8}$$

la relation qui donne le rapport des arcs centro-affines unimodulaires des courbes concurrentes

De (6'), (8), (5') et (5'') on déduit l'expression de la courbure centro-affine $\bar{K}$ de la courbe concurrente :

$$\bar{K}=(1-ab)^2\frac{K}{\varphi^4} \tag{9}$$

ou bien :

$$\frac{K}{d\sigma^2}-\frac{\bar{K}}{d\bar{\sigma}^2}=0. \tag{9'}$$

De la formule (4) et des relations précédentes il en résulte la relation entre les angles de contingence élémentaire centro-affine unimodulaire :

$$\frac{d\bar{T}}{dT}=\frac{1-ab}{\varphi^2}$$

par suite :

$$d\bar{T}\,d\bar{\sigma}=dT\,d\sigma. \tag{10'}$$

Les formules (8), (9) et (10) lieut entre eux les invariants centro-affines unimodulaires des courbes concurrentes.

Les relations entre les invariants centro-affines des courbes concurrentes s'obtiennent en choisissant pour paramètres des courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$ les longueurs s et $\bar{s}$ des arcs centro-affines. Les formules entre les invariants centro-affines [4]) ε, s et k (la courbure centro-affine) et entre les invariants centro-affines unimodulaires, sont :

$$\varepsilon=\text{sign. } K \tag{11}$$

$$\frac{ds}{d\sigma}=\varepsilon\frac{dT}{ds}=\omega\sqrt{\varepsilon K}\ ,\quad (\omega=\pm 1) \tag{11'}$$

$$k=-\frac{d}{ds}\log\sqrt{\varepsilon K}. \tag{11''}$$

De (9) on déduit :

$$\varepsilon=\bar{\varepsilon}. \tag{12}$$

De (11') nous avons :

$$ds^2=\varepsilon\ dT.d\sigma$$
$$d\bar{s}^2=\bar{\varepsilon}\ d\bar{T}.d\bar{\sigma}$$

d'où, selon (10') et (12), on déduit :

$$d\bar{s}=\omega\ ds. \tag{12'}$$

En écrivant la relation (9) sous la forme :

$$\sqrt{\varepsilon \bar{K}} \; : \; \sqrt{\varepsilon K} = \omega \frac{1 - ab}{\varphi^2},$$

on déduit, d'après (11'') et (12') :

$$k - \omega \bar{k} = \frac{d}{ds} \log \omega \frac{1 - ab}{\varphi^2} \tag{12''}$$

entre les courbures centro-affines.

La fonction φ peut être exprimée à l'aide des invariants centro-affines des courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$.

Nous écrivons (2') en calculant le déterminant $(x' \bar{x}')$ et en utilisant la formule fondamentale (3) sous la forme :

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = aK - b\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}$$

ou bien, en introduisant comme variable l'arc centro-affine s, nous avons :

$$\frac{ds}{d\sigma}\left(\frac{d\varphi}{ds} + b\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right) = aK$$

d'où, par un calcul simple, en utilisant (11') l'on déduit :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varepsilon \omega a e^{-\int K ds} - b e^{-\int \bar{K} d\bar{s}}.$$

Je considérerai quelques cas particuliers remarquables où l'équation différentielle (7) peut être facilement résolue. En déterminant la fonction φ, par (5) on peut écrire les équations ponctuelles des courbes concurrentes.

a) Les courbes parallèles s'obtiennent pour $b=0$, la fonction φ, déterminée par l'équation différentielle (7) étant :

$$\varphi = aT + c$$

c étant une constante d'intégration et T l'angle de contingence centro-affine unimodulaire. Les équations des courbes parallèles à la courbe (γ) sont :

$$\bar{x} = ax' + (ab + c)x.$$

Les relations (8), (9) et (10) donnent les formules établies par MM. Mayer et Myller par les courbes parallèles :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = (aT + c)^2 \quad , \quad \bar{K} = \frac{K}{(ab + c)^4} \quad , \quad \frac{d\bar{T}}{dT} = \frac{1}{(aT + c)^2}.$$

Pour les invariants centro-affines, les formules (12) et (12') restent les mêmes et la formule (12'') devient :

$$k - \omega \bar{k} = \frac{d}{ds} \log \frac{\omega}{(ab + c)^2}.$$

b) Un autre cas particulier est celui des courbes concurrentes à distance nulle, qu'on obtient pour $a = 0$. Deux points x et $\bar{x}$ homologues sur deux courbes concurrentes à distance nulle, sont colinéaires avec l'origine et les tangentes à ces points aux courbes (γ) et $(\bar{\gamma})$ forment un angle centro-affine unimodulaire constant. L'équation différentielle (7) devient, en faisant $a = 0$,

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} + b\varphi^2 = 0$$

qui, integrée, donne :

$$\varphi = \frac{1}{b\sigma + c},$$

c étant la constante d'intégration. Les équations paramétriques ponctuelles des courbes concurrentes, à distance nulle, d'une courbe (γ) sont

$$\bar{x} = \frac{1}{b\sigma + c}\, x.$$

Les formules entre les invariants centro-affines unimodulaires, dans ce cas, sont :

$$d\bar{\sigma} = \frac{d\sigma}{(b\sigma + c)^2} \quad ; \quad \bar{K} = (b\sigma + c)^4 K \quad ; \quad d\bar{T} = (b\sigma + c)^2\, dT$$

$$\left(\bar{\sigma} = c_1 - \frac{1}{b(b\sigma + c)}\right)$$

et entre les invariants centro-affines, excepté (12) et (12'), l'on deduit la relation :

$$k - \omega \bar{k} = \frac{d}{d\sigma} \log \omega (b\sigma + c)^2.$$

c) Au cas des courbes homothétiques nous avons :

$$a = b = 0,$$

c'est à dire : $\varphi = c^{te}$.

Nous obtenons pour les invariants centro-affines les formes :

$$d\bar{\sigma} = c^2\, d\sigma \quad ; \quad \bar{K} = \frac{1}{c^4} K \quad ; \quad d\bar{T} = \frac{1}{c^2}\, d\bar{T} \quad ; \quad \bar{k} = \omega k$$

d) Pour : $b = \frac{1}{a}$, de l'équation différentielle (7) il en resulte $\varphi = 0$, par conséquent les équations des courbes concurrentes, en ce cas, sont :

$$\bar{x} = ax'.$$

Ces courbes sont homothétiques par rapport à O de l'image tangentielle ($a = 1$) de la courbe (γ). C'est à dire que la tangente au point $\bar{M}$ est parallèle au rayon vecteur OM. C'est ainsi qu'elles furent définies par M. Myller et appelées des courbes conjuguées [5]).

En dérivant (13), des formules fondamentales (3), (3'), (3'') et (11), (11'), (11''), on déduit les relations entre les invariants centro-affines des courbes conjuguées :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = r^2 K \quad , \quad \frac{d\bar{T}}{dT} = \frac{1}{r^2 K} \quad ; \quad K.\bar{K} = \frac{1}{r^4}$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad , \quad d\bar{s} = \omega . ds \quad , \quad k + \omega \bar{k} = 0 \quad (\omega = \pm 1).$$

e) L'équation Riccati (7) peut être intégrée aussi dans le cas $K = c^{te}$, c'est à dire dans le cas où les courbes (γ) sont des coniques de centre O [6]). En intégrant (7) l'on obtient :

$$\varphi = \sqrt{\frac{a}{b}(1-ab)K} \cdot \frac{Ce^{r\sigma} - e^{-r\sigma}}{Ce^{r\sigma} + e^{-r\sigma}}$$

où C est une constante d'intégration et :

$$r = \sqrt{\frac{ab}{1-ab} K}.$$

Les équations des courbes concurrentes aux coniques de centre O, sont données par (5) où φ a la valeur ci-dessus et les équations des coniques de centre O étant :

$$x_1 = \sqrt{R} \cos \frac{\sigma}{R} \quad , \quad x_2 = \sqrt{R} \sin \frac{\sigma}{R} \quad ; \quad K = \frac{1}{R^2}$$

pour l'éllipse, et :

$$x_1 = \sqrt{R} \operatorname{ch} \frac{\sigma}{R} \quad , \quad x_2 = \sqrt{R} \operatorname{sh} \frac{\sigma}{R} \quad ; \quad K = -\frac{1}{R^2}$$

pour l'hyperbole.

Remarque. Les calculs précédents ont été effectués en choisissant comme paramètre la longueur centro-affine unimodulaire σ de l'arc de la courbe γ.

La propriété du groupe des centro-affinités d'être autoduales permet de choisir comme paramètre l'angle de contingence centro-affine unimodulaire T. Ce choix entraîne les formules fondamentales :

$$(u\,u') = 1 \quad , \quad (u'\,u'') = \frac{1}{K} \quad , \quad u'' + \frac{1}{K}u = 0.$$

L'on déduit les équations tangentielles des courbes concurrentes :

$$\bar{u} = b\,u' + \psi u \quad ,$$

la fonction ψ étant la solution de l'équation Riccati :

$$\psi' + \frac{a}{1-ab}\psi^2 - \frac{b}{K} = 0.$$

Lycee „Petru Rareş"
Piatra-Neamţ

(Reçu le 31 Décembre 1946).

Travaux cités

1. O. Mayer et A. Myller - *Géométrie centro-affine différentielle des courbes planes.* Ann. Sc. Univ. Jassy. t. XVIII p. 260.
2. O. Mayer et A. Myller - *loc. cit.* p. 277.
3. O. Mayer et A. Myller - *loc. cit.* p. 264.
4. O. Mayer et A. Myller - *loc, cit,* p. 266.
5. A. Myller - *O transformare geometrică.* Gazeta Matematică. t. XLII.
6. O. Mayer et A. Myller - *loc. cit.* p. 264.

SUR U RTHÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ELÉME TAIRE

par

ILIE POPA

On connait, depuis longtemps, le théorème „Avec les trois distances d'un point variable aux sommets d'un triangle équilatéral de son plan on peut construire toujours un triangle". On doit à M. Pompeiu une démonstration simple et élégante de ce théorème. Le même théorème a été l'objet de beaucoup de recherches. Si nous nous permettons d'en présenter une autre, qui n'est pas ni trop simple ni élégante, c'est seulement parce qu'elle nous donne la raison pour laquelle le théorème est vrai.

Soient $A_1 A_2 A_3$ un triangle quelconque et M un point variable de son plan. Considérons la fonction

$$F(M) = \varepsilon_1 MA_1 + \varepsilon_2 MA_2 + \varepsilon_3 MA_3 \tag{1}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$.

Parmi les huit déterminations de cette fonction, nous avons deux qui conservent un signe constant quand M parcourt le plan: Ce sont celles pour lesquelles tous les ε ont une même valeur. Les six autres peuvent être groupées par couples tels que si l'une d'elle a un signe, l'autre ait le signe contraire. Pour étudier le signe de $F(M)$ quand M parcourt le plan, il nous reste à étudier le signe des trois déterminations comprenant deux signes $+$ et un seul $-$. Pour fixer les idées, considérons la détermination

$$F_1(M) = MA_1 + MA_2 - MA_3 \tag{2}$$

et, pour étudier son signe, quand M varie, cherchons le lieu de M pour lequel $F_1(M) = 0$. Or [1]), ce lieu est une quartique bicirculaire ayant A_1, A_2, A_3 pour trois de ses quatre foyers réels. Remarquons que cette quartique représent le lieu du point M pour lequel les huit déterminations de $F(M)$ sont nulles.

Dans une belle note, W. Crofton [2]) a cherché à élucider la forme de cette quartique, en affirmant qu'elle se compose de deux

ovals extérieurs l'un à l'autre. En tout cas, la quartique bicirculaire en question divise généralement le plan en certaines régions de manière que le passage de sa frontière apporte un changement de signe de $F_1(M)$. Une seule exception peut se présenter: quand la quartique bicirculaire se décompose en une conique double – évidemment un cercle. – Or, par un calcul élémentaire inutile à reproduire ici, on constate que cela a lieu si, et seulement si, le triangle $A_1 A_2 A_3$ est équilatéral et, dans ce cas, la quartique en question devient le cercle circonscrit au triangle compté deux fois. Le passage de la frontière n'aménera pas de changement du signe de $F(M)$. Par cela, le théorème est démontré et c'est en cela que réside la raison annoncée.

Remarques. 1. La propriété indiquée du cercle circonscrit à un triangle équilatéral est connue. Nous avons montré seulement que cette propriété est caractéristique pour le triangle équilatéral et que ce cercle doit être compté deux fois.

2. Les six branches de la fonction $F(M)$ se permutent quand on traverse une des trois demi-droites joignant le centre du triangle équilatéral aux sommets du même triangle.

3. On peut encore remarquer que le centre de gravité du triangle quelconque $A_1 A_2 A_3$ est le point fondamental de la quartique bicirculaire considerée.

4. Le théorème reste vrai pour d'autres métriques. Par exemple pour celle de la géométrie pséudo-euclidéenne de M. E. Borel, géométrie cayleyenne ayant pour absolu une conique dégénérée en un couple de points réels.

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1946)

Travaux cités

1) Voir, par exemple, G. Salmon, *Höhere ebene Kurven*, § 277, trad. Fiedler.
2) W. Crofton, – *On various Properties of Bicircular Quartics*, Proc. London Math. Soc., II, 1867, pg. 33–44.

NOTES D'ANALYSE

I

SUR LA DÉFINITION DU LOGARITHME DANS LE DOMAINE RÉEL

par

AL. C. CLIMESCU

1. G. H. Hardy a indiqué (2, p. 139) la possibilité de prendre l'expression

$$\lim n(\sqrt[n]{x} - 1) \tag{1}$$

comme définition de la fonction $\log x$ et Finzi (1, § 16, 17, pp. 382-384) est retombé sur la même définition en partant d'un point de vue géométrique. Nous nous proposons de déduire toutes les propriétés importantes de $\log x$ en partant de (1), d'autant plus que Finzi s'est contenté d'y tirer la formule $\log a + \log b = \log ab$. Aussi bien les démonstrations sont tellement simples, que nous avons pu les introduire dans l'enseignement et l'expérience a montré que l'étudiant moyen se les approprie sans trop d'efforts, même au début du cours.

2. I. *Si* $0 < x \neq 1$, *la suite*

$$u_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) \qquad (\sqrt[n]{x} > 0)$$

est croissante au sens strict et bornée inférieurement.

On a

$$\begin{aligned} ny^n &> 1 + y + y^2 + \ldots\ldots + y^{n-1} \qquad \text{si } y > 1 \\ ny^n &< 1 + y + y^2 + \ldots\ldots + y^{n-1} \qquad \text{si } y < 1. \end{aligned} \tag{2}$$

En ajoutant la quantité

$$n(1 + y + y^2 + \ldots\ldots + y^{n-1}),$$

on trouve

$$n(1 + y + y^2 + \ldots + y^n) > (n+1)(1 + y + y^2 + \ldots + y^{n-1}) \text{ si } y > 1$$
$$n(1 + y + y^2 + \ldots + y^n) < (n+1)(1 + y + y^2 + \ldots + y^{n-1}) \text{ si } y < 1.$$

TANÍTÓKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

En multipliant par $y-1$ on obtient dans les deux cas

$$n(y^{n+1}-1)>(n+1)(y^n-1).$$

Posons

$$y=x^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

ce qui établit une correspondance $(1,1)$ entre les valeurs $y>0$ et $x>0$. L'inégalité devient

$$n(\sqrt[n]{x}-1)>(n+1)(\sqrt[n+1]{x}-1) \text{ si } 0<x\neq 1.$$

En multipliant (2) par $y-1$ et en posant $y=x^{\frac{1}{n}}$ on trouve

$$n(\sqrt[n]{x}-1)>\frac{x-1}{x} \quad \text{si} \quad 0<x\neq 1.$$

En définitive on a

$$u_n(x)>u_{n+1}(x)>\frac{x-1}{x} \quad \text{si } 0<x\neq 1$$

et, évidemment,

$$u_n(1)=u_{n+1}(1)=0 \qquad \text{si } x=1.$$

La suite $u_n(x)$ étant décroissante et bornée, a une limite qui est, par définition, $\log x$.

Corollaires.

1°. $\dfrac{x-1}{x}\leq \log x<n(\sqrt[n]{x}-1)$, ($n$ entier $\geqslant 1, x\neq 1$).

2°.
$$\log x<0 \quad \text{si} \quad x<1$$
$$\log x=0 \quad \text{si} \quad x=1$$
$$\log x>0 \quad \text{si} \quad x>1.$$

II. $\log(xy)=\log x+\log y$.

$$\log(xy)=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{xy}-1)=\lim_{n\to\infty} n\left[(\sqrt[n]{x}-1)(\sqrt[n]{y}-1)+\right.$$
$$\left.+(\sqrt[n]{x}-1)+(\sqrt[n]{y}-1)\right]=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{y}-1)+$$
$$+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{y}-1)=\log x+\log y.$$

Corollaires.

1°. $\log\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\log x.$

$$0 = \log 1 = \log\left(x\frac{1}{x}\right) = \log x + \log\left(\frac{1}{x}\right).$$

2^0. De l'inégalité

$$\log x < x - 1$$

on tire, en changeant x en $1/x$,

$$-\log x < \frac{1-x}{x}$$

c'est-à-dire

$$\log x > \frac{x-1}{x}.$$

qui est l'inégalité I, 1^0 améliorée.

3^0. $$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y.$$

4^0. $\log x^m = m \log x$ (m entier positif)

5^0. $\log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log x$ (n entier positif), donc

$\log x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log x$. ($m,n$, entiers positifs, $n > 0$).

III. $\log x$ est une fonction croissante au sens strict, c'est-à-dire

$$\log (x+h) > \log x \rightleftarrows h > 0$$

$\log (x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right) > 0$ si $h > 0$ et réciproquement.

IV. $\lim_{n \to \infty} \log x = \infty$.

Il suffit de combiner le théorème de monotonie avec l'égalité

$$\log 2^m = m \log 2.$$

V. $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$

On applique IV à la fonction $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$.

VI. *Si* $x \geqslant 1$, *alors*

$$\log x \geqslant 2\frac{x-1}{x+1}.$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$(1) \qquad n(\sqrt[n]{x}-1)+\frac{x}{n}>2\frac{x-1}{x+1} \quad (x\geqslant 1)$$

qui, par la passage à la limite, donne immédiatement l'inégalité de l'énoncé. En chassant le dénominateur et en posant $x=y^n$, l'inégalité (1) revient à

$$(2) \qquad y^{2n}+n^2y^{n+1}-(n^2+2n-1)y^n+n^2y-n(n-2)>0 \quad \text{si } y\geqslant 1.$$

Changeons y en $z+1$; on obtient un polynome en z qui a tous les coefficients positifs, donc qui est >0, si $z\geqslant 0$, c'est-à-dire (2), (1) et l'inégalité de l'énoncé sont vérifiées respectivement pour $y\geqslant 1$, $x\geqslant 1$. La démonstration de ce fait est immédiate si l'on observe que ces coefficients sont ou bien des nombres binomiaux, ou bien les expressions suivantes:

$$C_{2n}^{n}+n^2C_{n+1}^{1}-(n^2+2n-1);$$
$$C_{2n}^{n+p}+n^2C_{n+1}^{p+1}-(n^2+2n-1)C_n^p; \qquad (1\leq p\leq n-2).$$
$$C_{2n}^{2n-1}+n^2C_{n+1}^{n}-(n^2+2n-1)C_n^{n-1}+n^2.$$
$$C_{2n}^{2n}+n^2C_{n+1}^{n+1}-(n^2+2n-1)C_n^n+n^2-n(n-2).$$

La première, l'avant-dernière et la dernière sont évidemment >0; multiplions la seconde par $(p+1)$ et divisons-la par le produit $(n-p+1)(n-p+2)\ldots.(n-1)n$; il suffit de montrer qu'on a

$$n^2(n+1)-(p+1)(n^2+2n-1)>0,$$

qui est certainement vérifiée si $p\leq n-2$.

VII. *La fonction*

$$f(x)=\log x-2\frac{x-1}{x+1}$$

est croissante au sens strict si $x>0$.

Vu la propriété II, 1^0, il suffit de faire la démonstration pour $x>1$. On a, en tenant compte de VI,

$$f(x+h)-f(x)=\log\left(1+\frac{h}{x}\right)-\frac{4h}{(x+1)(x+h+1)}\geqslant\frac{2h}{2x+h}-\frac{4h}{(x+1)(x+h+1)}$$

et la dernière inégalité revient à

$$(x-1)(x+h-1)>0$$

qui est évidente pour $x>1$, $h>0$.

Remarque. Dans l'inégalité VI on doit omettre le signe d'égalité si $x>1$; en effet si $f(x)=0$ pour un $x>1$, alors (VII) $f(y)<0$ si $1<y<x$, ce qui contredirait VI.

VIII. *Si* $x \geqslant 1$, *alors*

$$\frac{x^2-1}{2x} \geqslant \log x.$$

Il suffit de démontrer l'inégalité

$$\frac{x^2-1}{2x} + \frac{x}{n} > n(\sqrt[n]{x} - 1) \qquad \text{si } x \geqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^{2n}-1}{2y^n} + \frac{y^n}{n} > n(y-1) \qquad \text{si } y \geqslant 1$$

ou encore

$$(n+2)\,y^{2n} - 2n^2\,y^{n+1} + 2n^2 y^n - n > 0 \qquad \text{si } y \geqslant 1$$

ou enfin

$$(n+2)\,(z+1)^{2n} - 2n^2\,z(z+1)^n - n > 0 \qquad \text{si } z \geqslant 0.$$

Les coefficients du polynome en z sont ou bien des nombres binomiaux ou bien les nombres

$$(n+2)\,C_{2n}^{n-1} - 2n^2,$$
$$(n+2)\,C_{2n}^{n+p} - 2n^2\,C_n^{p+1}, \qquad 0 \leq p \leq n-1$$
$$(n+2)\,C_{2n}^{2n} - n = 2.$$

La démonstration sera achevée si on montre que ces nombres sont positifs, ce qui se fait pour le premier par induction et pour les autres en observant que l'inégalité

$$(n+2)\,C_{2n}^{n+p} - 2n^2\,C_n^{p+1} > 0$$

revient à l'inégalité

$$(n+2)(2n-1)\ldots(n+1) > n(n-p)(p+2)\ldots\ldots(p+n);$$

mais on voit que si

$$p \leq n-2$$

on a

$$n(n-p)(p+2)\ldots(n+p) < n(n-p-1)(p+3)\ldots\ldots(p+n+1);$$

il suffit donc de démontrer directement l'inégalité

$$(n+2)\,C_{2n}^{n+p} - 2n^2\,C_n^{p+1} > 0$$

pour $p = n-2$ et $p = n-1$, ce qui est immédiat.

IX. *La fonction*

$$\frac{x^2-1}{2x} - \log x = f(x)$$

est croissante au sens strict si $x > 0$.

$$f(x+h) - f(x) = \frac{hx^2+h^2x+h}{2x(x+h)} - \log\left(1+\frac{h}{x}\right) \geqslant \frac{hx^2+h^2x+h}{2x(x+h)} - \frac{(h+x)^2-x^2}{2(x+h)x} > 0$$

si $x > 1, h > 0$ (d'après VIII).

En changeant x en $1/x$, on voit que la fonction est croissante au sens strict si $0 < x < 1$ et on améliore l'inégalité VIII par le même procédé que précédemment.

X. *La fonction*

$$f(x) = \frac{x}{\log x - a}$$

est croissante au sens strict pour tous les x *tels que*

$$\log x > a + 1.$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{\log(x+h) - a} - \frac{x}{\log x - a} = \frac{(x+h)(\log x - a) - x(\log(x+h) - a)}{(\log(x+h) - a)(\log x - a)}$$

mais si $\log x > a+1$ on a $\log(x+h) > \log x > a+1$, donc le dénominateur est > 0 si $h > 0$ et tout revient à démontrer l'inégalité

$$(x+h)(\log x - a) > x[\log(x+h) - a]$$

ou

$$h(\log x - a) > x[\log(x+h) - \log x] = x \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

c'est-à-dire

$$\log(1+y) < y(\log\frac{h}{y} - a), \qquad y = \frac{h}{x} > 0.$$

Mais

$$\log(1+y) < y < y(\log\frac{h}{y} - a)$$

si

$$\log\frac{h}{y} - a = \log x - a > 1,$$

ce qui est l'hypothèse faite.

Cette propriété est démontrée d'habitude à l'aide des propriétés de la dérivée (cf. Pringsheim 3, p. 350, note 1)

XI. *Si* $x > 0$ *et* $a > 0$, *on a*

$$\log(1+x) > (1-a^2)x - \frac{(a+1)^2}{2}x^2.$$

L'inégalité

$$x - \frac{x^2}{2} > (1-a^2)x - \frac{(a+1)^2}{2}x^2$$

étant évidemment vérifiée si $a > 0$, $x > 0$, il suffit de démontrer qu'on a

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

ou, en changeant x en $x-1$,

$$\log x > -\frac{3}{2} + 2x - \frac{x}{2} \quad \text{pour } x > 1.$$

Démontrons d'abord l'inégalité

$$2n(\sqrt[n]{x} - 1) > -3 + 4x - x^2 \qquad (x > 1)$$

ou

$$2n(y-1) > -3 + 4y^n - y^{2n} \qquad (y > 1)$$

ou encore

$$(z+1)^{2n} - 4(z+1)^n + 2n(z+1) - (2n-3) > 0 \qquad (z > 0).$$

Les trois derniers coefficients du polynome en z sont nuls, les premiers sont des nombres binomiaux et les coefficients intermédiaires sont de la forme

$$C_{2n}^{n+p} - 4C_n^p$$

c'est-à-dire, comme on le montre sans peine, tous les coefficients du polynome en z sont > 0. En passant à la limite et en revenant à la variable x on a

$$\log(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

On démontre ensuite que la fonction

$$\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

est croissante au sens strict si $x > 1$ et on conclut enfin qu'on a

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \qquad \text{si } x > 1.$$

Cette inégalité, qui joue un certain rôle dans la théorie des produits infinis, est toujours démontrée (Cf. les Traités de Bromwich et de Goursat) à l'aide des propriétés de la dérivée[1]).

XII. *La fonction logx est continue et dérivable pour tout $x>0$ et sa dérivée est $1/x$.*

On a

$$\frac{x-1}{x} < \log x < x-1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{x+h} < \log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \log(x+h) - \log x < \frac{h}{x}$$

et cette double inégalité démontre les deux assertions de l'énoncé.

En supposant connues les propriétés de l'exponentielle (définition comme limite d'une suite de polynomes, monotonie) on montre immédiatement que la fonction $\log x$ est l'inverse de l'exponentielle et que la fonction

$$x^a = e^{a \log x}$$

est croissante au sens strict si $x > 0$, $a > 0$ et tend vers l'infini si $x \longrightarrow +\infty$.

XIII. *Si $a>0$ on a*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0.$$

En effet

$$\frac{x-1}{x^{a+1}} < \frac{\log x}{x^a} < n\left(x^{\frac{1}{n}-a} - x^{-a}\right)$$

et il suffit de prendre $n > 1/a$ et de faire tendre ensuite x vers l'infini.

XIV. *On a, si $a > 0$,*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x^a \log x = 0.$$

La démonstration se fait en changeant x en $1/x$ dans XIII.

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 6 Janvier 1947).

Travaux cités

1. Finzi, Aldo – *Logaritmi, apud* Berzolari-Vivanti-Gigli, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, vol I, parte I, p. 365, Milano 1930.
2. Hardy, G. H. – *A Course of pure Mathematics*, 3-d edition, Cambridge 1921.
3. Pringsheim, A. – *Vorlesungen über Zahlenlehre.* Zweite Abteilung. *Unendliche Reihen mit reellen Gliedern*, Leipzig und Berlin 1916.

1) Nous remercions notre ami M. Ilie Popa de nous avoir attiré l'attention sur la nécessité d'une démonstration directe de cette inégalité.

517

RECHERCHES SUR LES PROBLÈMES À LA FRONTIÈRE POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

par

D. I. MANGERON

J'ai étudié, par différentes méthodes, dans plusieurs travaux insérés dans divers Recueils [1]), nombre de problèmes concernant la recherche des valeurs caractéristiques (le spectre) et des solutions caractéristiques (les autosolutions) des équations différentielles dans n variables indépendantes de la forme

$$(1)\qquad \frac{\partial^{nm} u}{\partial x_1^{\,m}\,\partial x_2^{\,m}\ldots\partial x_n^{\,m}} = \sum_{i=1}^{m-1} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^{ni} u}{\partial x_1^{\,i}\,\partial x_2^{\,i}\ldots\partial x_n^{\,i}} + \lambda A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,u$$

ou

$$(2)\qquad \frac{\partial^{nm}}{\partial x_1^{\,m}\,\partial x_2^{\,m}\ldots\partial x_n^{\,m}}\left(\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^{nm} u}{\partial x_1^{\,m}\,\partial x_2^{\,m}\ldots\partial x_n^{\,m}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^{ni}}{\partial x_1^{\,i}\,\partial x_2^{\,i}\ldots\partial x_n^{\,i}}\left(\theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^{ni} u}{\partial x_1^{\,i}\,\partial x_2^{\,i}\ldots\partial x_n^{\,i}}\right) + \lambda A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,u,$$

---

1) Voir : *Rend. Acc. Naz. Lincei*, Roma, 6e série, XVI (1932), 305 ; *Giornale di Matematiche*, Napoli, 3e série, LXXI (1933), 89 ; *C. r. Acad. Sci.* Paris, 204 (1937), 94 et 1022 ; *Mathematica*, Cluj, XIV (1938), 31. Voir aussi les travaux classiques de E. Picard et de M. M. Picone concernant les équations différentielles ordinaires et insérés respectivement dans *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 29 (1910), et *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 11 (1909), 1 et *Math. Z.*, 28 (1928), 510.

où les coefficients $A_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $\theta_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sont définies dans le domaine D

$$D(a_i \leq x_i \leq b_i) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

et les fonctions $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ satisfassent aux certaines conditions à la frontière FD de ce domaine.

Dans ce qui suit je me propose d'énoncer quelques théorèmes préliminaires concernant les formules de majoration pour les solutions des équations non homogènes

$$(3) \qquad \frac{\partial^{nm} u}{\partial x_1^{m}\partial x_2^{m}\ldots\partial x_n^{m}} = \sum_{i=1}^{m-1} A_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\frac{\partial^{ni} u}{\partial x_1^{i}\partial x_2^{i}\ldots\partial x_n^{i}} + \\ + \lambda A(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,u + f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

et

$$(4) \qquad \frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^{m}\partial x_2^{m}\ldots\partial x_n^{m}}\left(\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\frac{\partial^{mn} u}{\partial x_1^{m}\partial x_2^{m}\ldots\partial x_n^{m}}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} A_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\frac{\partial^{ni}}{\partial x_1^{i}\partial x_2^{i}\ldots\partial x_n^{i}}\left(\theta_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\frac{\partial^{ni} u}{\partial x_1^{i}\partial x_2^{i}\ldots\partial x_n^{i}}\right) + \\ + \lambda A(x_1,\ldots,x_n)\,u + f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

correspondantes aux équations (1) et (2) et satisfaisant aux certaines conditions à la frontière FD du domaine D.

Je me borne ici à la considération de l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{2}\partial x_2^{2}\ldots\partial x_n^{2}} - A(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,u = f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

où les fonctions $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sont continues et finies dans le domaine D et

$$(6) \qquad u(x_1,x_2\ldots x_n) = 0 \qquad \text{à la frontière } FD \text{ de } D.$$

Je suppose que l'unité n'est pas une valeur caractéristique pour l'équation

$$(7) \qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{2}\partial x_2^{2}\ldots\partial x_n^{2}} - \lambda A(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,u = 0$$

et les conditions aux limites (6).

Théorème I. *Si* $(-1)^n A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq 0$ *dans* D, *on a pour les solutions du système différentiel* (5) *et* (6) *la formule de majoration suivante*

$$(8)\qquad \max|u| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 \max|f|}{2^{2n}},$$

où

$$\prod_{i=1}^{n'}(b_i - a_i)^2 = (b_1 - a_1)^2(b_2 - a_2)^2 \ldots (b_n - a_n)^2.$$

Théorème II. *Soient n pair, $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un signe quelconque dans D et M un nombre non négatif et non inférieur au maximum de A dans D. Si*

$$(9)\qquad 2^{2n} - \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 \max[(-1)^n A] > 0,$$

on a pour les solutions du système différentiel (5) *et* (6) *la formule de majoration suivante*

$$(10)\qquad \max|u| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 \max|f|}{2^{2n} - \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 M}.$$

Théorème II bis. *Soient n impair, $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un signe quelconque dans D et M un nombre non positif et non supérieur au minimum de A dans D. Si*

$$(11)\qquad 2^{2n} + \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 \min[(-1)^n A] > 0,$$

on trouve pour les solutions du système différentiel (5) *et* (6), *la formule de majoration suivante*

$$(12)\qquad \max|u| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 \max|f|}{2^{2n} + \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 M}.$$

Théorème III. *Supposons que la plus petite valeur caractéristique positive, λ_0, du système différentiel* (6) *et* (7) *soit plus grande que l'unité,*

$$\lambda_0 > 1.$$

On en déduit pour l'intégrale $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'équation (5), *vérifiant les conditions à la frontière* (6), *la formule de majoration suivante*

$$(13)\qquad \max|u| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}{2^{2n}} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \max|f|,$$

qui se réduit à (8) *pour* $\lambda_0 \longrightarrow \infty$.

Théorème IV. *Si la succession croissante de quantités positives*

$$\mu', \mu'', \ldots, \mu^{(n)}, \ldots$$

a pour limite la plus petite valeur caractéristique positive λ_0, *et si en outre on a* $\mu^{(n)} > 1$ *pour* $n > N$, *on trouve pour l'intégrale de* (5) *vérifiant les conditions aux limites* (6) *les formules de majoration suivantes*

$$(14)\qquad \max|u| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}{2^{2n}} \frac{\mu^{(n)}}{\mu^{(n)} - 1} \max|f| \quad \text{pour } n > N.$$

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 6 Janvier 1947).

SUR UNE ÉQUATION DE RÉCURRENCE TRIANGULAIRE

par

NEGOESCU NICOLAS

Dans cette note, nous nous proposons d'intégrer l'équation de récurrence à deux indices:

$$(1) \qquad a_{p+1}^{n+1} = (p+i)\, a_p^n + (p+i+1)\, a_{p+1}^n \ , \ i \text{ entier,}$$

où p et n parcourent les nombres entiers, sous les conditions initiales

$$(1') \qquad a_0^0 = 1 \quad \text{et} \quad a_p^0 = 0 \quad \text{pour tout } p \neq 0$$

et d'indiquer quelques généralisations et applications.

1. La formule (1) avec les conditions (1') fournit le triangle des nombres

$$(2) \qquad \begin{array}{llll} 1 & & & \\ i & i & & \\ i^2 & 2i^2+i & i(i+1) & \\ i^3 & 3i^3+3i^2+i & 3i^3+6i^2+3i & i(i+1)(i+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

On voit aisément que pour i entier négatif, les colonnes d'indice $> -i$ comprennent seulement des éléments zéro et ainsi le tableau triangulaire (2) se réduit à un tableau n'ayant que $(-i+1)$ colonnes différentes de zéro. En examinant le tableau (2) on voit que

$$a_0^r = i^r \quad \text{et} \quad a_r^r = i(i+1)(i+2)\ldots\ldots(i+r-1).$$

Par des additions et soustractions de la formule (1), pour les différentes valeurs de p, on obtient

$$(3) \qquad a_p^{n+1} - a_{p+1}^{n+1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^r\, a_{p+r}^{n+1} = (p+i-1)\, a_{p-1}^n + \\ + (-1)^r (p+r+i)\, a_{p+r}^n$$

qui pour $p = 0$ est

$$a_r^{n+1} - a_{r-1}^{n+1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^r\, a_0^{n+1} = (r+i)\, a_r^n$$

et dans le cas $r = n+1$ l'équation précédente fournit la relation pour n

$$(4) \qquad a_0^n - a_1^n + \ldots\ldots + (-1)^n a_n^n = 0$$

puisque $a_{n+1}^n = 0$.

La relation (4) n'est que l'une d'un ensemble d'équations linéaires pour les nombres a_p^n. Nous désirons trouver un système de $(n+1)$ équations linéaires entre les éléments de $n^{ème}$ ligne du tableau (2), qui nous permettra le calcul de a_p^n.

$$a_p^{n+1} = (p+i-1)\, a_{p-1}^n + (p+i)\, a_p^n,$$

multiplions la par $\binom{p+r}{p+i-1}$ (combinaisons de $p+r$ à $p+i-1$) et sommons de $p=0$ à $p=n$.

Eu égard à la formule

$$\binom{p+r}{p+i-1} = \binom{p+r+1}{p+i} - \binom{p+r}{p+i}$$

et à la remarque antérieure, que

$$a_{n+1}^{n+1} = (n+1)\, a_n^n,$$

nous arrivons à l'équation :

$$(5) \quad \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^p \binom{p+r}{p+i-1} a_p^{n+1} + (r-i+1) \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{p+r}{p+i-1} a_p^n = 0.$$

On applique à (5) la transformation

$$(6) \qquad b_r^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{p+r}{p+i-1} a_p^n$$

avec la condition

$$(6') \qquad r \geqslant i-1$$

pour que $\binom{p+r}{p+i-1}$ soit différents de zéro et alors (5) devient

$$(7) \qquad b_r^{n+1} + (r-i+1)\, b_r^n = 0,$$

équation linéaire homogène dépendante de n.

La méthode ci-dessus nous a permis de réduire l'intégration de l'équation à deux indices (1) à l'intégration d'une équation à un indice (7) et la résolution d'un système d'équations linéaires (6).

L'équation (7) fournit $b_r^n = (-1)^n (r-i+1)^n\, b_r^0$.

De (6) et (1) il résulte $b_r^0 = \binom{r}{i-1} a_0^0 = \binom{r}{i-1}$,

et alors (6) devient

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{p+r}{p+i-1} a_p^n = (-1)^n (r-i+1)^n \binom{r}{i-1}$$

où bien

$$(8) \qquad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{p+r}{r-i+1} a_p^n = (-1)^n (r-i+1)^n \binom{r}{r-i+1}$$

qui pour $r = i-1$ se réduit à (4).

Conformément à la condition (6'), en donnant à r les valeurs $i-1, i, i+1, \ldots, i+n-1$, on obtient un système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues a_p^n, qui étant résolu par la formule de Kramer, nous donne la solution

$$a_p^n = (-1)^{n+p} \frac{\sum_{r=i}^{n+i-1} (r-i+1)^n \binom{r}{r-i+1} M_{p,r}}{\left| \binom{p+r}{r-i+1} \right|}$$

où $M_{p,r}$ est le mineur de $\binom{p+r}{r-i+1}$ dans $\left| \binom{p+r}{r-i+1} \right|$.

Le déterminant $\left| \binom{p+r}{r-i+1} \right|$ étant égal à 1*), la transformation (6) est unimodulaire.

La solution de l'équation (1), sous les conditions initiales (1'), est donnée donc par

$$(9) \qquad a_p^n = (-1)^{n+p} \sum_{r=i}^{n+i-1} (r-i+1)^n \binom{r}{r-i+1} M_{p,r}.$$

La transformation (6) qui résout le problème proposé est une généralisation de la transformation mise en évidence par M. Truesdell [1] pour l'intégration de l'équation

$$(10) \qquad a_p^{n+1} = p a_{p-1}^n + (p+1) a_p^n$$

sous les mêmes conditions initiales (1') que (1), à l'aide de la fonction

$$\Phi(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}.$$

La formule (10), étant un cas particulier de l'équation (1), pour $i = 1$, obtient la solution donnée par M. Truesdell

$$a_p^n = (-1)^{n+p} \sum_{r=1}^{n} r^n M'_{p,r}$$

*) Pascal. I determinanti, seconda edizione, pag. 199.

où $M'_{p,r}$ est le mineur $\binom{p+r}{r}$ dans le déterminant $\left|\binom{p+r}{r}\right|$.

M. Truesdell donne de même la solution de l'équation (10) sous la forme

$$a_p^n = (-1)^p \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} (j+1)^n .$$

Cette solution, qui se déduit aisément par l'induction [2], nous pérmet de donner une propriété des nombres a_p^n, à savoir:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_p^{n+1}}{a_p^n} \text{ existe et est égale à } p+1.$$

Une simple observation nous permet de changer les conditions initiales (1')

$$(1'') \qquad a_0^0 = k \text{ et } a_p^0 = 0 \qquad \text{pour tout } p \neq 0$$

et alors la solution (9) du (1) se multiplie par le facteur k parce que

$$b_r^0 = \binom{r}{i-1} a_0^0 = \binom{r}{i-1} k .$$

2. *Généralisations et applications.* L'intégration de l'équation, plus générale que (1), sous les mêmes conditions (1') ou (1''),

$$a_p^{n+1} = (p+i+j)\, a_{p-1}^n + (p+i)\, a_p^n$$

où i, j sont entiers se réduit par la transformation

$$(11) \qquad b_r^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{p+r}{p+i+j} a_p^n$$

à l'intégration de l'équation à un indice (7) et à la résolution du système (11) pour $r = i+j,\ i+j+1,\ \ldots\ldots,\ i+j+n$, donc la solution est donnée par

$$a_p^n = k\,(-1)^{n+p} \sum_{r=i+j}^{n+i+j} (r-i+1) \binom{r}{r-i-j} M_{p,r} .$$

Une autre généralisation immédiate regarde l'équation non homogène

$$a_p^{n+1} = (p+i+j)\, a_{p-1}^n + (p+i)\, a_p^n + f(p,n).$$

Cette équation se réduit, par la transformation (11), à

$$(12) \qquad b_r^{n+1} + (r-i+1)\, b_r^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{p+r}{p+i+j} f(p,n)$$

et le système fournit par (11), où b_r^n sont les solutions de (12).

Enfin, si i et j sont des fonctions périodiques de n à période 1, telles que pour les valeurs entières du n soient entières, la méthode employée est aussi applicable et l'on obtient de cette manière une généralisation nouvelle.

Comme application de l'intégration de l'équation (1), nous traiterons les opérateurs π_1 de M. Milne Thomson. Nous désignons

$$\pi_1^{\,1} f(x) = (x-h)[f(x+1) - f(x)]$$
$$\pi_1^{\,2} f(x) = (x-h)[\pi_1^{\,1} f(x+1) - \pi_1^{\,1} f(x)]$$
$$= (x-h)^2 f(x) - [2(x-h)^2 + (x-h)] f(x+1) + (x-h)[(x-h)+1] f(x+2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit que les coefficients de $f(x+p)$ sont les mêmes que les nombres du tableau (2), lorsqu'on y fait $i = x-h$, donc

$$\pi_1^{\,n} f(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p^n f(x+p) .$$

et

$$a_p^n = (-1)^{n+p} \left\{ \sum_{r=i}^{n+i-1} (r-i+1)^n \binom{r}{r-i+1} M_{p,r} \right\}_{i=x-h}$$

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 6 Janvier 1947)

Travaux cités

1. M. Truesdell - *On a function which occurs in theory of the structure of polymers.* Annals of Mathematics vol. 46 (1945), pg. 144.
2. M. Sen - *A Problem on „Factorisatio Numerorum".* Bulletin of the Calcutta Mathematical Society vol. 33 (1943), pg. 1.

MULTIKONGRUENZ EBENER MENGEN UND PYTHAGOREISCHER LEHRSATZ

von

H. HADWIGER

Zwei ebene Polygone A und B heissen in bekannter Weise „zerlegungsgleich", wenn A in endlich viele Teilpolygone zerlegt werden kann, aus denen sich wieder B zusammensetzen lässt, oder anders ausgedrückt, wenn sich A und B in endlich viele paarweise kongruente Teilpolygone zerlegen lassen.

Ein klassischer Satz über die Zerlegungsgleichheit ebener Polygone sagt aus, dass zwei beliebige Polygone dann und nur dann zerlegungsgleich sind, wenn sie gleichen Flächeninhalt aufweisen.[1])

Die hier in Betracht fallenden Zerlegungen und Zusammensetzungen nehmen nicht Rücksicht auf die Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit der einzelnen Randpunkte der Polygone, d. h. die Zerlegung des Polygons A ist eine solche des „Elementarflächenstückes" A (im Sinne der Lehre Euklids) und nicht eine solche der „Punktmenge" A (im Sinne der Lehre Cantors).

Die hier mögliche Verschärfung des Begriffs der „Zerlegungsgleichheit" führt zu der in der neueren Entwicklung der Punktmengenlehre häufig betrachteten „Multikongruenz" oder „Aequivalenz durch endlich-gleiche Zerlegung", die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen mengentheoretischen „Unikongruenz" darstellt.[2])

Im Hinblick auf die teilweise überraschenden Ergebnisse,[3]) die

---

1) Viel zitiert wird P. Gervien. J. f. Math. *10*, 1833; Nach einem Zitat von A. Emch, Commentarii Math. Helv. *18*, 1945/46, wurde dieser Satz bereits 1807 von W. Wallace bewiesen.

2) Vgl. St. Banach und A. Tarski, Fund. Math. *6*, 1924. Verf. sprechen von „l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie".

3) Nach St. Banach und A. Tarski (vgl. Fussnote 1) sind im k-dim. euklidischen Raum zwei beliebige beschränkte Mengen multikongruent, sofern $k \geqq 3$ ist, und beide Mengen innere Punkte aufweisen (!)

betreffend die „allgemeine Multikongruenz" erreicht wurden, kann es zweckmässig sein, die Definition der Multikongruenz in dem Sinne zu modifizieren, dass für die Teilmengen noch zusätzliche Bedingungen verbindlich erklärt werden, so dass eine „relative Multikongruenz" ins Auge gefasst wird.

Unter Wahrung möglichst grosser Allgemeinheit formulieren wir die folgende

Definition: *Zwei Punktmengen A und B eines metrischen Raumes R heissen relativ zu einem Mengensystem (z. B. Mengenkörper) M (n-fach) multikongruent, wenn die folgenden Mengenrelationen erfüllbar sind:*

$$\text{I.} \qquad A = \sum_1^n A_\nu ; \quad B = \sum_1^n B_\nu ;$$

$$\text{II.} \qquad A_\nu A_\mu = 0, \quad B_\nu B_\mu = 0, \quad \nu \neq \mu ; \quad \nu, \mu = 1,2, \ldots, n ;$$

$$\text{III.} \qquad A_\nu \simeq B_\nu , \quad \nu = 1,2, \ldots n ;$$

$$\text{IV.} \qquad A_\nu , \quad B_\nu \, \varepsilon \, M, \quad \nu = 1,2, \ldots , n.$$

Die durch $\simeq$ symbolisierte Unikongruenz bedeutet die eineindeutige und distanztreue Abbildbarkeit der beiden Mengen in R.

* * *

In der vorliegenden Note betrachten wir nur Mengen der euklidischen Ebene E. Um einem Vergleich mit der eingangs erörterten Zerlegungsgleichheit ebener Polygone zu ermöglichen, fassen wir die Multikongruenz relativ zum Körper K der Polygonmengen A der Ebene E ins Auge. Die Randpunkte von A sollen hierbei in beliebiger Art teilweise zu A gehören. K enthält insbesondere den Körper K_a der abgeschlossenen, sowie auch den Körper K_b der offenen Polygonmengen als Teilsystem.

Es darf nochmals präzisiert werden, dass „zerlegungsgleich" und „multikongruent relativ zu K" verschiedene Begriffe darstellen; eine vorliegende Zerlegungsgleichheit kann i. a. nicht ohne weiteres durch eine passende Verteilung der Randpunkte zu einer Multikongruenz verschärft werden; sind die Teilpolygone z. B. abgeschlossen, so ist i. a. die Bedingung II, sind sie dagegen z. B. offen, so ist i. a. die Bedingung I der vorstehenden Definition verletzt.

Die an sich selbstverständliche Tatsache, dass zwei Polygone aus K auf nicht triviale Weise multikongruent sein können, ist durch einfache Beispiele leicht zu belegen. – Im Hinblick auf die Aufmerksamkeit, die dem pythagoreischen Lehrsatz innerhalb der Theorie der Zerlegungs-

gleichheit stets zuerkannt wurde, prüfen wir die hier nahegelegte Frage der Multikongruenz.

Ausgehend von einer klassischen Zerlegung [4]) zeigen wir durch Angabe von Fig. 1, die mit besonderer Berücksichtigung der beigefügten Legende zu lesen ist, dass die Vereinigungsmenge der beiden halbabgeschlossenen Kathetenquadrate und das halbabgeschlossene Hypotenusenquadrat (ξ-fach) multikongruent sind.

Es handelt sich hierbei sozusagen um den pythagoreischen Lehrsatz der Mengenlehre. – Dass der entsprechende Satz dagegen für abgeschlossene sowie auch für offene Quadrate unrichtig ist, folgt leicht als Korollar aus den nachfolgend erreichten Resultaten.

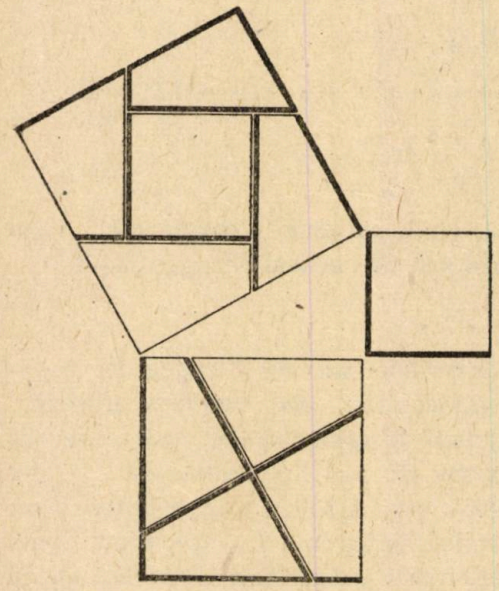
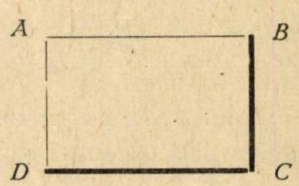


Fig. 1



AB, AD=Ränder, A, B, D=Ecken, die nicht zum Polygon gehören; CB, CD = Ränder, C = Ecke, die zum Polygon gehören.

Wir beweisen zunächst das folgende

Kriterium: *Notwendig dafür, dass die beiden Polygone A und B relativ zum Körper K der Polygonmengen multikongruent sind, ist das Bestehen der folgenden Invarianzbedingungen:*

$$1)\quad F(A) = F(B);$$
$$2)\quad L(A) - 2L^*(A) = L(B) - 2L^*(B),$$

wobei $F(A)$ den Flächeninhalt von A, $L(A)$ die Länge des Randes

4) Vgl. W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz, Leipzig und Berlin, 2. A 1917, S. 14, Fig. 16.

von A und $L^*(A)$ ein Banachsches lineares Mass[5] *für die zu A gehörenden Randpunkte auf dem Rand von A bezeichnet.*

Korollar: *Zwei abgeschlossene, bzw. zwei offene Polygone A und B sind relativ zum Körper K der Polygonmengen nur dann multikongruent, wenn die Bedingungen*

$$1)\quad F(A)=F(B);$$
$$2)\quad L(A)=L^*(B);$$

erfüllt sind.

Vgl. noch die vorstehende Bemerkung über die Ungültigkeit des mengentheoretischen pythagoreischen Lehrsatzes bei offenen bzw. abgeschlossenen Quadraten.

Wir beweisen jetzt das gegebene Kriterium:
Es sollen die Mengenrelationen

(I) $A=\sum_1^n A_\nu$; $B=\sum_1^n B_\nu$ (II) $A_\nu A_\mu=0$, $B_\nu B_\mu=0$ $(\nu\neq\mu)$

(III) $A_\nu \cong B_\nu$ und (IV) $A_\nu, B_\nu \varepsilon K$ gelten. Wegen (IV) haben alle Teilpolygone A_ν und B_ν einen Flächeninhalt und eine Randlänge. Es ist mit (I) und (II)

$$F(A)=\sum_1^n F(A_\nu) \quad ; \quad F(B)=\sum_1^n F(B_\nu)$$

und wegen (III) folgt hieraus $F(A)=F(B)$, also 1). Wegen (IV) sind die Ränder der Teilpolygone A und B einfache Streckenzüge. Bedeutet P bzw. Q den Komplex der bei der Summenbildung (I) auftretenden inneren Teilungslinien, so gelten offenbar die Relationen

$$\sum_1^n L(A_\nu)=L(A)+2L(P) \quad ; \quad \sum_1^n L(B_\nu)=L(B)+2L(Q),$$

$$\sum_1^n L^*(A_\nu)=L^*(A)+L(P) \quad ; \quad \sum_1^n L^*(B_\nu)=L^*(B)+L(Q),$$

da wegen (II) bei der Summenbildung (I) jeder Punkt von P, bzw. Q genau durch ein Teilpolygon A oder B geliefert wird; man hat ferner zu beachten, dass ein Banachsches lineares Mass endlich additiv und normiert ist. Mit (III) ergibt sich jetzt

$$L(A)+2L(P)=L(B)+2L(Q)$$
$$L^*(A)+L(P)=L^*(B)+L(Q),$$

5) Die Theorie dieser für lineare und ebene Mengen entwickelbaren Masse wurde von St. Banach in einer wichtigen Abhandlung „Sur le problème de la mesure", Fund. Math. *4*, 1923 aufgestellt.

so dass die Elimination von $L(P)$ und $L(Q)$ zu $L(A) - 2L^*(A) = L(B) - 2L^*(B)$, also zu 2) führt. Damit ist das Kriterium bewiesen.

In der Theorie der Zerlegungsgleichheit der Polygone spielt die endlich gleiche Verwandlung eines beliebigen Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat eine grundlegende Rolle. [6])

Indem wir uns hinsichtlich der Multikongruenz der analogen Frage zuwenden, beweisen wir den folgenden

Kogruenzsatz: *Es sei $a > b > 0$, $c^2 = ab$; die beiden halboffenen Rechtecks- (Quadrat-) mengen*

$$A\,(0 \leqq x < a,\quad 0 \leqq y < b) \quad \text{und} \quad B\,(0 \leqq x < c,\quad 0 \leqq y < c)$$

sind stets multikongruent relativ zum Körper K der Polygonmengen.

Zusatz: *Für die entsprechenden abgeschlossenen sowie auch für die entsprechenden offenen Rechtecks- (Quadrat-) mengen gilt das Gegenteil.*

Auf den Beweis des Kongruenzsatzes eintretend, bemerken wir vorwegnehmend, dass der Zusatz wegen $L(A) > L(B)$ aus dem oben angegebenen Kriterium (insbes. Korollar) folgt.

Für den Kongruenzsatz selbst soll unten ein Beweis erbracht werden, der auch ein Licht auf eine Methode für Zerlegungsbeweise werfen dürfte, die dadurch an Einfachheit und Schlusskraft gewinnt, indem sie sich auf allgemein fassbare und wesentliche Zusammenhänge bezieht [7]). Für uns ist jedoch nur der Umstand ausschlaggebend, dass der Zerlegungsbeweis unseren Ansprüchen genügt, indem wir ja verlangen, dass der Beweismechanismus auch die Randpunkte der Teilpolygone mit erfasst.

Nun zum Beweis selbst: Es bezeichne $\mathfrak{X}$ eine Drehung in E um den Koordinatenursprung im positiven Sinne um den Winkel φ, der durch die Bedingung

$$\sin\varphi = \frac{c}{a}$$

näher bestimmt ist. Es sei $\overline{A} = \mathfrak{X}(A)$ die aus A durch die Operation $\mathfrak{X}$ hervorgehende Menge. Ferner sollen

6) Im Hinblick auf die Eigenschaft der Zerlegungsgleichheit, reflexiv, symmetrisch und transitiv zu sein, genügt es nämlich die erwähnte Normalverwandlung zu verifizieren, um in einfacher Weise den klassischen Zerlegungssatz über beliebig gestaltete flächengleiche Polygone beweisen zu können. Vgl. auch hierüber A. Emch (Fussnote 1) insbesondere die Ausführung S. 229.

7) Die meisten Zerlegungsbeweise basieren auf individuellen Konstruktionen, so dass ihre Durchführung zwar nicht schwierig, aber in der Regel mühsam ist, indem verschiedene einzelne Kongruenznachweise erbracht werden müssen.

$$U = U(c,0) \qquad V = V(\sqrt{a^2 - c^2},\ c)$$

zwei Translationen in E darstellen, wobei die in Klammern beigefügten Zahlwerte die Komponenten von U und V in den Koordinatenrichtungen angeben. Nun vergleiche man Fig. 2. Man stellt jetzt fest, dass

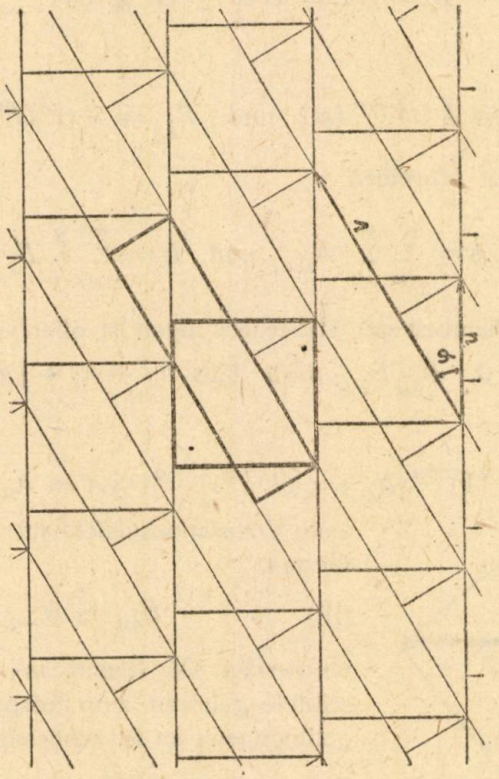


Fig. 2

die abzählbar unendlich vielen translationsgleichen und halbabgeschlossenen Rechtecke

$$U^\lambda V^\mu(\bar{A}) \qquad (\lambda, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

die aus $\bar{A}$ durch Anwendung der zusammengesetzten Translation $U^\lambda V^\mu$, die durch λ-fache Wiederholung von U und μ-fache Wiederholungs von V entsteht, hervorgehen, die Ebene E schlicht und lückenlos überdecken. Das gleiche trifft zu für die halbabgeschlossenen Quadrate

$$U^\lambda V^\mu(B) \qquad (\lambda,\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

die die Ebene E ebenso schlicht und lückenlos überdecken.
Wegen der Lückenlosigkeit dieser Ueberdeckungen gilt nun einerseit

$$\overline{A} = \overline{A}E = \overline{A}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} U^{\lambda}V^{\mu}(B)$$

und andererseits ebenso

$$B = BE = B\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} U^{\lambda}V^{\mu}(\overline{A}).$$

Setzen wir jetzt

$$\overline{A}_{\lambda\mu} = \overline{A}U^{\lambda}V^{\mu}(B) \quad \text{und} \quad B_{\lambda\mu} = BU^{\lambda}U^{\mu}(\overline{A}),$$

so lässt sich jetzt schreiben

(I) $$\overline{A} = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \overline{A}_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad B = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} B_{\lambda\mu};$$

wegen der Schlichtheit der Ueberdeckungen ist offenbar

(II) $A_{\lambda\mu}A_{\lambda'\mu'} = 0$, $B_{\lambda\mu}B_{\lambda'\mu'} = 0$ falls $|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'| > 0$ ist.

Nun ist weiter

$$U^{-\lambda}V^{-\mu}(B_{\lambda\mu}) = U^{-\lambda}V^{-\mu}(B)\overline{A} = \overline{A}_{-\lambda-\mu}$$

eine Translationsgleichheit, die wir in der Gestalt

(III) $$B_{\lambda\mu} \cong \overline{A}_{-\lambda-\mu}$$

vermerken. Die Rechtecks- Quadrat-Durchschnitte gehören zum Körper K der Polygonmengen; so ist schliesslich

(IV) $$\overline{A}_{\lambda\mu} \varepsilon K, \quad B_{\lambda\mu} \varepsilon K.$$

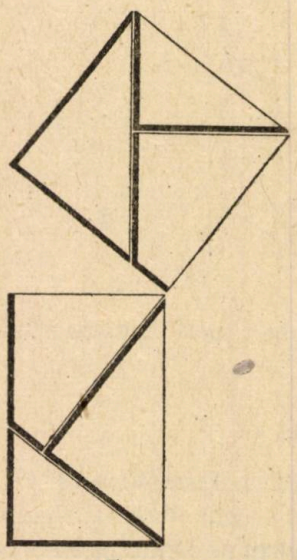


Fig. 3

Bedenken wir, dass in der Summenrelation (I) nur endlich viele Mengen nicht leer sind, so stellen wir durch Vergleich mit der Definition fest, dass durch die Relationen (I) bis (IV) die Multikongruenz der beiden Mengen A und B nachgewiesen ist. Im Hinblick auf die Bewegungsinvarianz der Multikongruenz sind also auch A und B multikongruent, sodass der Kongruenzsatz bewiesen ist.

Durch Fig. 3 ist eine solche Multikongruenz veranschaulicht, wobei die im vorgebrachten Beweis betrachtete Mengenzerlegung in diesem konkreten Fall realisiert wurde.

Indem man die zwei aus Hypotenuse und Hypotenusenabschnitten gebildeten halbageschlossenen Rechtecke passend zusammenfügt, ergibt sich aus dem Kongruenzsatz eine weitere Möglichkeit, den durch Fig. 1 bereits nachgewiesenen „punktweisen pythagoreischen Lehrsatz" zu verifizieren.

Universität Bern
(Schweiz)

(Reçu le Janvier 1947).

SUR TROIS HOMOGRAPHIES DU PLAN DE GAUSS

par

R. DEAUX

Le **Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique de Bucarest** (VII-e année, 1935-1936, nr. 1, 2, 3, pp. 15-19) a publié un article de M. A. Pantazi, intitulé : *Sur certaines configurations d'homographies planes* et qui détermine trois homographies binaires superposées telles que le rapport anharmonique formé par tout élément et ses homologues ait une valeur constante. Outre le cas classique où les trois homographies appartiennent à un faisceau linéaire dont fait partie l'homographie identique, il existe une seconde possibilité qui, lorsque les trois homographies sont portées par une conique, peut se réaliser à l'aide d'une construction due à M. Dan Barbilian.

Nous avons étudié cette question par la Géométrie pure (**Mathesis** tome LIV, page 402). La solution de M. Pantazi est basée sur le calcul et est donc aussi valable pour des homographies du plan de Gauss (transformations circulaires directes de Möbius). Nous allons reprendre le même problème par le calcul, afin d'apporter quelques compléments. [1])

1. On rapporte le plan à deux axes cartésiens rectangulaires et l'on désigne par z la coordonnée complexe (affixe) de tout point réel Z. Soient

$$(1) \qquad \alpha_i z z_i + \beta_i z + \gamma_i z_i + \delta_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

les équations de *trois homographies* ω_i *dans ce plan de Gauss. on va étudier le rapport anharmonique*

$$(2) \qquad \varrho = (Z_1 Z_2 Z_3 Z)$$

1) Le lecteur pourra trouver un exposé systématique des propriétés fondamentales des transformations de Möbius dans: R. Deaux, *Introduction à la Géométrie des nombres complexes*, Bruxelles, 1947, Maison d'édition De Boeck.

de tout point Z et de ses homologues Z_i dans les ω_i .

On peut supposer qu'aucun des ω_i n'est une similitude, c'est-à-dire

$$\alpha_i \neq 0 \tag{3}$$

et que le point à l'infini du plan a des homologues distincts dans deux ω_i quelconques, c'est-à-dire

$$\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i \neq 0. \tag{4}$$

En effet, si ces inégalités n'ont pas lieu, les inégalités analogues auront lieu pour les homographies ω'_i transformées des ω_i par toute homographie ω dont le point limite [1]) est distinct des points doubles des ω_i , et des points ayant même homologue dans deux ω_i . Si Z', Z'_i sont les homologues de Z, Z_i dans ω, on aura

$$(Z'_1\ Z'_2\ Z'_3\ Z') = (Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z)$$

et comme Z', Z'_i sont homologues dans ω'_i , le ϱ relatif aux ω'_i est égal à celui qui concerne les ω_i .

Les points doubles, distincts ou non, E_i , F_i de ω_i ont pour affixes e_i , f_i les racines de

$$\Delta_i \equiv \alpha_i z^2 + (\beta_i + \gamma_i) z + \delta_i = 0$$

et l'on a donc, en vertu de (3),

$$\Delta_i \equiv \alpha_i (z - e_i)(z - f_i). \tag{5}$$

Les points P_{ik}, R_{ik}, distincts ou non, ayant les mêmes homologues dans ω_i , ω_k , $(k = 1, 2, 3, k \neq i)$ ont pour affixes p_{ik}, r_{ik} les racines de l'équation

$$\Delta_{ik} \equiv (\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i) z^2 + (\alpha_i \delta_k - \alpha_k \delta_i + \gamma_i \beta_k - \gamma_k \beta_i) z + \\ + \gamma_i \delta_k - \gamma_k \delta_i = 0$$

obtenue en éliminant z_i entre l'équation de ω_i et celle da ω_k dans laquelle on a posé $z_k = z_i$. On a donc, en vertu de (4),

$$\Delta_{ik} \equiv (\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i)(z - p_{ik})(z - z_{ik}). \tag{6}$$

Si dans

$$\varrho = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \tag{7}$$

on porte la valeur de z_i en fonction de z tirée de l'égalité (1), il vient

1) Point dont l'homologue est à l'infini.

(8) $$\rho = \frac{\Delta_2 \Delta_{13}}{\Delta_1 \Delta_{23}}$$

ou, puisque $\Delta_{ik} = -\Delta_{ki}$,

$$\Delta_2 \Delta_{31} + \rho \Delta_1 \Delta_{23} = 0.$$

Ecrite in extenso, cette égalité est

$$\alpha_2 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3)(z - e_2)(z - f_2)(z - p_{13})(z - r_{13}) +$$
$$+ \rho \alpha_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)(z - e_1)(z - f_1)(z - p_{23})(z - r_{23}) = 0.$$

2. *Si E_i, F_i sont les points doubles de ω_i et si P_{ik}, R_{ik} sont les point ayant les mêmes homologues dans ω_i, ω_k, tout point commun à deux des quaternes Q_i suivants*

$$Q_1 = E_1 F_1 P_{23} R_{23} \quad , \quad Q_2 = E_2 F_2 P_{31} R_{31} \quad , \quad Q_3 = E_3 F_3 P_{12} R_{12}$$

appartient aussi au troisième.

En vertu de l'égalité (7) on a

$$(Z_1 Z_3 Z_2 Z) = \frac{\Delta_3 \Delta_{12}}{\Delta_1 \Delta_{32}}.$$

Mais

$$(Z_1 Z_3 Z_2 Z) = 1 - (Z_1 Z_2 Z_3 Z) = 1 - \rho = 1 - \frac{\Delta_2 \Delta_{13}}{\Delta_1 \Delta_{23}},$$

de sorte que l'on a l'identité

(9) $$\Delta_1 \Delta_{23} + \Delta_2 \Delta_{31} + \Delta_3 \Delta_{12} = 0,$$

et tout binome $z - \alpha$ qui divise deux termes du premier membre divise aussi le troisième. Il suffit de se reporter aux expressions (5), (6) pour que le théorème soit justifié.

3. *Un seul point commun est assuré aux quaternes Q_i* (2) *dans chacun des cas suivants :*

1° deux seulement des ω_i ont un seul point double commun :

2° les trois ω_i ont un couple commun d'éléments homologue distincts.

Un point double commun aux trois ω_i compte pour deux points communs aux quaternes Q_i.

En effet, par le 1° on a par exemple $E_1 = E_2$ distinct de E_3, F_3, mais on a nécessairement $E_1 = E_2 = P_{12}$ par exemple. Le 2° donne $P_{23} = P_{31} = P_{12}$.

Si l'on a $E_1 = E_2 = E_3$, on a aussi $P_{12} = P_2 = P_{31}$.

4. L'équation (8), du quatrième degré en z pourvu qu'elle ne soit pas une identité, prouve qu'*il existe généralement quatre points Z tels que chacun d'eux forme avec ses homologues Z_i dans les ω_i*

un rapport anharmonique de valeur arbitrairement choisie ϱ. Ces quatre points Z varient avec ϱ ou l'un d'eux est fixe selon que les polynomes $\Delta_2 \Delta_{31}$, $\Delta_1 \Delta_{23}$ n'ont aucun facteur linéaire commun ou en ont un, c'est-à-dire selon que les quaternes Q_i (2) n'ont aucun point commun ou en ont un.

Par suite (3),

1° *si deux quelconques des homographies* ω_i *n'ont pas de point double commun et si les trois* ω_i *n'ont pas de couple commun d'éléments homologues, le groupe* (Z) *des quatre points* Z *tels que* $(Z_1 Z_2 Z_3 Z)$ *ait une valeur* ϱ *engendre, lorsque* ϱ *varie dans l'ensemble des nombres complexes, une involution du quatrième ordre dont font partie les trois quaternes* Q_i.

Ceux-ci sont donnés par ϱ infini, nul ou, en vertu de (9), égal à 1.

2° *Si deux seulement des* ω_i *ont un seul point double cummun tandis que les trois* ω_i *n'ont aucun couple commun, ou bien si les trois* a_i *ont un seul couple commun d'éléments homologues distincts tandis que deux quelconques d'entre elles n'ont pas de point double commun, les trois points variables dans le groupe* (Z) *sont les ternes d'une involution cubique.*

3° *Le groupe* (Z) *n'a que deux points variables et conjugués dans une involution de Möbius si*

a) *les* ω_i *n'ayant aucun couple commun d'éléments homologues distincts,*

α) *deux homographies,* par exemple ω_1, ω_2, *ont les mêmes points doubles* $E_1 = F_1$, $E_2 = F_2$ *distincts de ceux de la troisième,* et cette involution I est

$$I = (P_{23} R_{23}\ ,\ P_{31} R_{31}\ ,\ E_3 F_3);$$

β) *une homographie, soit* ω_1, *a un point double commun le même ou non, avec chacune des deux autres,* d'où

$$E_1 = E_2 = E_3\ ,\quad F_1 \neq F_2 \neq F_3\ ,\quad I = (F_1 P_{23}\ ,\ F_2 P_{31}\ ,\ F_3 P_{12})$$

ou

$$E_1 = E_2\ ,\quad F_1 = E_3\ ,\quad F_3 \neq F_3\ ,\quad I = (P_{23} R_{23}\ ,\ F_2 R_{31}\ ,\ F_3 R_{12});$$

b) *les* ω_i *ont un seul couple commun d'éléments homologues distincts et deux seulement d'entre elles ont un seul point double commun,*

$$E_1 = E_2\ ,\quad I = (F_1 P_{23}\ ,\ F_2 P_{31}\ ,\ E_3 F_3);$$

c) *les* ω_i *ont deux couples communs de points homologues distincts,* d'où

$$I = (E_1 F_1\ ,\ E_2 F_2\ ,\ E_3 F_3),$$

et ce dernier cas établit le théorème classique : *si des homographies binaires appartiennent à un faisceau linéaire ayant pour base deux couples d'éléments homologues distincts, leurs éléments doubles sont conjugués dans une involution quadratique.*

4°. *Un seul point du groupe* (Z) *est variable et lié homographiquement à* ρ *si*

a) *les* ω_i *n'ayant aucun couple commun d'éléments homologues distincts,*

α) *deux* ω_i *ont les mêmes points doubles dont un seul est double pour la troisième homographie ;*

β) *chacune des* ω_i *a deux points doubles distincts dont chacun appartient à deux* ω_i *;*

b) *les* ω_i *ont un seul point double commun et un seul couple commun de points homologues distincts.*

5. *Le rapport anharmonique* $\rho = (Z_1\, Z_2\, Z_3\, Z)$ *est constant dans deux cas :*

les ω_i *ont les mêmes points doubles ;*

les ω_i *ont un seul couple commun de points homologues distincts* P, Q, *chacune d'elles ayant des points doubles distincts dont chacun est double pour deux* ω_i .

Tels sont en effet les deux seuls cas (**3**) où les quaternes Q_i (**2**) sont identiques. La valeur constante de ρ tirée de l'égalité (8) est

$$\rho = \frac{\alpha_2\,(\alpha_1\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_1)}{\alpha_1\,(\alpha_2\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_2)}.$$

Comme les affixes des homologues M_1, M_2, M_3 dans $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ du point à l'infini M sont

$$m_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}\ ,\quad m_2 = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}\ ,\quad m_3 = -\frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

on voit que la valeur de ρ est

$$\frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} = (m_1, m_2, m_3, \infty) = (M_1\, M_2\, M_3 M).$$

Le premier cas est bien connu dans la théorie des faisceaux linéaires d'homographies. Nous allons nous occuper du second cas, et nous dirons que ces *homographies sont du type T.*

Il résulte de ce qui précède que

1° *Si* A_1, A_2, A_3, P, Q *sont cinq points distincts arbitraires dans le plan de Gauss, les homographies*

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_2\, A_3\, P \\ A_2\, A_3\, Q \end{pmatrix}\ ,\quad \omega_2 = \begin{pmatrix} A_3\, A_1\, P \\ A_3\, A_1\, Q \end{pmatrix}\ ,\quad \omega_3 = \begin{pmatrix} A_1\, A_2\, P \\ A_1\, A_2\, Q \end{pmatrix}$$

sont du type T;

2° *trois homographies* ω_i *telles que* $\varrho = (Z_1 Z_2 Z_3 Z)$ *a une même valeur pour cinq positions du point* Z *sont du type* T, *car l'équation* (8) *du quatrième degré en* z *ayant par hypothèse cinq racines pour un* ϱ *donné est vérifiée pour toute valeur de* z.

6. *Pour que trois homographies* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *de points doubles distincts* $(A_2, A_3), (A_3, A_1), (A_1, A_2)$ *soient du type* T, *il faut et il suffit que les homologues* Z_1, Z_2, Z_3 *d'un seul point* Z *donnent l'involution de Möbius*

$$I = (A_1 Z_1, A_2 Z_2, A_3 Z_3).$$

Tout autre point Z *conduit à une involution analogue, et si* PQ *est le couple commun aux* ω_i, *le point* Q *est le conjugué de* Z *dans toutes ces involutions.*

La valeur constante de $\varrho = (Z_1 Z_2 Z_3 Z)$ *est celle de* $(A_1 A_2 A_3 Q)$.

La condition relative à l'existence de l'involution I est nécessaire car si

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_2 A_3 P Z \\ A_2 A_3 Q Z_1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} A_3 A_1 P Z \\ A_3 A_1 Q Z_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 P Z \\ A_1 A_2 Q Z_3 \end{pmatrix},$$

on a les involutions

$$I_1 = (A_2 A_3, QZ, PZ_1), \quad I_2 = (A_3 A_1, QZ, PZ_2),$$
$$I_3 = (A_1 A_2, QZ, PZ_3)$$

harmoniques respectivement à ω_1, ω_2, ω_3, et par suite les homographies

$$I_2 I_1^{1)} = \begin{pmatrix} A_2 Q Z Z_1 \\ A_1 Q Z Z_2 \end{pmatrix}, \quad I_3 I_2 = \begin{pmatrix} A_3 Q Z Z_2 \\ A_2 Q Z Z_3 \end{pmatrix},$$

d'où les involutions

$$QZ, A_1 Z_1, A_2 Z_2 \quad , \quad QZ, A_2 Z_2, A_3 Z_3$$

qui, ayant deux couples communs, constituent la même involution I.

La condition est suffisante. Si l'on a

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_2 A_3 Z \\ A_2 A_3 Z_1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} A_3 A_1 Z \\ A_3 A_1 Z_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 Z \\ A_1 A_2 Z_3 \end{pmatrix}$$

et l'involution I, soient Q le conjugué de Z dans I, et P l'homologue de Q dans ω_1^{-1}. Des involutions I, I_1 on déduit l'homographie

$$I I_1 = \begin{pmatrix} A_2 A_3 Q Z P \\ Z_3 Z_2 Q Z A_1 \end{pmatrix},$$

d'où les involutions

1) Un tel produit se lit de droite à gauche.

$$Q\,Z,\ A_1\,A_3,\ P\,Z_2 \qquad , \qquad Q\,Z,\ A_1\,A_2,\ P\,Z_3$$

qui, étant harmoniques respectivement à ω_2 , ω_3 à cause des couples $A_1\,A_3$, A_1A_2, prouvent que P, Q sont homologues dans ω_2 , ω_3.

L'involution I permet d'écrire

$$\varrho = (Z_1Z_2\,Z_3\,Z) = (A_1\,A_2\,A_3\,Q).$$

Corollaires. 1°. *Les points* Z, Z_1, Z_2, Z_3 *sont concycliques ou collinéaires si* A_1, A_2, A_3, Q *jouissent aussi de cette propriété, et le quaterne* $Z_1\,Z_2\,Z_3\,Z$ *est harmonique s'il en est ainsi du quaterne* $A_1\,A_2\,A_3\,Q$.

2°. *Tout point* Z *est centre isodynamique du triangle* $Z_1\,Z_2\,Z_3$ *si* Q *est centre isodynamique du triangle* $A_1\,A_2\,A_3$, *proprement dit ou aplati,* car cela a lieu si $\varrho = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

7. *Pour que trois homographies* ω_i *de points doubles* (A_2,A_3), (A_3,A_1), (A_1,A_2) *soient du type T, il faut et il suffit que le produit de leurs invariants*

$$(A_1\,A_3\,Z\,Z_1) = k_1 \quad , \quad (A_3\,A_1\,Z\,Z_2) = k_2 \quad , \quad (A_1\,A_2\,Z\,Z_3) = k_3$$

soit égal à l'unité.

La valeur constante de $\varrho = (Z_1Z_2Z_3Z)$ *est*

$$\frac{1-k_2}{k_2\,(k_1-1)}. \tag{10}$$

La condition est nécessaire car si les ω_i ont un couple commun PQ, on a

$$k_1 = (a_2\,a_3\,p\,q) \quad , \quad k_2 = (a_3\,a_1\,p\,q) \quad , \quad k_3 = (a_1\,a_2\,p\,q)$$

et par suite

$$k_1\,k_2\,k_3 = 1. \tag{11}$$

La condition est suffisante car si l'on a

$$(a_2\,a_3\,z\,z_1)\,(a_3\,a_1\,z\,z_2)\,(a_1\,a_2\,z\,z_3) = 1,$$

on en déduit par développement des rapports anharmoniques

$$\frac{a_3-z_1}{a_2-z_1}\cdot\frac{a_1-z_2}{a_3-z_2}\cdot\frac{a_2-z_3}{a_1-z_3} = 1,$$

relation qui affirme l'existence de l'involution $(A_1\,Z_1,\ A_2\,Z_2,\ A_3\,Z_3)$ et par suite (6) celle d'un couple commun PQ aux ω_i .

Les équations

$$(a_2\,a_3\,z\,z_1) = k_1 \quad , \quad (a_3\,a_1\,z\,z_2) = k_2 \quad , \quad (a_1\,a_2\,z\,z_3) = k_3$$

des ω_i ou

$$(1-k_1)\,z\,z_1+(k_1\,a_2-a_3)\,z+(k_1\,a_3-a_2)\,z_1+(1-k_1)\,a_2a_3=0$$

et ses analogues donnent la valeur de ϱ sous la forme

$$(12)\qquad \varrho=\frac{1-k_2}{1-k_1}\cdot\frac{(a_2-a_1)\,k_1\,k_3+(a_1-a_3)\,k_3+a_3-a_2}{(a_3-a_1)k_2\,k_3+(a_2-a_3)\,k_2+a_1-a_2}\,.$$

Si, en vertu de (11), on remplace $k_1\,k_3$ par $\frac{1}{k_2}$, le second facteur du produit (12) devient $-\frac{1}{k_2}$, d'où l'expression (10) de ϱ.

Corollaire. *Les égalités*

$$(a_2\,a_3\,p\,q)=k_1\quad,\quad(a_3\,a_1\,p\,q)=k_2\quad,\quad(a_1\,a_2\,p\,q)=k_3$$

entraînent (6)

$$(a_1\,a_2\,a_3\,q)=\frac{1-k_2}{k_2\,(k_1-1)}\,,\ (a_1\,a_2\,a_3\,p)=(a_1\,a_2\,a_3\,q)\,(a_1\,a_2\,q\,p)=\frac{k_1(1-k_2)}{k_1-1}.$$

8. *Pour que trois homographies ω_i de points doubles (A_2,A_3), (A_3,A_1), (A_1,A_2) soient du type T, il faut et il suffit que les quaternes $Z_1\,Z_2\,Z_3\,Z$, $Z'_1\,Z'_2\,Z'_3\,Z'$ formés par deux points Z, Z' distincts de A_1, A_2, A_3 et par leurs homologues se correspondent dans une homographie.*

La condition est nécessaire puisque ϱ est constant. Prouvons qu'elle est suffisante. Des homographies

$$\omega_1=\begin{pmatrix}A_2\,A_3\,Z\,Z'\\A_2\,A_3\,Z_1Z'_1\end{pmatrix}\quad,\quad\omega_2=\begin{pmatrix}A_3\,A_1\,Z\,Z'\\A_3\,A_1\,Z_1Z'_2\end{pmatrix}\quad,\quad\omega_3=\begin{pmatrix}A_1\,A_2\,Z\,Z'\\A_1\,A_2\,Z_3Z'_3\end{pmatrix}$$

on déduit les involutions

$$J_1=(A_2A_3,\,ZZ'_1,\,Z'Z_1)\ ,\ J_2=(A_3A_1,\,ZZ'_2,\,Z'Z_2)\ ,\ J_3=(A_1A_2,\,ZZ'_3,\,Z'Z_3)$$

et, de l'homographie

$$\begin{pmatrix}Z_1\,Z_2\,Z_3\,Z\,E\,F\\Z'_1Z'_2Z'_3Z'\,E\,F\end{pmatrix}$$

existante par hypothèse, les involutions

$$(EF,\,ZZ'_1,\,Z'Z_1)\quad,\quad(EF,\,ZZ'_2,\,Z'Z_2)\quad,\quad(EF,\,ZZ'_3,\,Z'Z_3).$$

Les involutions J_1, J_2, J_3 ont dès lors le couple commun EF, et l'on a donc les homographies

$$J_2\,J_1=\begin{pmatrix}E\,F\,A_2\,Z'_1\,Z_1\\E\,F\,A_1\,Z'_2\,Z_2\end{pmatrix}\quad,\quad J_3\,J_2=\begin{pmatrix}E\,F\,A_3\,Z'_2\,Z_2\\E\,F\,A_2\,Z'_3\,Z_3\end{pmatrix}$$

auxquelles est harmonique l'involution

$$EF, A_1Z_1, A_2Z_2, A_3Z_3,$$

et celle-ci assure un couple commun aux ω_i (6).

Remarque. Puisque les homologues de A_1 dans $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont A'_1, A_1, A_1, on peut considérer comme égaux les ϱ provenant des cinq points A_1, A_2, A_3, Z, Z', d'où le type T des ω_i (5).

9. *Etant données trois homographies ω_i du type T, le triangle podaire LMN de tout point Z dans le triangle $Z_1Z_2Z_3$ que forment les homologues de Z reste semblable à un triangle fixe lorsque Z varie.*

Si r, θ sont le module et l'argument du nombre constant ϱ, on a

$$(Z_1 Z_2 Z_3 Z) = re^{i\theta}.$$

Mais en vertu du théorème de Schick [1]), ce rapport anharmonique est le conjugué de $(LMN\infty)$ si ∞ désigne le point à l'infini du plan de Gauss. On a donc

$$\left|\frac{LN}{MN}\right| = r \quad , \quad (\overline{NM}, \overline{NL}) = -\theta,$$

d'où le théorème.

Corollaire. *Si ϱ est réel, LMN est la droite de Simson de Z dans le triangle $Z_1Z_2Z_3$, et le quotient $\left|\frac{LN}{MN}\right|$ est constant.*

10. Si l'on suppose A_1, A_2, A_3 (7) sur une droite d et les invariants k_1, k_2, k_3 réels, les homographies ω_i du type T sont hyperboliques et créent sur leur droite double commune d trois projectivités superposées ayant le couple commun PQ car (7) les nombres $(a_1a_2a_3q), (a_1a_2a_3p)$ sont réels. En projetant ces projectivités sur une conique Γ et en désignant par la même lettre un point de d et sa projection sur Γ, on a la construction suivante, plus simple que celle de M. D. Barbilian.

Si trois homographies $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ portées par une conique Γ ont un couple commun PQ et les points doubles $(A_2, A_3), (A_3, A_1), (A_1, A_2)$, les homologues Z_1, Z_2, Z_3 de tout point Z sont sur les droites projetant de P les intersections de la droite QZ avec les droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, car les homographies

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_2 & A_3 & P & Z \\ A_2 & A_3 & Q & Z_1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} A_3 & A_1 & P & Z \\ A_3 & A_1 & Q & Z_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & P & Z \\ A_1 & A_2 & Q & Z_3 \end{pmatrix}$$

donnent les involutions qui leur sont harmoniques

$$(A_2A_3, QZ, PZ_1), (A_3A_1, QZ, PZ_2), (A_1A_2, QZ, PZ_3).$$

1) Voir R. Deaux, *loc. cit.*, page 154.

On peut d'ailleurs retrouver comme suit la construction de M. Barbilian. De l'involution (6)

$$(A_1 Z_1,\ A_2 Z_2,\ A_3 Z_3,\ ZQ)$$

on déduit que les droites $A_1 Z_1$, $A_2 Z_2$, $A_3 Z_3$, ZQ concourent en un point M. Si Z décrit la conique Γ, la ponctuelle engendrée est projective à celles que décrivent les points Z_1, Z_2, Z_3, et les projectivités entre faisceaux

$$A_1(Z_1) \overline{\wedge} A_2(Z_2) \overline{\wedge} A_3(Z_3) \overline{\wedge} Q(Z)$$

prouvent que le point M décrit une conique μ passant par A_1, A_2, A_3, Q et tangente en Q à la droite QP car si $Z = P$, on a $Z_1 = Z_2 = Z_3 = M = Q$. Dès lors,

Si deux coniques Γ, μ ont quatre points réels communs A_1, A_2, A_3, Q, et si une droite réelle issue de Q les rencontre en Z, M, les secondes intersections Z_1, Z_2, Z_3 de Γ avec les droites A_1M A_2M, A_3M, sont les homologues de Z dans trois homographies ayant respectivement pour points doubles (A_2, A_3) (A_3, A_1), (A_1, A_2) et telles que le rapport anharmonique $(Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z)$ est constant. La tangente en Q à μ recoupe Γ en un point P ayant même homologue Q dans les trois homographies, et l'on a $(Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z) = (A_1\ A_2\ A_3\ Q)$, ces rapports anharmoniques étant évalués sur Γ.

11. Reprenons le cas de trois homographies ω_i dans le plan de Gauss et pour lesquelles ϱ n'est pas constant (4). On a (1, 5)

$$(13)\qquad \frac{(z-e_2)(z-f_2)(z-p_{13})(z-r_{13})}{(z-e_1)(z-f_1)(z-p_{23})(z-r_{23})} = \varrho \times (M_2 M_1 M_3 \infty).$$

On sait que Z, Z_1, Z_2, Z_3 sont collinéaires ou concycliques si ϱ est réel. Par suite, *étant données trois homographies ω_i dans le plan de Gauss, le lieu d'un point Z collinéaire ou concyclique avec ses homologues Z_i est, si le rapport anharmonique $(Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z)$ n'est pas constant* (6, cor.), *une ligne l de Darboux*[1]) *définie par l'égalité d'angles*

$$(\overline{ZE_1}, \overline{ZE_2}) + (\overline{ZF_1}, \overline{ZF_2}) + (\overline{ZP_{23}}, \overline{ZP_{13}}) + (\overline{ZR_{23}}, \overline{ZR_{13}}) = (\overline{M_3M_1}, \overline{M_3M_2}) + n\pi;$$

E_i, F_i, M_i sont les points doubles et l'homologue du point à l'infini dans ω_i ; P_{ik}, R_{ik} sont les points ayant les mêmes homologues dans ω_i, ω_k. Dans le cas général, la ligne l est circonscrite aux trois quaternes Q_i (2).

Les cas spéciaux se présentent dans les diverses hypothèses exa-

1) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, page 69.

minées à l'article **4**, car le premier membre de l'égalité (13) se simplifie. Les cas les plus simples sont ceux qui répondent au 4^0 de cet article car la liaison entre z et ϱ étant homographique,

il existe alors une droite ou un cercle l de points Z dont les droites ou cercles homologues portent les ponctuelles $(Z_1), (Z_2), (Z_3)$ projectives à (Z) et telles que quatre points homologues quelconques Z, Z_1, Z_2, Z_3 sont sur une droite ou sur un cercle.

Deux translations et une rotation, une involution de Möbius et deux rotations autour de ses points doubles, trois similitudes directes ayant un couple commun de points homologues conduisent au cas spécial que l'on vient de citer.

Faculté Polytechnique de Mons
(Belgique)

Reçu le 10 Mai 1947)

SUR UNE CERTAINE SURFACE REGLEE LIÉE À UNE SURFACE PERISPHÈRE

par

GH. CIOBANU

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant:

Soit:

$$(C_1)\quad x = a(s),\ y = b(s)\ ,\quad z = c\ (s)$$

et

$$(C_2)\quad x = x_1(\sigma),\ y = y_1(\sigma)\ ,\quad z = z_1(\sigma)$$

les équations paramétriques de deux courbes d'un espace euclidien S_3.

Dans le plan normal de (C_1), considérons un cercle (C) de centre (a,b,c) et de rayon variable $R(s)$. Soit $P_1\ (x_1,y_1,z_1)$ le point de rencontre de ce plan normal et de C_2 , et (D) la droite polaire de ce point par rapport à ce cercle.

Notre problème sera d'étudier la surface reglée engendrée par (D). Dans cette Note nous étudierons le cas particulier où cette reglée se réduit à une surface dévéloppable.

Soient:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0 \\ a'\,(x-a)+b'\,(y-b)+c'\,(z-c)=0 \end{cases}$$

les équations du cercle (C), où par un accent nous désignons la dérivée par rapport au paramètre, s, que nous supposerons l'arc de (C_1).

Les coordonnées (x_1,y_1,z_1) du point P, d'intersection entre (C_2) et le plan normal de (C_1) en (a,b,c) satisfont évidemment à la relation:

$$(2)\qquad a'\,(x_1-a)+b'\,(y_1-b)+c'\,(z_1-c)=0.$$

Les équations de la polaire seront:

$$(3)\qquad \begin{cases} (x_1-a)\,x+(y_1-b)\,y+(z_1-c)\,z+n=0 \\ a'x+b'y+c'z+m'=0 \end{cases}$$

où nous avons noté

$$n = -[a(x_1 - a) + b(y_1 - b) + c(z_1 - c) + R^2];$$
$$m = -\frac{d}{ds}\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Posons ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q. \end{cases}$$

Dans notre cas particulier, nous aurons :

$$(4) \qquad x = \frac{A_1}{A_3} z + \frac{B_1}{A_3} \qquad A_3 \neq 0,$$
$$y = \frac{A_2}{A_3} z + \frac{B_2}{A_3}$$

où A_1, A_2, A_3, et M_1, M_2, A_3 sont respectivement les mineurs des matrices

$$\left\| \begin{matrix} x_1 - a & y_1 - b & z_1 - c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\| , \quad \left\| \begin{matrix} x_1 - a & y_1 - b & n \\ a' & b' & m' \end{matrix} \right\|.$$

La condition que la reglée soit développable s'écrit, dans notre notation,

$$\alpha' q' - \beta' p' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(5) \qquad (A'_3 A_2 - A_3 A'_1)(B'_1 A_2 - B_1 A'_3) +$$
$$+ (A'_1 A_3 - A_1 A'_3)(B'_2 A_3 - B_2 A'_3) = 0.$$

En effectuant les calculs, et en posant

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 - a \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} , \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 - a \\ x'_1 \\ a' \end{vmatrix} ,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b & n \\ a' & b' & m' \\ a'' & b'' & m'' \end{vmatrix} , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b & n \\ x'_1 & y'_1 & n' \\ a' & b' & m' \end{vmatrix} ,$$

on trouve :

$$A'_3 A_2 - A_3 A'_2 = (x_1 - a) D_1 + a' \Delta_1$$
$$A'_1 A_3 - A_1 A'_3 = (y_1 - b) D_1 + b' \Delta_1$$
$$B'_1 A_1 - B_1 A'_3 = (y_1 - b) D_2 + b' \Delta_2 - m' b' A_3$$
$$B'_2 A_3 - B_2 A'_3 = -(x_1 - a) D_2 - a' \Delta_2 + m' a' A_3$$

et la condition (5) devient :

$$(6) \qquad D_1 \Delta_2 - D_2 \Delta_1 - m' D_1 A_3 = 0.$$

En remplaçant dans (6) n, n', m', m'' par leurs valeurs et en tenant compte de (2) et encore des relations :

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \quad , \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

la relation (6) s'écrit :

$$(7) \qquad K^2 \begin{vmatrix} x'_1 \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} = 2RR' \begin{vmatrix} x_1 - a \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - a \\ x'_1 \\ a' \end{vmatrix}.$$

Cette dernière équation est la seule relation qui doit être satisfaite par (C_2) afin que notre condition soit remplie. La relation (2) déterminera ensuite la correspondance entre les deux courbes. (7) peut être regardée comme une équation différentielle ordinaire linéaire en z_1, les fonctions x_1 et y_1 étant arbitraires.

Nous allons étudier maintenant quelques cas particuliers de ce problème, cas où l'interprétation géométrique ressort immédiatement.

1. *La courbe (C_1) est une droite.*

On a alors :

$$a' = \text{const.} \quad , \quad b' = \text{const.} \quad , \quad c' = \text{const.}$$

La relation (7) se réduit alors à :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - a \\ x'_1 \\ a' \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire, la tangente à (C_2) rencontre la droite (C_1). Par des considérations intuitives, il suit que (C_2) est une courbe plane située dans un plan passant par (C_1). La surface reglée est un cylindre avec des génératrices orthogonales au plan de (C_2).

2. *Le plan osculateur de (C_1) passe par la tangente au point correspondant de (C_2).*

Ce plan contient alors $P(x_1, y_1, z_1)$. Or celui-ci, se trouvant déjà dans le plan normale, il suit qu'il se trouve sur la normale principale de (C_1). La relation (7) est alors identiquement satisfaite.

En particulier cette condition est remplie si les tangentes au points correspondants sont parallèles.

3. *Le point P se trouve sur la normale principale à (C_1).*

Posons dans ce cas :

$$x_1 - a = \lambda a'' \quad , \quad y_1 - b = \lambda b'' \quad z_1 - c = \lambda c''$$

où

$$\lambda = \delta\varrho \, ,$$

δ étant la distance entre les points correspondants et ϱ le rayon de

courbure de (C_1). La relation (2) est identiquement satisfaite et (7) se réduit à:

$$(R^2 - \varrho\delta)\begin{vmatrix} x_1' \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} = 0.$$

En excluant le cas

$$\begin{vmatrix} x'_1 \\ a' \\ a'' \end{vmatrix} = 0$$

qui signifie que le plan osculateur à (C_1) passe par la tangente à (C_2), et qui a été étudié plus haut, on trouve

9) $$\delta = \frac{R^2}{\varrho}.$$

Par des considérations intuitives on constate que les génératrices de la développable sont parallèles aux binormales de (C_1).

4. *Le point P se trouve sur la binormale à* (C_1).

On a alors:

$$x_1 - a = k\beta_1 \quad , \quad y_1 - b = k\beta_2 \quad , \quad z_1 - c = k\beta_3$$

où k est la distance entre les points correspondants et β_1, β_2, β_3 les cosinus directeurs de la binormale. (7) devient alors:

(10) $$k'R^2 - 2RR'k + k^2\frac{\varrho}{T} = 0,$$

ϱ et T étant respectivement les rayons de courbure et de torsion de (C_1). On trouve alors:

$$k = \frac{R}{\sqrt{\int \frac{\varrho}{T}\,ds}}.$$

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 10 Mai 1947).

SUR LES SURFACES LIEU DE CONIQUES

par

C. P. BOGDAN

1. Dans une note[1]) publiée dans ce Bulletin j'ai fait une classification des familles de coniques de l'espace ordinaire, familles dépendant d'un paramètre.

Cette classification est faite suivant la nature de la surface des plans des coniques, suivant les points communs de deux coniques infiniments voisines et suivant que la droite caractéristique d'un plan est tangente ou non à la conique du plan. La surface développable des plans des coniques peut être non dégénérée, dégénérée en un cône ou en un faisceau de plans.

G. Thomsen[2]) a fait une classification semblable des surfaces lieu de coniques, en considérant une conique comme une quadrique dégénérée tangentiellemet, c'est-à-dire en la considérant comme un point d'une V_8^4 appartenant à un S_9 représentant les quadriques de l'espace ordinaire.

La surface lieu de coniques est représentée par une courbe appartenant à cette variété. La tangente en un point de cette courbe, représente le faisceau de quadriques qu'il considère, faisceau déterminé par deux coniques infiniment voisines Cette tangente appartient à la variété ou a quatre points communs avec elle. Deux de ces points coïncident avec le point de contact. Suivant que les deux autres points sont distincts, ou coïncident entre eux ou avec le point de contact, on a la classification de Thomsen.

J'étudie ici le cas général et j'attache un tétraèdre à une conique de la surface. Ce tétraèdre est déterminé par deux coniques infiniment voisines, c'est à dire par le voisinage du premier ordre d'une conique, comme a montré aussi Thomsen dans son article.

2. Soit Σ une surface lieu de coniques, γ une de ces coniques, π son plan et D la droite caractéristique du plan. Comme nous sommes dans le cas général, la droite D rencontre la conique γ en deux points

distincts a et c, et soit b le pôle de cette droite par rapport à la conique.

Comme deux coniques infiniments voisines n'ont aucun point commun, les tangentes aux courbes décrites par les points a et c, sont distinctes des tangentes à la conique dans ces points. Au moins un de ces points a et c est divers du point caractéristique du plan et soit a ce point. Donc la tangente à la courbe décrite par le point a, est diverse de la droite D et de la tangente (a,b) à la conique et elle rencontre de nouveau la conique en un point que nous allons prendre comme le point unité du plan de la conique. Ainsi le triangle de référence du plan est complètement déterminé.

Le point b décrit une courbe qui n'est pas sur la surface et la tangente à cette courbe est une droite non située dans le plan π car le point b n'est pas sur la droite D. C'est sur cette droite que nous allons prendre le quatrième sômmet du tétraèdre de référence. Nous allons distinguer deux cas, suivant que la tangente à la courbe décrite par le point unité du plan incide ou non la tangente à la courbe b.

Si elle ne rencontre pas la tangente à la courbe b, nous allons prendre sur cette dernière droite comme quatrième sômmet d et comme point unité $(b+d)$, les points ou elle est rencontrée par les plans déterminés par la tangente à la courbe $a+b+c$ et respectivement par les points a et c. Si la tangente à la courbe $a+b+c$ rencontre la tangente à la courbe b, nous allons prendre ce point comme le quatrième sômmet d et comme point unité $b+d$, le point où la tangente à la courbe $a-b+c$ recontre la tangente à la courbe b. Le point $a-b+c$ est le point où la droite $(b,a+b+c)$ rencontre de nouveau la conique γ. La tangente à la courbe $a-b+c$ rencontre aussi la tangente á la courbe b.

Ainsi le tétraèdre de référence est complètement déterminé par le voisinage du premier ordre d'une conique de la surface.

3. Avec ce choix du tétraèdre de référence et si u et v sont deux paramètres, l'équation de la surface sera

$$X = a(v)\,u^2 + b(v)\,u + c(v)$$

avec les conditions

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= m_1 a + n_1 b + n_1 c \\
\dot{b} &= \quad n_2 b \quad + q_2 d \\
\dot{c} &= m_3 a + n_3 b + p_3 c \\
\dot{d} &= m_4 d + n_4 b + p_4 c + q_4 d
\end{aligned}$$

et selon le choix du point unité du tétraèdre et du point d on a : dans le premier cas

$$p_3 = n_2 + n_3 \quad ; \quad n_1 + n_2 + n_3 = m_3 + m_2 + q_2.$$

et dans le second

$$m_1 + m_3 = n_1 + n_2 + n_3 = n_1 + p_3 \quad ; \quad q_2 = 2(n_1 + n_3).$$

On doit avoir :

$n_1, q_2 \neq 0$ car les points a et d ne sont pas fixes,

$m_3 \neq 0$ car le point c n'est pas commun à deux coniques infiniment voisines.

Le plan tangent en un point de la surface a l'équation

$$(X x x_u x_v) = 0 ,$$

donc

$$(X, au^2+bu+c, 2au+b, (m_1u^2+m_3)a+(n_1u^2+n_2u+n_3)b+(n_1u^2+p_3)c+q_2ud) = 0$$

et en introduisant des coordonnées locales

$$X = x_1 a + x_2 b + x_3 c + x_4 d,$$

l'équation du plan tangent sera

$$q_2u(x_1-2ux_2+u^2x_3)+[n_1u^4-2n_1u^3-(2n_2-p_3+m_1)u^2-2n_3u+m_3]x_4=0.$$

Les plans tangents à la surface le long d'une conique forment une surface développable de la quatrième classe. Le plan de la conique est tangent à la surface aux points a et c, qui correspondent aux valeurs o et ∞ de u. La tangente en un point est déterminée par ce point et par le point $X = u^2 a + ub + c$. Pour que cette tangente coïncide avec sa conjugée, on doit avoir :

$$n_1 u^4 - 2n_1 u^3 + (m_1 - n_2 - n_3) u^2 + 2n_3 u + m_3 = 0.$$

Comme n_1 et m_3 ne sont pas nuls, il s'en suit que sur chaque conique il y a quatre points pour lesquels la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ coïncide avec sa conjugée.

Dans ce cas on voit que nous avons 9 ou 8 invariants.

Les lignes asymptotiques sont données par l'équation

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

En faisant abstraction du facteur $(a\,b\,c\,d)$ qui n'est pas nul, les coefficients de cette équation sont :

$$L = 2q_2\,u, \quad M = [n_1 u^4 - 2n_1 u^3 + (2n_1 - p_3 + m_1) u^2 + 2n_3 u - m_3]\, q_2,$$

$$N = A_6 u^6 + A_5 u^5 + A_4 u^4 + A_3 u^3 + A_2 u^2 + A_1 u + A_0$$

où A_i sont des fonctions des invariants et de leurs premières dérivées.

On a : $LN - M^2 = -n_1^2 q_2^2 u^{16} + \ldots - m_3^2 q_2^2$.

Comme n_1, q_2 et m_3 sont différents de zéro, cette relation ne

peut pas être identiquement nule, donc la surface ne peut pas être développable, comme a montré aussi Thomsen dans son article.

Au point a $(u=\infty)$ on a :

$$L=0, \quad M=n_1 q_2, \quad N=n^2_1 q_2.$$

Les tangentes asymptotiques sont la droite (a,b) et la droite

$$du+n_1 dv=0.$$

Cela nous donne une interprétation de l'invariant n_1. C'est le birapport de la droite D, la droite (a,b), la tangente à la conique au point a et de la deuxième tangente asymptotique (pour $-n_1$).

Au point $c\,(u=0)$ on a :

$$L=0, \quad M=-m_3 q_2, \quad N=-q_2 m_3 n_3.$$

Dans ce point les tangentes asymptotiques sont la droite (a,c) et la droite $du+n_3 dv=0$ qui nous donne la même interprétation du paramètre n_3.

Si $n_3=0$, le point c est le point caractéristique du plan et dans ce cas la deuxième tangente asymptotique est la droite D.

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 1 Mai 1947)

Travaux cités

1. C. P. Bogdan - *Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire.* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy. T, 1, fasc, 2. p. 292.
2. G. Thomsen - *Über Kegelschnitte im Raum.* Math. Ann. Bd. 108.

RAPPORT ENTRE LA CHALEUR MOLÉCULAIRE DE FUSION ET LA TEMPÉRATURE ABSOLUE DE FUSION DES MÉTAUX MONOATOMIQUES ET DES COMPOSÉS CHIMIQUES

par

STÉFAN PROCOPIU

1. Le phénomène de fusion se manifeste par deux constantes, la chaleur de fusion L et la température absolue T de fusion. Pour un corps homogène il doit y en avoir une relation entre ces deux paramètres, et cette relation pourrait apporter des éclaircissements sur le mécanisme de la fusion. Dans le cas de la vaporisation, on connaît une telle relation entre la chaleur moléculaire de vaporisation et la température absolue d'ébullition, c'est la formule de Trouton-Pictet. On peut envisager qu'une relation analogue doit exister pour la fusion. Une telle relation a été d'ailleurs considérée par Th. W. Richards [1]).

$$\frac{LM}{T} = K \tag{1}$$

où L est la chaleur de fusion pour un gramme de substance, M la masse moléculaire, T la température de fusion, et K une constante.

La valeur de cette constante est en moyenne 2,2 pour les éléments monoatomiques, sauf pour *Bi* et *Sb*, qui présentent une constante K de valeur 4,5 et 5, et sauf le gaz *A*, qui a une constante de valeur 3,2. Parmi les composés chimiques, l'eau a une constante K égale à 5,4; les halogènes 9,6 et les composés à grand nombre d'atomes dans la molécule des valeurs de K plus grandes, par exemple la valeur 41 pour l'acide stéarique. On voit par ces exemples que, dans la relation précédente, la constante K n'a pas une valeur bien précise.

---

1) Th. W. Richards, Chem. News, 75, 1897, p. 278. Cité d'apres A. Eucken dans Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Bd. 3, 1926, p. 521. Voir encore H. Crompton, Chem. News, 58, 1903, p. 237, cité d'après G. Tammann, ZS. f. phys. Chem. 85, 1913, p. 273.

Le but de ce travail est justement de montrer qu'on peut trouver des valeurs égales pour la constante K, dans le cas des corps simples et pour des composés chimiques de formule analogue.

2. En partant du second principe de la Thermodynamique on arrive à une relation de proportionnalité entre L et T. En effet, dans une transformation isotherme, le principe de Carnot peut s'exprimer par la formule :

$$\frac{dA}{Q} = \frac{dT}{T}$$

où dA est la variation de l'énergie libre, Q est la quantité de chaleur absorbée du milieu extérieur dans la transformation isotherme, c'est-à-dire la chaleur latente de fusion à température constante, égale a L, et T la température absolue de fusion. Cette formule devient :

$$L = T\frac{dA}{dT}. \tag{2}$$

Si on savait le mécanisme de la fusion, on aurait connaissance de la fonction A, travail interne ou énergie libre, et alors on aurait la possibilité de trouver la constante de proportionnalité entre L et T.

Mettons que le travail A consiste dans la variation de la pression p, alors que le volume prend deux valeurs v_1 et v_2, et que les deux variables sont reliées par la formule des gaz parfaits

$$pV = RT \tag{3}$$

au moins dans le cas de la fusion. La valeur de $\frac{dA}{dT}$ sera $(v_2 - v_1)\frac{dp}{dt}$, et alors, de la relation (2), on obtiendra la formule de Clapeyron ; ou bien cette valeur déduite de (3) sera $\frac{dA}{dT} = R$ et alors la formule (2) deviendra

$$LM = TR, \tag{4}$$

la constante R des gaz étant considérée pour une molécule-gramme M, de substance. Pour que la relation (4) soit valable, il faut que l'hypothèse représentée par (3) soit valable aussi, ce qui ne peut arriver, à la fusion, que pour les corps simples monoatomiques. Ce qui est véritablement le cas pour les éléments simples métalliques, qui sont monoatomiques à l'état gazeux et peut-être à l'état liquide.

3. On peut arriver à la même formule (4) par le raisonnement suivant, qui est valable pour les éléments métalliques monoatomiques :

Considérons l'entropie S de la substance à la température T de fusion. Elle est donnée par la formule

$$\Delta S_0 = \frac{LM}{T}. \tag{5}$$

L'entropie, pour être rapportée à une seule molécule, doit être divisée par le nombre N d'Avogadro. On trouve de la sorte,

$$\Delta S = \frac{LM}{TN}. \tag{6}$$

Si on compare la formule (5) à la formule (1), on constate que la constante de proportionnalité K de la fusion est justement l'entropie S_0 de la substance à la fusion.

Exprimons à présent cette entropie par la relation statistique de Boltzmann - Planck :

$$W_2 = W_1 e^{\frac{\Delta S}{k}} \tag{7}$$

où W_1 et W_2 sont les probabilités d'existence des molécules à l'état solide et à l'état liquide, et k est la constante de Boltzmann, ayant la valeur, $k = \frac{R}{N}$. En remplaçant la valeur de S, donnée par (6), et la valeur de k, dans la formule (7), on obtient :

$$W_2 = W_1 e^{\frac{LM}{RT}}. \tag{8}$$

Admettons que les probabilités W_1 et W_2 doivent tendre à devenir égales, lorsqu'elles se rapportent à une seule molécule. Dans ce cas, l'exposant de e doit tendre vers la valeur minimum, vers la valeur zéro. Par suite, la valeur de cet exposant est plus grande que zéro. On peut admettre que la valeur de cet exposant est égale à l'unité. On a

$$\frac{LM}{RT} = 1$$

d'où on déduit

$$\boxed{\frac{LM}{T} = R = 1{,}986} \tag{9}$$

où R est la constante des gaz et de valeur *1,986* calories, si L est mesuré en calories.

La relation (9) et la relation (1) sont égales si la constante de fusion K est égale à R, la constante des gaz. Ce résultat a été obtenu en faisant l'hypothèse que l'énergie calorique demandée pour la fusion et

représentée par la chaleur moléculaire de fusion LM est égale à l'énergie de translation des molécules monoatomiques. Cette énergie de translation est constituée de l'énergie potentielle plus l'énergie cinétique, pour un degré de liberté de la molécule à l'état solide. C'est-à dire :

$$\text{Energie de translation} = \frac{1}{2} RT + \frac{1}{2} RT = RT.$$

Avec cette hypothèse on arrive à la relation

$$LM = RT.$$

Mais on aurait pu admettre d'autres hypothèses, par exemple que l'énergie calorifique est nécessaire simplement à augmenter l'énergie cinétique des molécules monoatomiques. Dans ce cas on aurait la relation

$$LM = 1/2\, RT$$

et la constante de fusion dans la relation 1 serait

$$K = 1/2\, R = 1 \text{ calorie.}$$

On pourrait faire encore l'hypothèse que la valeur de K est de la forme

$$K = 1/2\ ,\ 1.\ ,\ 3/2\ ,\ 2\ ,\ 5/2\ ,\ \ldots\ ,\ R.$$

Les valeurs expérimentales vérifient dans un grand nombre de cas seulement la relation

(9 bis) $$K = R \text{ et } \frac{LM}{T} = R.$$

4. *Vérification expérimentales de la relation* (9).

La relation (9) est bien vérifiée par les métaux monoatomiques suivants :

Na, K, Be, Cu, Ag, Cd, Mg, Pb, Fe, Fe avec *4, 2%, C, Co, Al, Pd.*

Tous ces éléments monoatomiques présentent une constante K égale à 2, si la valeur de cette constante est donnée en calories. et si L est mesuré en calories. La constante K de fusion représente la variation de l'entropie de la substance au moment de la fusion ; elle est mesurée en calories par degré.

La vérification est moins bonne pour les métaux :

Au, Hg, Ni, Pt, Zn,

pour lesquels la constante K a des valeurs de *2,2* à *2,7* calories/degré. Enfin les métaux *Sn* et *Bi* s'écartent de la formule (9), car ils donnent pour la constante K les valeurs *3,3* et *5.*

De même que les éléments monoatomiques qui donnent une constante de fusion K égale à 2 calories par degré, il y a encore quel-

ques éléments dont la molécule est biatomique ou tétraatomique :

$$H_2 \ , \ O_2 \ , \ S_2 \text{ et } P_4$$

qui donnent pour constante K la même valeur 2.

Dans les tableaux suivants I et II sont portées les valeurs de L, M, T et le rapport $\frac{LM}{T}$ de tous ces éléments considérés. Les valeurs de L sont données en calories par gramme, et celles de T sont données en degrés

TABLEAU I.

Métaux monoatomiques.

Métal	L cal.	M	T° abs.	LM / T
Na	31,7	23	370	1,97
K	15,7	39,1	335	1,83
Be	(341)	9	1553	1,98
Cu	41,6	63,6	1356	2,0
Ag	21.07	107,9	1234	1,9
Cd	10,8	112,4	594	2,04
Mg	72	24,3	923	1,90
Pb	5,86	207,2	600	2,02
Fe	64,4	55,8	1803	1,99
Fe (4,2% C)	47,0	"	1442	1,82
Co	58,2	59	1763	1,95
Al	76,8	27	981	2,22
Pd	36,3	106,7	1827	2,13
Au	15,8	197,2	1337	2,33
Hg	2,77	200 6	234	2,37
Ni	73,8	58,7	1708	2,53
Pt	27,2	195,2	2028	2,62
Zn	28,13	65,4	692,5	2,66
Sn	14	118,7	505	3,3
Bi	12,6	209	541	5

TABLEAU II

Eléments bi-et tétraatomiques

Métal	L cal.	M	T° abs.	LM/T
H_2	14	2	14	2,0
O_2	3,3	32	54	1,96
S_2 monoclinique	10,8	64,2	392	1,8
S_2 rombique	9,37	"	386	1,6
P_4	5,03	124	317,2	1,97
D_2	11,7	4	18,65	2,47

TANÁRKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

absolus, d'après l' *Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1938, p. 393 et 413, et d'après le *Handbook of Chemistry and Physics*

Cleveland, Ohio, 1937, édition 21, p. 1307-1311. Pour l'hydrogène H_2 et le deutérium D_2, les valeurs sont données d'après A. Eucken, Propriétés calorifiques et thermiques des hydrogènes lourd et lèger. Journal de Physique, 7 sér, 7, 1936, p. 287.

Il ressort par l'examen de ces deux tableaux que le rapport $\frac{LM}{T}$ a des valeurs toutes voisines de 2, en calories par degré; c'est-à-dire on constate la validité de la formule (1) et (9), avec une constante K égale à R, la constante des gaz., pour les métaux monoatomiques et pour quelques éléments bi-et tétratomiques, comme H_2, O_2, S_2 et P_4. Il résulte que dans le cas des molécules monoatomiques, pour faire passer ces molécules de l'état solide à l'état liquide, il faut leur donner une énergie calorifique LM, nécessaire à leur communiquer une énergie de translation correspondant à un seul degré de liberté, l'énergie de translation étant constituée de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

La même explication peut être donnée pour les molécules diatomiques, lorsque celles-ci forment un seul bloc même à l'état liquide, sans aucune liberté de rotation pour les atomes qui les constituent. C'est le cas de la molécule de l'hydrogène, H_2, qui, d'après les recherches de A. Eucken, Berliner Akad. Berichte, 1912, p. 141, se comporte aux basses températures, au dessous de -193^0C, comme un gaz monoatomique. Il est possible que les molécules de O_2, S_2, P_4 se comportent de la même façon que l'hydrogène, au voisinage de leur point de fusion. Des recherches expérimentales futures vont nous renseigner si la chaleur spécifique moléculaire à volume constant, C_v, tend vers la valeur 3, au voisinage de la température de fusion, cette valeur 3 étant celle qui est prise par les métaux monoatomiques.

Dans la substance solide de H_2, les atomes sont bloqués dans la molécule, et, par la fusion, il restent encore bloqués.

5. J'ai déjà dit qu'on peut attendre pour la constante K des valeurs plus petites que $1R$, par exemple la valeur $1/2\ R = 1$ calorie, si la chaleur de fusion est nécessaire seulement pour transmettre à la

TABLEAU III.

Mn	L = 36,7	M = 54,9	T = 1533°abs	$\frac{LM}{T}$ = 1,3
Cr	32	52	2073	0,8
Li	32,8	6,9	459	0,5

molécule une énergie cinétique pour un seul degré de liberté. Voici les données pour les métaux, probablement monoatomiques, *Mn*, *Cr* et *Li*, qui ont véritablement une constante de fusion *K*, plus petite que *2*, et égale à *1,3*; *0,8* et *0,5*, respectivement. (Tableau III). Une autre explication est possible: ces éléments ont la molécule polyatomique, Mn_2, Cr_2, Li_4.

Les valeurs de *L* et *T*, pour ces trois éléments, sont données d'après l'*Ann. Bureau Longitudes*, Paris; mais il faut attendre des mesures plus récentes, avant de discuter la valeur de *K*. Souvent, dans les Traités, il y a de grandes différences pour la valeur de *L*. Ainsi la chaleur de fusion du Fer est 6 dans le Traité de Winkelmann 1906, et 59 dans le *Recueil de Constantes Physiques*, 1913, et 49,4 dans l'*Annuaire*, et 5,5 dans le *Handbook*. Des valeurs trop divergentes, pour avoir confiance en elles.

6. *Valeurs remarquables du rapport entre la chaleur moléculaire de fusion et la température de fusion des composés chimiques.*

Je veux montrer que si l'on considère divers composés chimiques, on peut encore écrire la relation (1)

$$\frac{LM}{T} = K$$

avec une constante *K*, ayant souvent une valeur simple et présentant certaines régularités.

Pour certains composés chimiques, ayant dans leur molécule plus de dix atomes, on peut énoncer, au moins en première approximation la règle suivante:

la constante entropique K de fusion est égale approximativement au nombre n d'atomes contenus dans la molécule. On peut écrire:

(10) $$K = \frac{LM}{T} = n\frac{R}{2} = n$$

$\frac{R}{2}$ correspond à *1* calorie et représente l'énergie pour un degré de liberté. Cela revient à dire que la constante *K* est egale à *n*, en calories.

Pour 45 composés chimiques, à molécule complexe et non symétrique, dont 36 composés organiques, dérivés halogénés du benzène, dérivés nitro du benzène, alcools bi-et tribasiques, phénols bibasiques, et 9 composés anorganiques, la plupart d'entre eux possédant dans leur molécule des molécules de H_2O, la relation (10) est valable à moins de 2/10 près.

Dans les deux listes suivantes IV et V sont rapprochés la valeur

de K, calculée d'après (1) et la valeur de n, le nombre des atomes. La dernière colonne contient le rapport K/n, dont la valeur est voisine de l'unité, lorsque la relation (10) est valable.

TABLEAU IV

Composés anorganiques

Substance	L cal.	T abs.	K	n	K/n
$MgCl_2.6H_2O$	41,2	389,7	21,6	21	1,03
$Mg(NO_3)_2,6H_2O$	38,2	363	26,7	27	0,99
$Mn(NO_3)_2,6H_2O$	28.8	299	27,7	27	1,02
$Ni(NO_3)_2,6H_2O$	36,4	329,7	32,7	27	1,2
$Zn(NO_3)_2.6H_2O$	31,1	309,4	30,1	27	1,1
$Cd(NO_2)_2,4H_2O$	25,3	332,5	23,5	21	1,1
$Ca(NO_3)_2,4N_2O$	34	315,1	25,4	21	1,2
$Na_2CrO_4,10H_2O$	39,2	296	45	37	1,2
$K_2Cr_2O_7$	29,7	270	13,1	11	1,2

Ces composés anorganiques donnent un rapport K égal au nombre n d'atomes.

Les composés anorganiques de structure analogue, $CaCl_2, 6H_2O$ *(L = 40,7; T = 302° abs)*, $Cu(NO_3)_2, 6H_2O$ *(L = 29,7 T = 297°)*, $Na_2SO_4 H_2O$ *(39,1; 281°)*, $Na_2SO_4, 10H_2O$ *(51,3: 304°)* et $Na_2HPO_4, 12H_2O$ *(L = 66,8; T = 309° abs)*, présentent un rapport $\frac{K}{n}$ qui s'écarte de l'unité avec les valeurs *1,4*; *1,5*; *1,6*; *1,4* et *1,7*.

Les composés organiques, dérivés halogénés du benzène et dérivés di-nitro, alcools bi-et tribasiques, phénols bibasiques, présentent une constante de fusion K, égale au nombre n des atomes de la molécule, et le rapport K/n est égal à l'unité, avec des valeurs entre *0,9* et *1,1*.

On peut donc écrire, pour tous ces composés à grand nombre d'atomes dans la molécule, la relation (1) sous la forme :

$$\frac{LM}{nT} = \frac{1}{2}R = 1. \tag{11}$$

Le second membre de cette formule a la valeur de 1 calorie, si L est mesuré en calories.

7. *Les dérivés des composés organiques, dans la position para, donnent une constante entropique K de fusion plus grande que les mêmes dérivés, dans la position ortho ou méta.* C'est-à-dire les derivés

TABLEAU V

Composés organiques

Substance	L cal.	M	T°abs	K	n	K/n
$C_6H_4I_2$. ortho	10,2	330	296,4	11	12	0,92
meta	11,6	»	307,2	12,4	»	1,03
para	16,2	»	402	13,3	»	1,11
$C_6H_4Br_2$, ortho	12,8	235,8	291	10,3	12	0,86
meta	13,4		266	12	»	1,0
para	20,5		359	13,4		1,1
$C_6H_4Cl_2$, ortho	21	147	255,5	12,1	12	1,0
meta	20,5		248,6	12,1		1,0
para	29,7		325,7	13,4		1,1
C_6H_4BrCl, ortho	15,4	191	260,4	11,3	12	0,94
meta	15,3		251,8	11,6		0,97
para	23,4		337,6	13,2		1,1
C_6H_4BrI, ortho	12,2	283	294	11.8	12	0,98
meta	10,3		263,7	11,1		0,92
para	16,6		363,1	13		1,1
$C_6H_4ClCOOH$,ortho	39,3	156	413,2	15	15	1,0
meta	36,4		427.2	13;3		0,9
para	49,2		512,7	15		1,0
$C_6H_4ClNO_2$, ortho	29,4	157	316,8	14,6	14	1,0
$C_6H_4NO_2COOH$ortho	40,1	167	418,8	16	17	0,94
meta	27.6		414,1	11,1		0.7
para	52,8		512,2	17,2		1,0
$C_6H_4(NO_2)_2$, ortho	32.3	168	389,9	14	16	0,9
meta	24,7		363,1	11,4		0,7
para	40		446.5	15,1		0,94
$C_6H_4NH_2NO_2$, ortho	27,9	138	342,4	11,2	16	0,7
meta	41		384.8	14,7		0,92
para	36,5		420,5	12		0,75
$C_6H_2Br_3NH_2$	16,8	330	395	15,5	14	1,1
$C_6H_4(OH)_2$, resorcinol	46,2	110	383	13,3	14	0,9
$C_6H_4(OH)_2$, quinol	58,8	110	445	14,5	14	1,0
$(CH_2\ OH)_2$, glycol	43,2	62	261,5	10,2	10	1,0
$C_3H_5\ OH)_3$, glycerol	47,5	92	291	15	14	1,07
$C_6H_2Br_3OH$	13,4	331	366	12,1	13	0,9
$CH_2ClCOOH$, α	31,1	94,5	334 2	8,8	8	1,1
$CH_2ClCOOH$, β	35,1	94,5	329	10	8	1,2

para demandent à la fusion une chaleur de fusion plus grande que les dérivés ortho. On a en général, pour les dérivés du benzène, la règle

(12) $$K_{\text{para}} > K_{\text{ortho, méta}}.$$

Il y a exception pour les composés de nitroaniline.

Par l'inspection du tableau V, on peut constater que dans la plupart des cas, la constante d'un dérivé para est d'une unité plus grande que celle du dérivé ortho. On a

(13) $$K_{\text{para}} = K_{\text{ortho}} + 1.$$

Cela signifie que les composés chimiques, possédant des radicaux substitués dans la position para, position éloignée du centre de la molécule, demandent à la fusion, pour le radical dans cette position, une énergie supplémentaire, de la valeur d'un degré de liberté, nécessaire à la vibration de ce radical.

Il est intéressant de faire remarquer qu'il y a une autre constante qui est différente pour les composés dans la position para, par rapport aux mêmes dérivés, dans la position ortho ; c'est la constante diélectrique. La constante diélectrique des substances qui possèdent des dipôles est plus grande á l'état liquide qu'à l'état solide.

D'après les recherches de V. Petrescu[2]), il résulte que l'augmentation de la constante diélectrique, au point de fusion, varie pour les divers substitués du toluène dans le même sens que la valeur du moment des dipôles des substances résultées de cette substitution.

Il serait intéressant de mesurer la constante diélectrique du même dérivé du benzène, dans les positions ortho, méta, para, pour constater si, à la fusion, l'augmentation de la constante diélectrtque est plus grande pour les dérivés dans la position para [3]).

La constante entropique K à la fusion, pour les dérivés dans la position para, sera plus grande, parceque le radical dans cette position est plus éloigné du centre de la molécule. Des mesures de constantes diélectriques pourraient montrer en effet, si le moment des dipôles est plus grand pour le dérivé para.

Le dérivé dans la position para, demandant à la fusion un supplément d'énergie d'une calorie, la valeur de l'énergie pour un seul degré de liberté, cela signifie que le radical forme un tout, bloqué à l'état solide, et libre de vibrer, à l'état liquide, ce qui amène l'augmentation de la chaleur de fusion.

8. Il résulte encore, par l'inspection du tableau V, que dans tous les cas, sans exception, le composé chimique, *dérivé para du benzène*

---

2) V. Petrescu, *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, 26, 1940, p. 244,

3) Il y a des substitués dans la position para qui ont des moments électriques plus petits que dans la position ortho (par ex. le dichlorobenzène, le trinitrobenzène, le chloronitrobenzène), et d'autres substitués dans la position para qui ont des moments électriques plus grands que dans la position ortho (par ex. le chloro-toluène et le nitro-toluène). (Voir W. Hückel, *Theoretische Grundlagen der org. Chem.* Bd 2, p. 779

Dans ces deux cas, il faudrait avoir des valeurs de K à la fusion, et de variation de la constante diélectrique $\Delta\varepsilon$ à la fusion, pour savoir laquelle de ces constantes dépend du moment électrique de la substance.

présente une température de fusion plus grande que le dérivé ortho ou méta du même composé. On a toujours

(14) $$T^0_{\text{para}} > T^0_{\text{ortho,méta}}.$$

Cette constatation est en bon accord avec une constatation analogue de G. S. Parks et H. M. Huffman[4]), qui trouvent que les composés organiques *symétriques* possèdent un point de fusion plus élevé que les corps non symétriques. Les dérivés para sont plus symétriques que les dérivés ortho du même composé.

Pour quelques uns des composés de la liste V, par exemple pour $C_6H_4I_2$, $C_6H_4ClCOOH$, $C_6H_4NH_2NO_2$, on peut même écrire

(14 bis) $$T^0_{\text{para}} > T^0_{\text{meta}} > T^0_{\text{ortho}}$$

la température de fusion est la plus grande pour les dérivés para, moins élevée pour les composés meta, et la plus basse pour les composés ortho.

9. *Valeurs du rapport K de la fusion pour les acides organiques et les alcools.*

Les acides organiques avec un seul radical $COOH$, et les alcools et les phénols monovalents, ayant un seul radical OH, donnent, par la formule (1), une constante entropique de la fusion, K, beaucoup plus petite que le nombre n d'atomes dans la molécule, et cette constante K peut descendre jusqu'à une valeur moitié du nombre n, pour quelques unes de ces substances. On a :

(15) $$K < n.$$

Le tableau VI se rapporte aux acides organiques et le tableau VII aux alcools. En général, la valeur de K est d'autant plus grande que le nombre n des atomes dans la molécule est plus grand, sans que toutefois il en soit toujours ainsi. Mais toujours la constante K est plus petite que n.

Pour expliquer pourquoi les acides organiques et les alcools monovalents ont une constante de fusion plus petite que n, admettons qu'une substance est *normale*, quand la constante K de fusion est égale à n, le nombre d'atomes dans la molécule, ce qui suppose qu'à la fusion, chaque atome demande une quantité de chaleur égale à l'énergie d'un degré de liberté ; c'est-à-dire égale à 1 calorie. Pour n atomes on aura n calories ; et cette valeur sera égale à la constante de fusion K.

4) W. Hückel, *Theoretische Grundlagen der organischen Chemie*, 3-te Aufl. 1941, Bd. II. p. 267. d'après G. S. Parks et H. M. Huffman, Chem. Zbl. 1931, II, 3086.

Admettons que pour certaines substances, il y a des associations moléculaires. Si les molécules sont associées à l'état liquide, la chaleur de fusion sera plus petite que celle normale, car il intervient une cha-

T A B L E A U VI

Acides organiques

Substance	n	K	n—K
$C_3 H_7 COOH$,n	14	10	4
$C_7 H_{15}COOH$	26	17,6	8,4
$C_9 H_{19}COOH$	32	22	10
$C_{10}H_{21}COOH$	35	20	15
$C_{11}H_{23}COOH$	38	27,6	10,4
$C_{15}H_{31}COOH$	50	30,6	19,4
$C_{17}H_{35}COOH$	56	40	16
$C_{17}H_{33}COOH$	54	46	8
C_6H_5COOH	15	10,4	4,6
$C_6H_5.C_2H_5COOH$	19	12,2	6,8
$C_6H_5.NH_2COOH$, o	17	11,6	5,4
m		11,5	5,5
p		10,9	6,1
$C_6H_5 CH_2COOH$	18	10	8
$(CH_2)_3 (COOH)_2$	17	13,3	3,7
$CH Cl_2.COOH$	8	6,4	1,6

T A B L E A U VII.

A l c o o l s

Substance	n	K	n—K
$C_3 H_7 OH$	12	7	5
$C_4 H_9 OH$, n	15	12	3
$C_4 H_9 OH$, ter	15	5,2	9,8
$C_{10}H_{19}OH$	31	9,2	21,8
$C_{10}H_{13}OH$	25	12,8	12,2
$C_{10}H_7 OH$, a	19	15,2	3,8
$C_{10}H_7 OH$, b	19	11,4	7,6
O_6H_5OH	13	9,3	3,7
$C_6H_2Br_3OH$	13	12,1	0,9

leur dégagée, lorsque le molécules, simples à l'état solide, deviennent associées à l'état liquide. Si on admet que les molécules des acides organiques et des alcools monovalents sont associées seulement à l'état

liquide, on explique pourquoi la constante K est plus petite que le nombre d'atomes n, en calories.

10. *Association moléculaire des alcools et des acides organiques.*

On connaît que les composés organiques, surtout les composés hydroxyls, les acides mono-carboxyls et les alcools monovalents ont leurs molécules associées ou polymérisées, à l'état liquide. Cette constatation a été déduite du fait que la constante de Pictet-Trouton, qui donne le rapport entre la chaleur moléculaire de vaporisation et la température absolue de l'ébullition, présente des valeurs plus grandes que 20, valeur attribuée aux composés normaux, et que la constante de Eötvös, de la tension superficielle des liquides en relation avec la température, présente des valeurs plus petites que 2, valeur qui correspond aux liquides normaux [5]).

Si la masse moléculaire d'une substance à l'état liquide devient plus grande, la chaleur moléculaire sera plus grande, et par suite le rapport de Trouton sera plus grand, et il peut avoir des valeurs de 26 à 28.

Dans le cas de la fusion, si on considère la relation

$$\frac{LM}{T} = n \tag{11}$$

pour une augmentation de la masse moléculaire M de 2 fois, à l'état liquide, correspondrait un nombre n deux fois plus grand, et par suite la relation précédente ne changerait pas, et on ne pourrait constater l'association moléculaire de la substance.

Pourtant, si l'association moléculaire intervient seulement à l'état liquide, la chaleur de fusion sera diminuée d'une quantité due à la chaleur d'association. Désignons cette chaleur d'association par la lettre A. La relation de la fusion (1) deviendra:

$$\frac{LM - A}{T} = K. \tag{16}$$

Si on tient compte de la formule (11), on obtient

$$\frac{A}{T} = n - K \tag{17}$$

où K est plus petit que n. Par suite, la différence, $n - K$, peut donner la chaleur d'association des molécules. On aurait

$$A = (n - K)\, T \quad , \quad \text{calories.}$$

5) Voir sur l'association moléculaire, W. Hückel, *Theoretische Grundlagen der organischen Chemie*, Bd. 2, 1941, 3-te Aufl. p. 212 et 227.

La relation de la fusion, et la constante entropique K de la fusion, peut donc constituer une méthode pour la mesure de l'association des molécules à l'état liquide.

J'essayerai de comparer les résultats obtenus par cette méthode de la fusion, avec ceux obtenus par la formule de Pictet-Trouton, lorsque j'aurai à ma disposition des valeurs du degré d'association des alcools monovalents et des acides organiques monobasiques.

Pourtant, les alcools plurivalents se comportent normalement, leur constante entropique K de la fusion est égale au nombre n des atomes de la molécule, comme on peut le constater avec les valeurs inscrites dans le tableau V.

11. *Valeurs de la constante de fusion K pour les bases, acides et leurs sels.*

Des régularités dans la valeur de K à la fusion peuvent être mentionnées pour les corps chimiques simples. Ainsi, des corps simples, de structure analogue, ont souvent une même constante de fusion K. Par exemple, l'eau ordinaire et l'eau lourde ont la même constante K à la fusion, 5,4 (H_2O, $L = 79,7$ et $T = 273$, $K = 5,3$; D_2O, $L = 74,2$ et $T = 276,8$, $K = 5,36$).

Les hydroxydes des alcalins ont la même constante $K = 2,8$ et les acides halogénés ont la constante $K = 3,3$; les sels résultant de leur union présentent une constante égale approximativement à 6,1, c'est-à-dire satisfaisant la règle suivante d'additivité :

$$K_{\text{base}} + K_{\text{acide}} = K_{\text{sel}}. \tag{18}$$

Cette relation (18) signifie que deux réactifs, dissociés avant leur réunion, restent avec les mêmes ions, toujours dissociés, dans le sel résultant. Dans la Thermodynamique, l'additivité des entropies de deux substances signifie que ces deux substances ne s'influencent pas.

Dans le tableau VIII sont portées les constantes K à la fusion, pour les bases, *NaOH*, *KOH*, *RbOH*, *CsOH*, les acides *ClH*, *BrH*, *IH*, et des sels résultants, *NaF*, *NaCl*, *KF*, *KCl*. Ce sont les seules données expérimentales à ma connaissance, de ces groupes.

On obtient l'énergie de fusion d'un sel halogéné, en ajoutant l'énergie de l'acide à l'énergie de fusion de l'hydroxyde.

12. *Conclusions.*

1. Le rapport de la chaleur moléculaire de fusion à la température de fusion, qui représente la variation de l'entropie à la fusion, a une valeur constante pour les métaux monoatomiques et pour quelques molécules diatomiques O_2, H_2, S_2, P_4. Le rapport constant K est

égal à R, la constante des gaz, *1,986* calories par degré. Cette constante est égale à l'énergie de translation pour un seul degré de liberté des atomes. (Formule 9).

TABLEAU VIII

Bases, Acides, Sels

Substance	L cal.	M	T°abs	K = LM/T
NaOH	40,	40	591,4	2,7
KOH	28,6	56	633	2,6
RbOH	15,8	102,5	574	2,8
CsOH	10,8	149,8	545,3	3
ClH	13,9	36,5	159	3,2
BrH	7,67	80,9	187	3,3
IH	5,68	128	220	3,3
NaF	186,	42	1265	6,2
NaCl	124,	58,5	1077.3	6,8
KF	108,	58	1132,9	5,6
KCl	74,1	74,6	1045,3	5,4

2. La valeur de ce rapport K pour les composés chimiques dont la molécule est formée de plusieurs atomes, plus de dix, est, en calories égale au nombre n d'atomes dans la molécule, ce qui revient à une énergie de *1* calorie pour chaque atome ; *1* calorie, ou $\frac{1}{2} R$, représente l'énergie pour un degré de liberté de l'énergie cinétique de chaque atome (Formule 11).

3. Les composés chimiques, possédant des radicaux substitués dans la position para, ont une constante de fusion K plus grande d'une unité, une calorie, que ceux dans la position ortho et méta. De même, la température de fusion des composés para est la plus élevée. (Formules 13 et 14).

4. Les acides organiques et les alcools monobasiques ont une constante K de fusion plus petite que le nombre n des atomes de la molécule. Le fait peut être expliqué par la polymérisation des substances à l'état liquide ou par l'association moléculaires.

5. Les hydroxydes alcalins, les acides halogénés et leurs sels ont des constantes de fusion K qui paraissent se soumettre à une loi d'additivité. (Formule 16).

6. La molécule du phosphore à l'état liquide est formé de 4 atomes de phosphore (tableau II), ce qui confirme un résultat obtenu par d'autres méthodes.

En definitive, le rapport entre la chaleur moléculaire de fusion d'un élément, ou d'un composé chimique homogène, et la température absolue de fusion, est une constante K, de même valeur, pour des groupes analogues de corps. La valeur de ce rapport dépend de l'énergie de translation, de rotation, d'ionisation, de polymérisation, demandées par chaque atome constituant le composé chimique [6]).

Laboratoire d'Electricité.
Université de Jassy

(Reçu le 10 Mai 1947).

6. Ce travail a déjà fait l'objet de deux Notes publiées dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, Tome 223, 1946, p. 503 et Tome 224, 1947, p. 264.

LA PHOTOTROPIE AU POINT DE VUE DE LA MÉSOMÉRIE

par

C. V. GHEORGHIU

Resumé. Dans ce mémoire, nous avons essayé d'expliquer la phototropie (changement de couleur saus l'influence de la lumière) des semicarbazones et phénylhydrazones des cétones éthyléniques, étudiées par nous, et des autres substances, au point de vue de la mésomérie.

En général le changement phototropique est dû à un deplacement des électrons π, qui a comme résultat la formation d'une ou de plusieurs structures polaires, l'état de la molécule coloré étant un „état intermédiaire", qui résulte par la superposition de plusieurs structures limites. Dans le cas des substances déjà colorées (fulgides, bases Schiff) et de la β-tétrachlore-α-cétonaphtaline, le changement phototropique est dû à un „effet d'électrotropie", c'est-à-dire la couleur différente de deux modifications (avant et après l'exposition à la lumière) dépend de la prédominance d'une des formes mésomères.

* * *

Depuis longtemps on a constaté que certaines substances à l'état solides subissent sous l'influence de la lumière un changement de coloration et la couleur primitive revient à l'obscurité. Markwald [1]), qui a observé le changement de couleur dans le cas du chlorhydrate de quinoquinoline et de la β-tétrachlore-α-cétonaphtaline, a donné à ce phénomène le nom de *phototropie.* Les nombreuses réactions photochimiques accompagnées de changement de coloration ne doivent pas être rangées parmi les cas de phototropie lorsque la couleur apparue sous l'influence de la lumière persiste après un séjour prolongé à l'obscurité. Il y a aussi des exceptions, ainsi une série des semicarbazones des cétones éthyléniques, préparées par C. V. Gheorghiu [2]), se colorent en jaune sous l'action de la lumière et le retour à la couleur primitive n'a pas lieu, même après un séjour prolongé à l'obscurité. Le

passage à la modification primitive incolore a lieu par simple recristallisation dans l'alcool.

En 1899, Biltz [3]) a constaté la phototropie de plusieurs hydrazones aromatiques de formule générale : $Ar - CH = N.NH - Ar$.

Ces substances incolores ou faiblement colorées en jaune deviennent, sous l'action de la lumière, rouge, rouge-brun ou orange.

Stobbe et ses collab. [4]) ont constaté la phototropie dans le cas des dérivés du stilbène et des fulgides, et Senier [5]) chez les bases Schiff.

En 1912 I. M Heilbron et F. J. Wilson [6]) ont étudié pour la première fois la phototropie des semicarbazones de la chalcone (phényl-styryl-cétone), phototropie édudiée plus tard aussi par H. Stobbe et K. Bremer [7]).

En 1927 C. V. Gheorghiu et B. Arwentiew [8]) ont observé la „phototropie inverse" dans le cas de la semicarbazone de l'α-méthylisobutylcétone

$[C_6.H_5\,CH = CH.C\,(= N.NH.CO.NH_2)\,CH_2\,.\,CH\,(CH_3)_2]$.

Cette semicarbazone sous l'influence de la lumière diffuse devient jaune et par exposition aux rayons solaires se décolore. Le phénomène de „phototropie inverse" fut observé pour la première fois par Wilson, Heilbron et Sutherland [9]) dans le cas de la semicarbazone de l'aldéhyde cinnamique, qui à la lumière ne subit aucun changement visible, mais portée à l'obscurité, elle se colore en jaune.

Ensuite C. V. Gheorghiu et B. Arwentiew [10]) constatent que les semicarbazones des cétones éthyléniques du type :

$Ar.CH=CHCO.R$ (*Ia*) (Ar = aryle, R = alcoyle ou aryle),

obtenues par la condensation des méthylcétones avec les aldéhydes aromatiques, sont phototropes ; tandis que celles des cétones isomères :

$Ar.CH=C(R).CO.CH_3$ (*Ib*),

formées par condensation acide, sont insensible à la lumière.

En continuant ce travail sur un grand nombre des semicarbazones C. V. Gheorghiu [2]) a montré que l'apparition de la phototropie est étroitement liée à la présence d'un système des doubles liaisons conjuguées d'un noyau benzénique en conjugaison avec ces doubles liaisons.

Si nous considérons la plus simple semicarbazone sensible à la lumière, celle de l'aldéhyde cinnamique [9]) :

$$C_6 H_5.\overset{\beta}{C}H = \overset{\alpha}{C}H.\overset{\alpha'}{C}H = N.NH.CO.NH_2,$$

en substituant l'hydrogène α' par un radical alcoylé on obtient les semicarbazones des cétones type du *Ia*, qui, en général, sont photo-

tropes. La substitution de l'hydrogène α par un radical alcoylé et de l'hydrogène α' par le radical méthyle nous conduit aux semicarbazones des cétones de type *Ib*, qui, en général, sauf dans un cas étudié par nous, sont insensibles à la lumière. Cette absence de sensibilité à la lumière des semicarbazones de type *Ib* est due, sans doute à la présence du radical alcoylé en α, qui modifie l'état du système des liaisons ethyléniques conjuguées, duquel dépend l'isomérisation phototropique. (Voir les considérations développées par C. V. Gheorghiu [2]).

Dans le cas des semicarbazones des cétones éthyléniques du type *Ia*, nous avons constaté que la phototropie dépend, d'une part, de la nature du radical fixé en α' et d'autre part, de la substitution du noyau arylique. Tandis que, par exemple, les *semicarbazones des benzylidène-méthyléthylcétone* (Ia, $Ar = C_6H_5-$; $R = C_2H_5$), *o-oxybenzylidène-méthyléthylcétone* (Ia, $Ar = C_6H_4(OH)-$; $R = C_2H_5$) sont faiblement phototropes, celles des *o-méthoxybenzylidène-* et *anisylidène-méthyléthylcétone* (Ia, $Ar = CH_3O\,C_6H_4-$; $R = C_2H_5$) sont très phototropes.

De même la *pipéronylidène-méthyléthylcétone* (Ia, $Ar = CH_2{<}^{O}_{O}{>}\,C_6H_3-$; $R = C_2H_5-$) et *méthylpropylcétone* (Ia, $Ar = CH_2{<}^{O}_{O}{>}C_6H_3-$; $R = C_3H_7-$) donnent aussi des semicarbazones phototropes. L'*α-pipéronylidène-méthylisopropylcétone* (Ia, $Ar = CH_2{<}^{O}_{O}{>}\,C_6H_3-$; $R = (CH_3)_2\,CH-$) et la *benzylidène-méthylisopropylcétone* (Ia, $Ar = C_6H_5-$; $R = (CH_3)_2\,CH-$) donnent des semicarbazones non phototropes. L'absence de sensibilité à la lumière de ces semicarbazones est produite par la présence du radical isopropyle trouvé en α' par rapport au carbonyle. L'influence de ce radicale sur la phototropie se manifeste aussi quand il se trouve dans le noyau benzénique. Ainsi les semicarbazones des cétones : *α-p-isopropylbenzylidène-méthyléthylcétone* [Ia, $Ar = (CH_3)_2\,CH-C_6H_4-$; $R = C_2H_5$], *méthylpropylcétone* [$R = C_3H_7-$] et *méthylisobutylcétone* [$R = (CH_3)_2\,CH.CH_2-$], sont presque insensibles à la lumière.

Comme le groupe méthoxy, fixé soit en ortho, soit en para sur le noyau benzénique, provoque une phototropie intense des semicarbazones (les *semicarbazones des α-anisylidène-méthyléthylcétone, anisylidène méthylisobutylcétone, α-o-méthoxybenzylidène-méthyléthylcétone* sont très phototropes), nous avons pensé à diminuer ou annuler l'action du radical isopropyle par l'introduction dans le noyau benzénique du groupe méthoxy. Dans ce but, nous avons préparé la *semicarbazone de l'o-méthoxybenzylidène-méthylisopropylcétone*, et nous avons constaté qu'elle présente le phénomène de phototropie inverse.

On peut modifier l'action du radical isopropyle fixé en α' par un

changement dans le reste semicarbazidique. En effet la *thiosemicarbazone de l'α pipéronylidène-méthylisopropylcétone* et celle de *l'α-isopropylbenzylidène-méthylpropylcétone* sont phototropes. Les δ-phénylsemicarbazones sont toujours phototropes, l'influence de radical isopropyle est annulé par la présence d'un noyau benzénique dans le reste semicarbazidique (C. V. Gheorghiu [11])).

En ce qui concerne le mécanisme du changement phototropique, dès le début de nos recherches sur les semicarbazones (1933), nous avons tenu à faire quelques observations:

a) L'apparition de la phototropie est étroitement liée à la présence de doubles liaisons conjuguées avec un noyau benzénique; les causes qui perturbent la conjugaison modifient aussi les propriétés phototropiques.

b) Le phénomène de la phototropie ne se manifeste qu'à l'état solide; en solution, indépendamment du dissolvant, les deux formes (incolore et coloré) sont identiques [I. M. Heilbron, H. E. Hudson et D. M. Huisch [12]) Markwald [1]), Weigert [13])].

c) L'isomérie stéréochimique proposée par Heilbron et Wilson [6]) est peu probable, et même Heilbron et ses collaborateurs [12]) dans un travail publié en 1923, considèrent le changement phototropique comme un processus de déplacement des électrons de valence, provoqué par des influences électromagnétiques.

d) L'hypothèse de H. Stobbe et K. Bremer [7]) d'une tautomérisation des semicarbazones n'est pas admissibile, vu que la phototropie se manifeste seulement à l'état solide, tandis que la tautomérisation se produit en solution ou à l'état liquide.

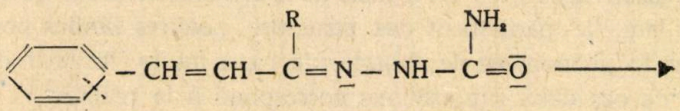
Très probablement la transformation phototropique des semicarbazones, des thiosemicarbazones, des δ-phénysemicarbazones, des phénylhydrazones et des autres substances sensibles à la lumière, est due seulement à un déplacement des électrons de valence qui forment un système ayant un autre configuration et par conséquant une autre couleur (voir aussi P. N. Gallagher [14])).

A ce moment là il était impossible de préciser une „isomérie électronique", basée sur une différence d'arrangement électronique. Aujourd'hui il semble bien que la difficulté peut être résolue, grâce à la théorie de la mésomérie (résonance) (Ingold [15])).

L'absorption de la lumière, et par conséquent la couleur d'un produit, est étroitement liée à la présence des électrons π, qui demandent pour être excités une plus petite quantité d'énergie que les électrons σ, et justement les électrons π sont la raison du caractère chromophorique des combinaisons non saturées. L'absorption de la lumière de ces combinaisons est en rapport avec les possibilités d'exci-

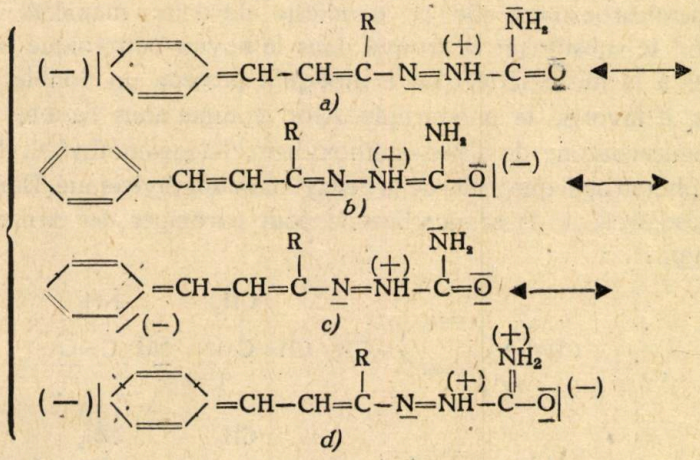
tation de leur système d'électrons π. Pour formuler les combinaisons contenant des électrons π, on emploie les formules limites de la mésomérie. Le nombre de structures limites fictives croit rapidement avec le nombre des liaisons éthyléniques en chaîne ouverte, et en même temps croît aussi le nombre des possibilités quantiques, ce qui a comme résultat le déplacement de l'absorption vers les grandes longueurs d'ondes (E i s t e r t [16]).

Nous considérons tout d'abord le cas des semicarbazones phototropes. Sous l'action de la lumière, les électrons π subissent un déplacement interne, ayant comme résultat la formation d'une ou de plusieures structures excitées, quinoïdes, polaires (structures zwitterioniques), l'état réel de la molécule colorée étant un „état intermédiaire", qui résulte par la superposition de plusieurs structures limites:



II. semicarbazone, modification incolore

III



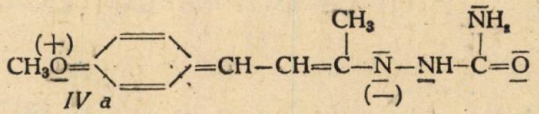
Si l'on examine les structures limites III, *a*, *b*, *c*, *d*, on constate qu'elles remplissent la condition fondamentale de la mésomérie, c'est à dire que les noyaux des atomes qui les composent ont des positions identiques et qu'elles ne diffèrent que par la position d'un doublet d'électrons.

D'après la théorie de la mécanique quantique, c'est l'énergie de résonance (c'est à dire la différence entre l'énergie de la molécule réele et l'énergie des structures fictives, calculée d'après la chaleur de formation à partir des atomes) qui décide la participation des diverses structures limites à l'état fondamentale et aux états excités de la molécule.

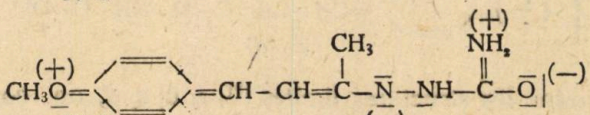
On pourait expliquer encore la phototropie en admettant qu'un doublet d'électrons π, provenant d'une des double liaison, se découple, et forme un biradical avec des spins parallèles [17]). Une structure de biradical nous la croyons impossible, car les mesures magnétiques faites par S. S. Bhatnagar, P. L. Kapur et M. S. Hashmi [19]) ont montrées que les aniles et les hydrazones phototropes ne présentent aucun changement de leur susceptibilité magnétique après séjour prolongé à la lumière. D'après les calcules quanto-mécaniques de E. Hückel [20]) sur l'état d'un biradical, il résulte qu'il peut exister encore des structures limites avec des spins antiparallèles, dont le spin total est nul, ce qui a comme résultat le diamagnétisme de la molécule.

Nous avons aussi pensé à cette possibilité avec des électrons d'une double liaison decouplés (17), mais nous croyons toutfois, qu'une, mésomérie à laquelle participent des structure polaires limites peut mieux expliquer le phénomène de phototropie. Les futurs travaux décideront laquelle de ces deux suppositions correspond à la réalité.

En ce qui concerne l'influence des substituants sur la phototropie des semicarbazones, elle se manifeste de deux manières différentes. Quand le substituant se trouve dans le noyau benzénique et peut participer à la mésomérie, c'est à dire qu'il possède un doublet d'électrons libres, il favorise la phototropie. Ainsi, comme nous l'avons mentionné, la semicarbazone de l'α-o-méthoxybenzylidène-méthyléthylcétone est plus phototrope que celle de la benzylidène-méthylcètone. Dans ce cas, à la mésomerie de la semicarbazone peut participer des structures limites de type:



IV a



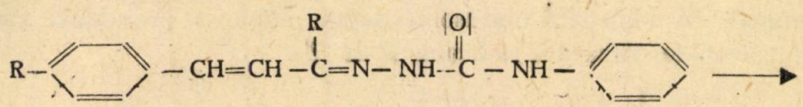
IV b

avec une charge positive localisée sur l'oxygène éthérique.

Quand le substituant ne peut pas participer à la mésomérie, il produit un amortissement de la mésomérie, résultant d'une gène stérique. Nous avons mentionné plus haut les semicarbazones avec le radical isopropyle fixé dans le noyau bénzenique ou dans la position α' par rapport au carbonyle de la cétone correspondante, qui ne manifestent pas le phénomène de phototropie. R. H. Birtles et G. C. Hampson [21]) ont

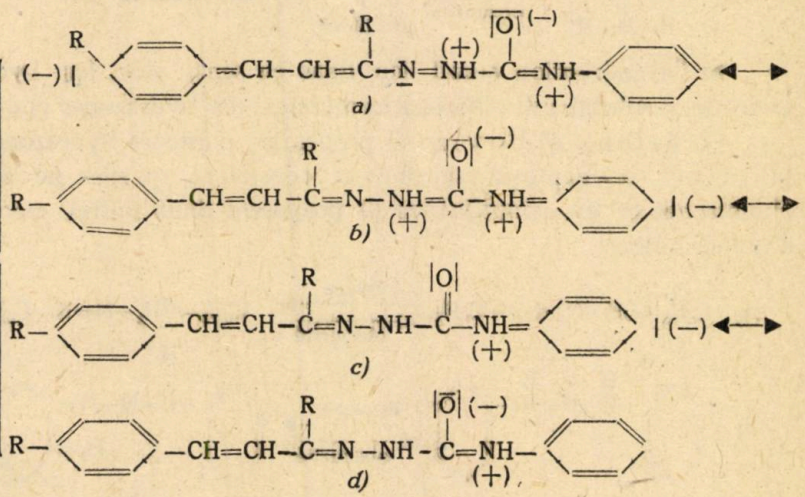
montré l'infuence des divers substituants sur la mésomerie des dérivés benzéniques, qui se manifeste par un empêchement stérique.

Les δ phénylsemicarbazones des cétones éthyléniques contiennent encore un noyau bénzénique, qui peut participer à la mésomérie, et dans ce cas l'influence du radical isopropyle est anéantie. En effet les δ-phénylsemicarbazones, comme nous avons mentionné, manifestent le phénomène de phototropie. Si dans la partie de la molécule où se trouve le radical isopropyle la mésomérie est gênée par la présence de ce radical, elle peut toutfois se manifester dans le groupement anilidique, ce qui explique le changement phototropique, que nous avons constaté expérimentalement.



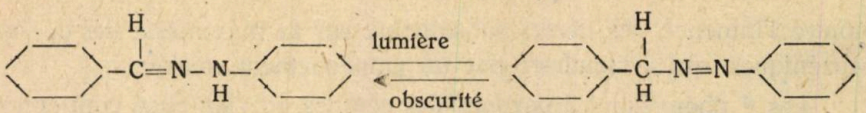
V. δ-phénylsemicarbazone, modification incolore

VI



La phototropie des hydrazones des aldéhydes aromatiques a été largement étudiée par des nombreux chercheurs (F. Chattaway [22]), M. Padoa et ses collab.[23]), Graziani et Bovini [24]), Senier [5]), L. Chalkley [25]). En ce qui concerne la phototropie des phénylhydrazones des cétones α, β non saturés, on ne trouve en littérature que les observations faites par nous (C. V. Gheorghiu et V. Matei [26]), V. Matei [27])) dans un nombre limité de cas.

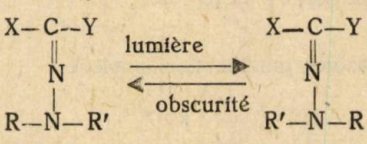
Chattaway [22]) suppose que dans le changement phototropique de la benzalphénylhydrazone (VII) il y a une réaction chimique, qui conduit à l'équilibre :



VII. incolore VIII. coloré

Plus tard Gallagher [14]), en synthétisant le produit VIII, constate qu'il ne manifeste aucun changement à l'obscurité ou à la lumière, d'ou il conclut que la phototropie n'est pas du à une isomérisation selon le mécanisme imaginé par Chattaway.

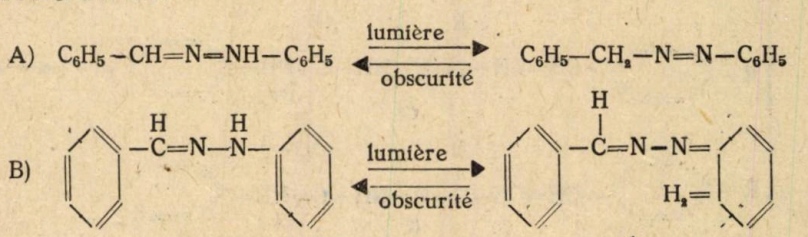
Graziani et Bovini [24]) ont observé que seulement les hydrazones monosubstitutées sont phototropes, tandis que celles bisubstituées, préparées avec la ditolyl - et la diphénylhydrazine, sont insensibles à la lumière. Ils admettent une isomérisation stérique, provoquée par le changement de place des radicaux *R* et *R'*:



(aux hydrazones monosubstituées R'=H).

Si l'isomérisation aurait lieu dans ce sens, alors les hydrazones avec deux substituants différents formeraient des hydrazones phototropes.

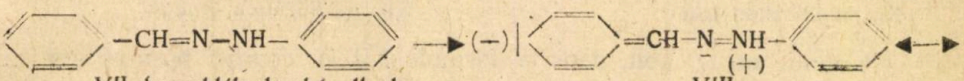
Graziani et Bovini [24]) préparent plusieurs hydrazones avec la phényl - α - napthylhydrazine et constatent qu'elles ne sont pas phototropes et en conséquence ils proposent deux autres mécanismes d'isomérisation:



a *b*

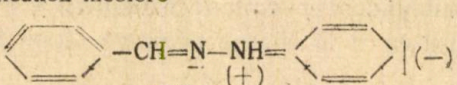
Les auteurs préfèrent le mécanisme *B*, étant, d'après eux, en concordance avec les observations faites, qu'aucune des hydrazones substitués en ortho ou méta n'est phototrope. La formation de l'isomère hypothétique *B* n'est pas possible. En effet, Bhatnagar et Kapur [19]) ont calculé d'après la loi d'additivité de Pascal, la susceptibilité magnétique de la benzaldéhydephénylhydrazone ($-0{,}607.10^{-6}$) et de son isomère hypothétique ($-0{,}592.10^{-6}$), et les valeurs trouvées pour la susceptibilité magnétique de l'hydrazone, avant et après l'exposition à la lumière, sont les mêmes ($0{,}606.10^{-6}$). De ces dates Bhatnagar et Kapur concluent que l'isomère *B* ne peut pas se former.

Nous croyons que la phototropie des hydrazones des aldéhydes aromatiques et des cétones éthyléniques est due à une mésomérie ; (le principe mériquinoïde) comme dans le cas des indophénols et des indamines (voir G. Schwarzenbach, H. Mohler et J. Sorge[28]).

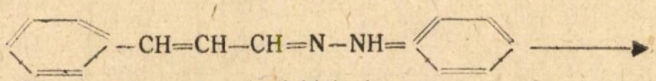


VII. benzaldéhyde-phénylhydrazone, modification incolore

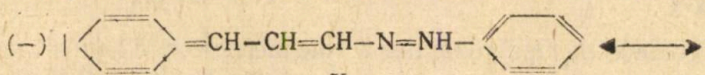
VIII a



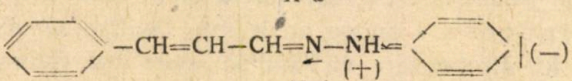
VIII b



IX. phénylhydazone de l'aldéhyde cinnamique, forme incolore



X *a*

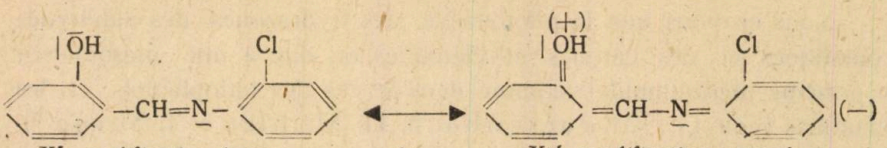


X *b*

Padoa et Graziani[23]) ont trouvé que les β-naphtylhydrazones des aldéhydes aromatiques (ald. benzoïque, anisique et cinnamique) sont phototropes, tandis que celles obtenues avec l'α-naphtylhydrazine sont insensibles à la lumière. Ce fait montre que la participation du noyau naphtalénique à la mésomérie est liée à la manière dont ce noyau est enchainé au reste de la molécule. La différence de comportement des α- et β- naphtylhydrazone sous l'action de la lumière tient probablement à une raison d'ordre stérique.

La phototropie des bases Schiff, dérivés de l'aldéhyde salicylique, fut observée par Senier et ses collab[5]). Ils ont constaté que les salicylidène-o-chloraniline, m-toluidine et o-xylidine sont jaunes ; exposés à la lumière ces corps deviennent orangés et ils reprennent leur couleur jaune à l'obscurité. L'acide salicylidène-p-aminobenzoïque jaunâtre devient rouge orangé à la lumière solaire et redevient jaunâtre à l'obscurité.

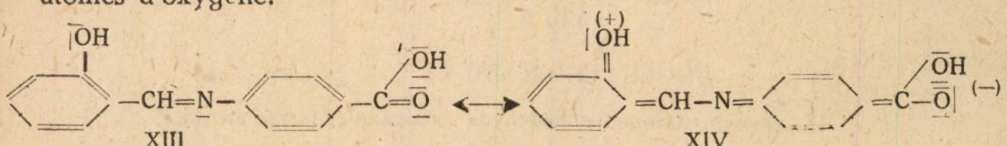
On peut expliquer aussi le changement de couleur des bases Schiff par une mésomérie, à laquelle participe une structure non polaire et une structure d'ion bipolaire (Zwitterion), comme dans le cas de l'indigo. Considérons le cas de la salicylidène-o-chloraniline, la structure XI nonpolaire représente la modification jaune et la structure d'ion bipolaire XII la modification orangé.



XI. modification jaune XII. modification orangé

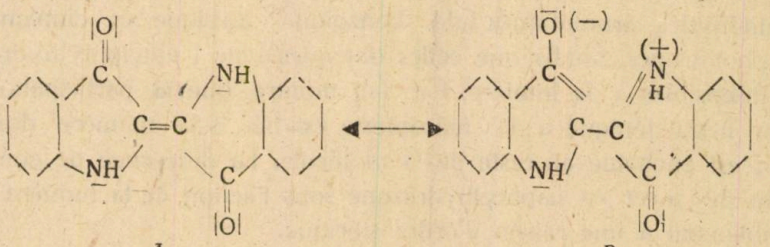
Comme on le voit, dans la formule XII la charge positive est localisée dans ce cas sur l'atome d'oxygène.

Pour l'acide salicylidène-p-aminobenzoïque il y a aussi une mésomérie, la charge positive et la charge négative étant localisées sur les atomes d'oxygène.



XIII XIV

La couleur de l'indigo est due à une mésomérie à laquelle participe une structure non polaire *A* et une structure d'ion bipolaire *B* [Eistert[29] voir aussi J. Alphen[30])]. Comme on le sait, l'indigo se dissout dans le chloroforme, le nitrobenzène et l'aniline avec une coloration bleue et dans le tétrachlorure de carbone et les hydrocarbures avec une couleur rouge.

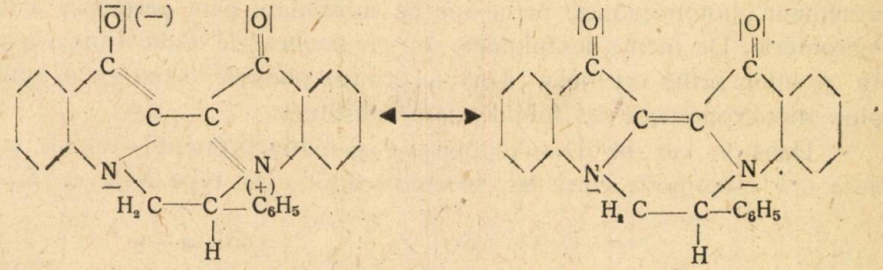


A *B*

La cause de la coloration différente des solutions de l'indigo dans les dissolvants est due à la prédominance d'une forme mésomère (Voir à ce sujet les considérations de R. Scholl[31]) sur l'apparition d'une combinaison mésomère en diverses formes (le phénomène d'électrotropie)).

G. Scheibe, H. Dörfling et J. Assmann[32]), basés sur une étude de l'absorption de la lumière par l'indigo et autres dérivées de l'indigo, proposent pour la „forme bleue" de styrolindigo, étudiée par eux, une structure bipolaire XV et pour la „forme rouge" une structure nonpolaire XVI. Par analogie, on peut attribuer à la „forme rouge" de l'indigo la structure nonpolaire *A*, et à la „forme bleue" la structure bipolaire *B*. De même, dans le cas des bases Schiff la modification

jaune, comme nous l'avons mentionné plus haut, a une structure non polaire, et la modification orangé, formée après l'exposition à la lumière, une structure polaire.

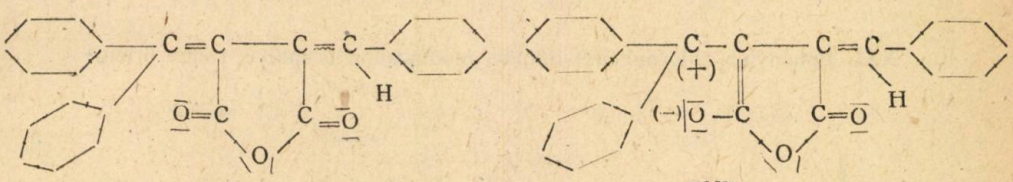


XV. „forme bleue". XVI. „forme rouge".

Par analogie, on peut attribuer à la forme rouge de l'indigo la structure non polaire *A* et à la forme bleue la structure bipolaire *B*. De même, dans le cas des bases Schiff les modifications jaunes peuvent avoir une structure non polaire, comme celle que nous avons attribué à la salicylidène-o-chloroaniline, et les modifications orangés une structure polaire.

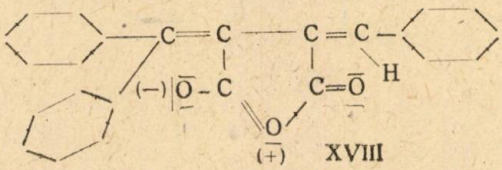
Un certain nombre des fulgides (anhydrides internes des acides fulgéniques) sont doués de phototropie (H. Stobbe[23])). L'α, α', δ-triphénylfulgide se présente sous forme de cristaux colorés en rouge orange ou d'une poudre jaune orangé. Exposée à la lumière cette poudre brunit en quelques minutes et elle revient jaune orangé à l'obscurité.

Dans le cas des fulgides phototropes on peut supposer aussi une mésomérie à laquelle participe des structures polaires et non polaires la coloration différante des deux modifications (avant et après l'exposition à la lumière) étant due aussi comme dans le cas des solutions de l'indigo, à la prédominance d'une forme mésomère.



XVII XVII.a

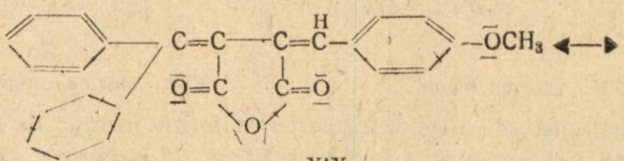
On peut formuler aussi des structure „onium" avec la charge positive sur l'oxygène du cycle (XVIII), comme dans le cas des γ-pyrones.



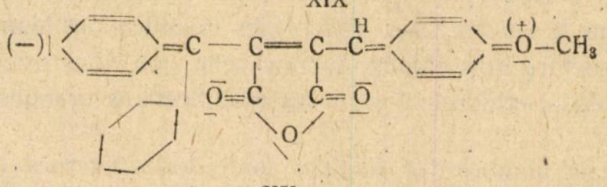
XVIII

Nous avons montré que les semicarbazones des cétones éthyléniques, qui possèdent dans le noyau benzénique le groupe méthoxyle en position ortho ou para par rapport à la chaine éthylénique, sont fortement phototropiques, parce que ce substituant peut participer à la mésomérie. De même, les fulgides, qui contiennent le radical métoxyle en position ortho ou méta, dans le groupe phényle situé en δ, sont plus phototropes que les fulgides non substitués.

Dans le cas de l'α-α'diphényl-δ-p-méthoxyphényl-fulgide on aura une mésomérie entre les structures limites de type XIX et XX.

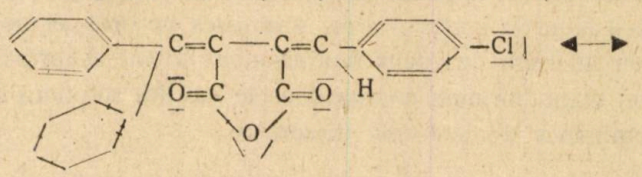


XIX



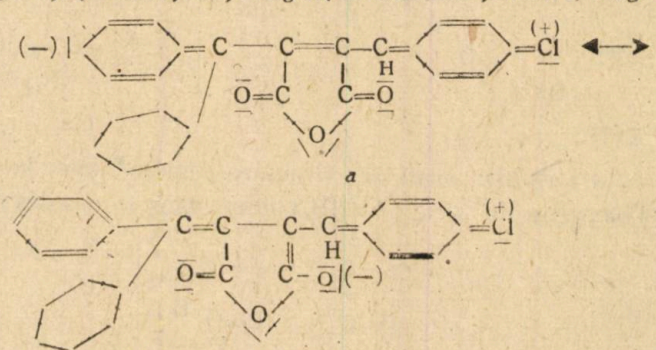
XX

L'atome de chlore possède des doublets d'électrons qui peuvent participer à la mésomérie du noyau par un déplacement électromère (Th. Förster [34])). Ainsi s'explique la phototropie plus intense du fulgide qui a un groupe phényle parachloré en δ (H. Stobbe [33])).



XXI. diphényl-p-chlorophényl-fulgide, modification primitive, rouge orangé

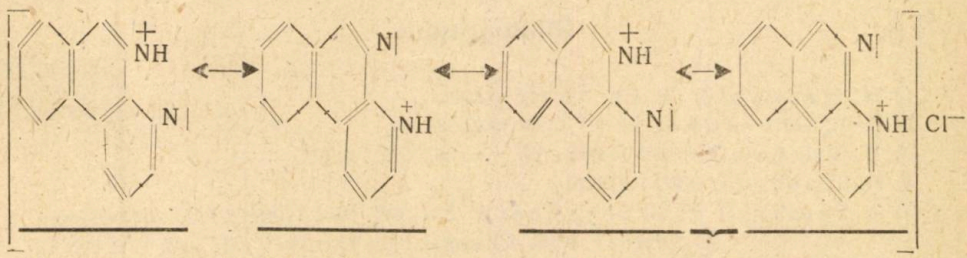
XXII



Pour terminer, essayons d'expliquer la phototropie des substances observées par Markwald[1]), à savoir, le chlorhydrate de quinoquinoline et la β-tétrachlore-α-cétonaphtaline.

Le chlorhydrate de quinoquinoline cristallise avec trois molécules d'eau et possède la couleur jaune. Par deshydratation on obtient une poudre cristalline, qui sous l'action de la lumière devient verte, portée la temperature de 80°, ou gardée à l'obscurité, elle reprend sa couleur primitive.

Dans ce cas nous avons un colorant-sel, dont le cation coloré peut paraitre en deux formes „éléctrotropes" différentes, selon les conditions dans lequel se trouve le chlorhydrate, exposé ou non à la lumière. A la mésomérie du cation participent des structures limites ayant la charge positive localisée successivement sur les atomes d'azote, et le noyau pyridinique contenant la charge positive passe tour à tour en état „benzoïde" et „o-quinoïde".



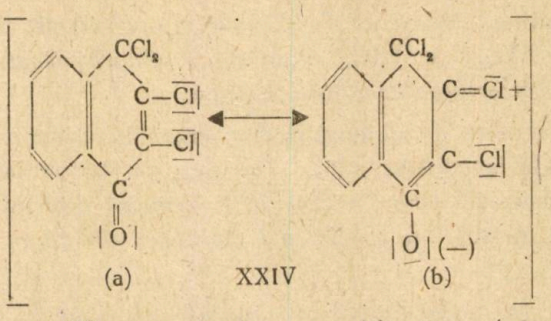
XXIII

Probablement la modification formé sous l'action de la lumière a une structure qui se rapproche des structures „o-quinoïdes".

La β-tétrachlore-α-cétonaphtaline, preparée pour la première fois par Th. Zincke[35]), se présente sous forme d'une poudre blanche, qui, sous l'action de la lumière ultraviolette, se colore en rouge-violet et sous l'action de la lumière jaune, elle reprend la couleur blanche.

Cétone A (blanche) $\underset{\text{rayons visibles}}{\overset{\text{rayons ultraviolets}}{\rightleftharpoons}}$ Cétone B (violette) (H. Stobbe[33])).

Dans ce cas nous avons une mésomérie à laquelle participe une structure limite non polaire (a) et une structure polaire (b) avec la charge positive localisée sur un atome de chlore et la charge négative sur l'atome d'oxygène:



(a) XXIV (b)

La couleur différente de deux modifications (cétone *A* et *B* de Stobbe) est due à la prédomination d'une forme mésomère (électrotropie).

Laboratoire de chimie organique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 1 Mars 1947).

Bibliographie

1) W. Markwald, Ph. Ch. 30, 140 (1899).
2) C. V. Gheorghiu, Bl. (4e) *53*, 1442 (1933).
3) W. Biltz, A. *305*, 170 (1899); Ph. Ch. *30*, 527 (1899).
4) H. Stobbe, A. *359*, 1 (1908).
5) A. Senier et F. G. Shepheard, Soc. *95*, 1944 (1909); *101*, 1850 (1912); A. Senier et R. Clarke, Soc. *99*, 208 (1911); *105*, 1911 (1914).
6) I. M. Heilbron et F. J. Wilson, Soc. *101*, 1428 (1912).
7) H. Stobbe et K. Bremer, J. pr. Chem. *123*, 241 (1929).
8) C. V. Gheorghiu et B. Arventiew, J. pr. Chem. *118*, 295 (1928).
9) F. J. Wilson, M. I. Heilbron et M. Sutherland, Soc. *105*, 2892 (1914).
10) C. V. Gheorghiu et B Arventiew, Bl. (4) *42*, 195 (1930).
11) C. V. Gheorghiu, Bl. (5^e) 1, 97 (1934).
12) I. M. Heilbron, H. E. Hudson et D. M. Huish, Soc. *123*, 2274 (1923).
13) F. Weigert, Z. El. Ch. *24*, 22 (1918).
14) P. N. Gallagher, Bl. (4) *29* 683, 961 (1921).
15) C. K. Ingold, Nature, *133*, 946 (1934).
16) B. Eistert, Tautomerie und Mesomerie, F. Enke Verlag, Stuttgart, 1938, pg. 177.
17) C. V. Gheorghiu, Rev. St. „V. Adamachi" *32*, 255 (1946).
18) C. V. Gheorghiu et V. Matei, G. *73*, 65 (1943).
19) S. S. Bhatnagar, P. L. Kapur et M. S. Hashmi, J. Indian Chem. Soc. *14*, 573 (1938).
20) E. Hückel, Z. El. Ch. *43*, 834 (1937).
21) R. H. Birtles et G. C. Hamson, Soc. *1937*, 10.
22) F. D. Chattaway, Soc. 89, 462 (1906).
23) M. Padoa, Atti Linc. *18*, I. 694 (1909); *M. P.* et F. Graziani, *18*. II 269, 599 (1909); *M. P.* et L. Santi, *20*. I, 675; *20*, II, 196 (1911); *M. P.* et G. Tabelline, *21*, II, 188 (1912); *M. P.* et L. Santi

21, I. 192 (1912); *M. P.* et B. Forestí, *22*, II, 576 (1913); *M. P.* et A. Zazzaroni, *24*, 828 (1915).
24) F. Graziani et F. Bovini, Atti Linc. *22*, I, 794; II, 34 (1913); G. *43*, II, 674 (1913).
25) L. Chalkley, Chem. Rev. 6, 217 (1929).
26) C. V. Gheorghiu et V. Matei, Bl. (5) *6*, 1324 (1939).
27) V. Matei, Contribution à l'étude de la phototropie des semicarbazones et des phénylhydrazones des cétones éthyléniques, Thèse (1942), Typ. A. Terek, Jassy, 1946.
28) G. Schwarzenbach, H. Mohler et J. Sorge, Helv. *21*, 1636 (1938).
29) B. Eistert, B, *72*, 860 (1939).
30) J. Alphen, B. *72*, 525 (1939); R. *59*, 289 (1940); C. *1940*, II, 48; R. *60*, 138 (1941); C. *1941*, I. 2939.
31) R. Scholl, B. *74*, 1129 (1941).
32) G. Scheibe. H. Dörfling et J. Assmann, A. *544*, 240 (1940).
33) H. Stobbe, A. *359*, I (1908).
34) Th. Förster, Z. El. Ch, *45*, 566 (1939)
35) Th. Zincke, B. *21*, 1040 (1888).

6 21, 313, 3

LA LONGUEUR DE L'ENTREFER DANS UN MOTEUR D'INDUCTION POLYPHASÉ

par

CESAR PARTENI ANTONI et VASILE CORLĂŢEANU

1. Un des problèmes les plus importants dans l'établissement d'un projet de moteur d'induction, c'est sans doute le choix de l'entrefer. Les conditions techniques dans lesquelles ce moteur fonctionnera et les conditions économiques de fabrication sont en directe liaison avec la valeur fixée pour l'entrefer.

D'autre part les différentes recommandations, quant au choix de cette valeur, sont très différentes suivant les auteurs consultés. Les usines de construction de machines électriques, d'autre part, possèdent en général des formules gardées secrètes pour la plupart des cas et établies d'habitude d'une façon empirique, résultat de l'expérience propre.

Ces formules, soit publiées, soit appartenant à des bureaux de calculs sont basées en général seulement sur l'expérience. La plupart du temps on ne tient compte dans la composition de ces formules que des éléments mécaniques, en négligeant presque complétement les considérations électriques.

2. Nous passerons en revue une série de formules recommandées par différents auteurs pour le calcul de la longueur de l'entrefer.

a) E. Arnold et J. L. la Cour [1]), pour la fréquence de 50 périodes par seconde, recommandent la relation :

$$\frac{\tau}{\delta} = \frac{1100 \text{ à } 1200 - 200\frac{l}{\tau}}{3 + 1{,}8D}.$$

$$\text{Si } \frac{l}{\tau} \cong 1, \text{ on a } \frac{\tau}{\delta} = \frac{1000}{3 + 1{,}8\,D}$$

où: δ est l'entrefer,

1) Cf. *Die Asynchronen Wechselstrommaschinen*, J. Springer, Berlin, 1909, V 1, p. 341.

τ le pas polaire en cm.,

D le diamètre en m. et

l la longueur de la machine en cm.

Les auteurs ajoutent les considérations suivantes:

Pour un diamètre D donné, l'entrefer δ sera d'autant plus petit que la vitesse périphérique v et le pas polaire seront plus petits. Quand la vitesse augmente les oscillations de l'axe augmentent aussi de manière qu'il y a danger d'une déformation de l'axe. Pour le même diamètre D, nous aurons besoin d'un entrefer plus grand si la longueur de la machine l est plus importante. En même temps l'attraction magnétique devient plus importante au fur et à mesure que la surface polaire augmente.

b) L. Barbillon[2]) indique une variation pour l'entrefer qui va de 5/10 mm. pour les petites machines d'induction à 2 mm. pour les grosses machines. Il attire l'attention sur le fait qu'une dyssymétrie de l'ordre de dixièmes de mm. peut entraîner l'échauffement des paliers par suite des attractions magnétiqués qui peuvent se produire.

c) Castanier[3]) recommande la valeur suivante pour δ:

$$\delta = 0{,}02 + \frac{D}{1000}$$

où D et δ sont donnés en cm.

d) G. Gillon[4]) sépare les petits moteurs des gros moteurs. Pour les premiers on prend $0{,}3 - 0{,}8$ mm. pour l'entrefer, tandis que pour les autres on peut admettre jusqu'à $2{,}4$ mm. Le choix de ces valeurs est basé surtout sur des considérations mécaniques. Il est avantageux de prendre un petit entrefer pour éviter les fuites magnétiques, qui à leur tour produiront un mauvais facteur de puissance.

e) L. Lagron[5]) pour des moteurs ayant la fréquence 50, recommande les valeurs:

$$\delta = \frac{(3 + 0{,}018\,D)\,\tau}{1100 \text{ à } 1200 - 200\frac{l_i}{\tau}} \qquad \text{avec: } \frac{l_i}{\tau} = 1 \text{ à } 1{,}2;$$

tous les éléments sont mesurés en cm.

l_i est la longueur idéale du fer:

---

2) Cf. *Moteurs asynchrones d'induction*, Albin Michel, Paris, 1922 p. 130.

3) Cf. *Cours de construction des machines électriques*, Ecole spéciale des travaux publics, Paris, 1931, II, p. 263.

4) Cf. *Dynamos et moteurs électriques*, Dunod, Paris, 1925, II, p. 113

5) Cf. *Les moteurs à courants alternatifs*, Dunod, Paris, 1932, p. 246.

$$l_i = l + 1{,}46\,(n_e + 1)\,\delta \log\left[1 + \frac{1{,}57\,b_c}{\delta}\right],$$

$$l = l_1 - n_e\,b_c,$$

l_1 est la longueur de la machine,

n_e le nombre des canaux de ventilation et

b_c la longueur d'un canal de ventilation en cm.

On prendra l'entrefer δ d'autant plus petit que la vitesse périphérique est plus petite. A alésage et pas polaire constants, δ sera d'autant plus grand que la longueur du moteur sera plus importante, parce que l'attraction magnétique augmente avec la longueur.

f) Suivant P. B. Arthur Linker[6]) δ doit être choisi le plus petit possible par considérations mécaniques et à cause de la possibilité de l'oscillation de l'axe. L'entrefer δ doit être augmenté quand le nombre de tours n augmente ou la puissance N devient plus importante. Aussi il augmente avec la longueur L parce que l'attraction magnétique devient plus importante quand la surface du pôle est plus grande. Si L est plus grand le centrage du rotor devient plus difficile.

Pour l'entrefer, l'auteur donne la formule de Kapp:

$$\delta \simeq 0{,}02 + \frac{D_2}{1000}\ \text{cm.},$$

où D_2 est le diamètre du rotor en cm.

Si l'on tient compte aussi de la longueur L du fer, on a une autre valeur:

$$\delta = \frac{240\,D_2 + 1{,}5\,D_2^2}{\left(b - \frac{l}{t_p}\right)p}\,10^{-4}\ \text{cm.}$$

où:

l est la longueur du fer (l'isolement inclus),

p le nombre de paire de pôles,

t_p le pas polaire.

g) La formule de Fischer-Hinnen est la suivante:

$$\delta = \frac{D_2}{1000}\left(\frac{10}{p} + 0{,}5\right)\ \text{cm.}$$

sans dépasser $\delta = 0{,}2$ cm.

h) A. Mauduit[7]) dans son cours donne la formule suivante pour le calcul de l'entrefer:

---

6) Cf. *Elektromaschinenbau*, J. Springer, Berlin, 1925, p. 98.

7) Cf. *Machines électriques*, Dunod, Paris, 1931, II, p. 1085.

$$\delta = C.D\sqrt{Ln}.10^{-6}$$

où :

D est le diamètre du rotor en cm.

L la longueur du moteur en cm.

n le nombre de tours par minute et

C une constante dont la valeur approximative serait 13,75.

i) R. Richter[8]) recommande un entrefer aussi petit que possible pour avoir le courant magnétisant I_μ réduit et un facteur de puissance acceptable.

Jusqu'aux puissances de 250 Kw. avec des rotors à bagues et 100 Kw. avec des rotors en court-circuit, l'entrefer δ sera choisi suivant les normes *V. D. E. 2650/51*. On prend pour δ au moins *0,2* mm. et on peut arriver à $\delta = 2{,}5$ mm. pour $2p = 10$. Si le moteur doit travailler dans des conditions difficiles on augmente δ de 60 %. On ne doit pas négliger la possibilité de déformation de la carcasse du moteur pour les grands diamètres et un grand nombre de pôles. Pour ne pas arriver à des constructions de carcasses trop lourdes, on prend pour le rapport $\frac{\delta}{D}$ au moins *0,001*.

j) M. G. Say et E. N. Pink[9]) recommandent pour les petits moteurs la relation :

$$\delta = 0{,}14 + 0{,}02\sqrt{DL} \text{ mm.}$$

avec D et L en cm.

Dans les plus petits moteurs l'entrefer est de l'ordre de *0,2* mm. Pour les grands moteurs on peut prendre pour l'entrefer des valeurs jusqu'à 2-3 mm.

k) Avec des moteurs ayant les paliers utilisés récemment, Rider recommande la valeur suivante pour l'entrefer :

$$\delta = 0{,}16\sqrt{D} - 0{,}25 \text{mm.}$$

avec D en cm.

l) H. F. Schait[10]) indique pour le calcul de l'entrefer δ, la formule suivante :

$$\delta = 930 \times \sqrt[7]{\frac{\theta^4 E_1^3 J_1^3}{p f^3 B_L^{10}}}$$

où :

8) Cf. *Elektrische Maschinen*, J. Springer, Berlin, 1936, IV, p. 405.

9) Cf. *The performance and design of alternating current machines*, London, Sir Isaac Pitman, 1936, p. 343.

10) Cf. *Kompensierte und synkronisierte Asynchronmotoren*, J. Springer, Berlin, 1929, p. 22.

E_1 est la f. é. m. induite dans une phase du stator,
J_1 le courant à pleine charge dans une phase,
f la fréquence,
p le nombre des pôles du moteur,
θ facteur d'ampères-conducteurs suivant Arnold,
B_L l'induction maximum dans l'entrefer,
$\varkappa$ constante de magnétisation.

B_L, θ et $\varkappa$ sont donnés dans un tableau spécial en fonction du nombre de pôles et de la puissance.

L'auteur indique que les valeurs de l'entrefer calculées suivant la relation précédente doivent être agrandies à la suite d'observations déduites de la pratique.

m) Miles Walker [11]) donne une courbe qui permet de déduire l'entrefer δ en fonction du diamètre D; la limite inférieure admise pour δ est de *0,04* cm. pour les très petits moteurs. L'entrefer doit être choisi de façon à ne pas entraîner une déformation de l'arbre et de la carcasse sous l'influence des attractions magnétiques.

La diminuation de l'entrefer δ augmente les fuites en zig-zag qui, pour les petits moteurs, sont assez importantes, le rapport entre le pas dentaire et l'entrefer δ ayant des valeurs assez grandes.

3. En examinant de plus près les formules données plus haut, il est facile de conclure que toutes ces relations s'occupent de la valeur de l'entrefer d'un moteur d'induction en fonction seulement des éléments mécaniques, à savoir: le diamètre ou le pas polaire, la longueur et quelquefois on fait entrer aussi le nombre de tours de la machine. Il est certain que pour les faibles entrefers, tels qu'on les rencontre dans les moteurs d'induction, les problèmes d'ordre mécanique doivent retenir tout particulièrement notre attention. Mais en même temps, nous estimons qu'il est hors de doute que, si cette condition est nécessaire, elle n'est pas suffisante. En vérité, on ne peut pas négliger les importantes répercussion que la longueur de l'entrefer ont sur le fonctionnement électrique de la machine. Par conséquent, il serait logique de faire entrer aussi dans la relation qui nous permet de calculer l'entrefer, les caractéristiques magnétiques et électriques du moteur considéré. Seul Schait fait entrer ces éléments dans sa formule pour l'entrefer; mais la forme extrêmement compliquée à laquelle il aboutit réduit beaucoup la valeur de ses intentions.

---

11) Cf. *Calcul et spécification des machines dynamo-électriques*, Lib. Ch. Béranger, Paris et Liège, 1922, p. 457 et 517.

Dans une autre étude [12]) nous avons examiné l'influence de la variation de l'entrefer sur le fonctionnement d'un moteur d'induction. A cette occasion nous avons trouvé une série de relations entre l'entrefer et les différents éléments qui déterminent le fonctionnement d'un moteur d'induction polyphasé.

Partons de la valeur de la puissance P,

$$P = q_1 E_1 I_1 \cos \varphi$$

où :

q_1 représente le nombre de phases,
E_1 la tension par phase,
I_1 le courant par phase et
φ le facteur de puissance.

Dans l'étude citée plus haut nous avons trouvé :

$$E_1 = \frac{C_{17}}{\delta}$$

avec :

$$C_{17} = k_1 p n_1^2 \omega I_1 S_\delta 10^{-8} \sqrt{\frac{m^2}{(1+C'_1)^2} - 2 v_1 v_2 \frac{m^2}{(1+C'_1)^2} + \frac{v_1^2}{(1+C_1)^2}}$$

$$I_1 = \frac{C_8}{C_{12} + \frac{C_{13}}{\delta}} \qquad \text{avec: } C_8 = \frac{P}{q_1 U_1}$$

$$\cos \varphi = C_2 + \frac{C_{13}}{\delta}.$$

Les notations sont les suivantes :
C et k des constantes,
p le nombre de paires de pôles,
n_1 le nombre de spires du rotor,
ω la pulsation du courant alternatif,
S_δ la surface moyenne de l'entrefer,
m le rapport de transformation du moteur à vide,
v_1 v_2 les coefficients de Hopkinson pour le stator et le rotor,
$C_1 C'_1$ les rapports entre les réluctances du fer et de l'entrefer pour le stator et le rotor.

En remplaçant les valeurs de E_1, I_1 et $\cos \varphi$ dans la relation de P, on obtient pour l'entrefer δ, après avoir fait tous les calculs :

12) Cesar Parteni Antoni et Vasile Corlăţeanu. *L'influence de la variation de l'entrefer sur le fonctionnement d'un moteur d'induction polyphasé* Bull. de l'Ec. Polytechnique de Jassy, **1**, (1946), 135-156.

$$\delta = k' \frac{p f I_1 S_\delta}{U_1}$$

avec :

$$k' = k_1 \, 2\pi \, n^2_1 \, 10^{-8} . \, A$$

où A représente le radical qui entre dans la valeur de C_{17}.

Evaluons maintenant la surface de l'entrefer en prenant la moyenne de ses surfaces pour le stator S'_δ et le rotor S''_δ :

$$S_\delta = \frac{S'_\delta + S''_\delta}{2} .$$

S'_δ et S''_δ sont calculables à l'aide des relations empiriques de la forme :

$$S'_\delta = \frac{1}{2} \left[\frac{S_{ds} + \frac{u_{2r}}{u'_{2r}} S_{dr}}{2} + \frac{L_{fer}}{L} S_{ds} \right]$$

où :

S_{ds}, S_{dr} sont les surfaces des dents du stator et du rotor,
u_{2s}, u_{2r} les pas dentaires à la périphérie du stator et du rotor,
u'_{2s}, u'_{2r} les pas dentaires au fond des encoches du stator et du rotor,
L la longueur de la machine.

S''_δ sera de la même forme, seulement il faudra partout changer les indices s et r entre eux.

En examinant ces relations on constate que la surface de l'entrefer S_δ est proportionnelle au produit du diamètre D par la longueur L, soit de la forme :

$$S_\delta = k'' DL.$$

La constante k'' peut être calculée, mais le résultat est assez compliqué, fonction des dimensions des dents.

Introduisons la valeur de S_δ dans l'expression trouvée pour δ :

$$\delta = k' k'' \frac{p f I_1 DL}{U_1} .$$

En amplifiant cette fraction par U_1, on a :

$$\boxed{\delta = k D L p f P} \text{ mm.}$$

avec :

$$k = \frac{k' k''}{U_1^2} ;$$

D et L seront pris en cm.

Nous estimons que la valeur de δ exprimée par la relation pré-

cédente s'approche un peu plus de la réalité parce que l'entrefer est calculé en fonction, outre du diamètre et de la longueur, de la puissance, de la fréquence et du nombre de pôles.

Nous n'avons pas la prétention de donner une formule exacte. Nous espérons qu'à l'aide de cette relation les valeurs obtenues pour les entrefers des moteurs d'induction en projet seront plus rapprochées des valeurs qui puissent donner des résultats convenables pour le fonctionnement du moteur.

Toute la difficulté dans l'évaluation de l'entrefer δ, réside dans le choix de la valeur à adopter pour la constante k. L'expression de cette constante est calculable mais sa forme est trés compliquée, ce qui rendrait superflu les calculs exacts. Dans cette situation nous avons essayé de donner des courbes pour trouver plus facilement la valeur de k.

4. Nous avons dressé le tableau suivant concernant le calcul de l'entrefer δ pour une série de 83 moteurs d'induction triphasés, tous construits.

Nous avons extrait les donnés nécessaires pour ces calculs des exemples numériques de moteurs construits publiés dans différents raités concernant le calcul des machines électriques. Nous avons ajouté une autre série de moteurs construits dans quelques grandes maisons de construction de machines électriques d'Europe et dont nous possédions les chiffres nécessaires.

Nous avons calculé les entrefers suivant les formules données par Linker (δ_L), Fischer-Hinnen (δ_{FH}), Arnold (δ_A) et Schait (δ_S). Nous avons calculé aussi la constante C_M de Mauduit. Nous avons choisi seulement les formules fondamentales de calcul, en laissant de côté, celles qui présentent seulement de petites modifications et qui dérivent, d'une façon très visible, des formules que nous avons utilisées.

Dans une autre colonne nous avons porté les valeurs des entrefers réels, telles qu'elles sont indiquées pour les moteurs considérés.

Enfin, dans une dernière collonne nous avons calculé les valeurs de k, correspondant à la relation que nous avons donnée plus haut pour l'entrefer δ.

Examinons maintenant les chiffres contenues dans ce tableau et essayons d'en tirer les conclusions.

On constate une très grande différence entre les valeurs réelles des entrefers et les valeurs calculées par les différentes formules indiquées plus haut. La plupart des cas les différences sont telles, qu'on n'ose plus utiliser l'une ou l'autre de ces formules.

Quelques unes de ces formules donnent des résultats assez appro-

chés pour une série de machines, tandis qu'ils sont très différents pour d'autres machines.

Nous avons considéré et pris comme base les valeurs de l'entrefer δ dans les moteurs construits. Il est vrai que, même pour ces valeurs, on peut se demander si le calcul a donné les résultats qui correspondent au meilleur rendement pour le moteur considéré. Naturellement il est difficille de donner réponse à une pareille objection, d'autant plus que nous n'avons pas eu le moteur à notre disposition pour le soumettre aux essais, qui seuls pourraient donner des informations exactes sur le problème posé.

Pourtant, on est en droit de supposer que, du moment que ces machines ont été choisies comme exemples par des auteurs d'une haute autorité technique, elles devaient satisfaire aux meilleures conditions de fonctionnement à tous les points de vue.

5. Nous avons essayé de rassembler les valeurs trouvées pour le coefficient k, en fonction de la puissance de la machine P dans les courbes des fig. 1 et fig. 2, et pour un nombre différents de pôles. La première figure se rapporte à des puissances jusqu'à 700 Kw. environ

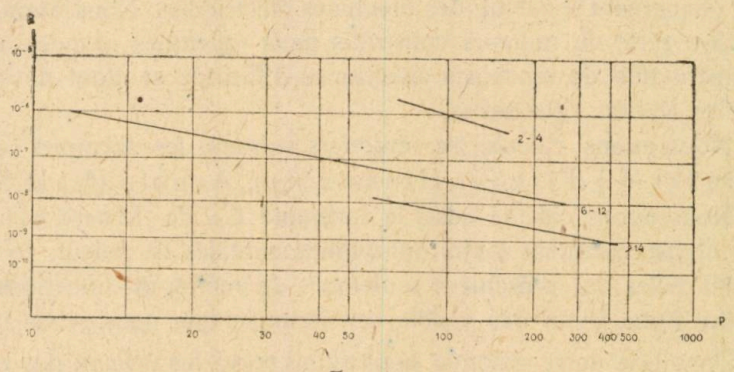


Fig. 1

Le coefficient k pour le calcul de l'entrefer δ, d'un moteur d'induction triphasé en fonction de la puissance P en Kw. et du nombre de pôles. Ces courbes se rapportent à des puissances jusqu'à 700 Kw.

la deuxième à des puissances plus importantes. Dans une échelle logarithmique, les points trouvés s'alignent sur des droites qui présentent un certain parallèlisme entres elles. Ces différentes droites se rapportent à des moteurs avec des nombres de pôles différents. On constate des valeurs pour k d'autant plus petites que la puissance du moteur est plus grande. En même temps on observe que les droites qui s'éloignent de la région de l'abscisse (fig. 2) se rapportent à des moteurs ayant un nombre de pôles de plus en plus petit.

TABLEAU

des entrefers réels et des entrefers calculés pour différents moteurs

	P	$n\,t/m$	f	$2p$	U	D	L	$\delta_{réal}$	C_M^*	δ_L	δ_{FH}	δ_A	δ_S	k
1	0,3	1050	35	4	200	11,4	6	0,3	10,75	0,08	0,43	0,29	0,008	$2{,}6.10^{-3}$
2	1	750	25	4	230	3	9,1	0,4	7,9	0,16	0,52	0,42		$2{,}9.10^{-3}$
3	2	1440	48	4	220	2,5	8,5	0,5	13,5	0,12	0,72	0,35		$1{,}2.10^{-4}$
4	3	1500	50	4	260	10	10	0,5	11,1	0,16	0,82	0,43		$1{,}67.10^{-4}$
5	3	1500	50	4	500	9	9	0,4	8,06	0,18	1,1	0,53		$1{,}65.10^{-4}$
6	4	1500	50	4	200	6	13,7	0,5	5,44	0,17	0,80	0,43		$1{,}5.10^{-4}$
7	10	1500	50	4	190	10	11	0,5	7,52	0,22	1,25	0,56		$4{,}4.10^{-5}$
8	20	1500	50	4	190	6	19	0,6	5,34	0,29	1,42	0,81		$2{,}5.10^{-5}$
9	20	1000	50	6	500	34	12	0,9	4,21	0,53	1,72	0,9		$1{,}22.10^{-6}$
10	25	1000	50	6	500	7	15,6	0,6	5,86	0,35	1,18	0,64		$1{,}46.10^{-6}$
11	25	750	50	8	420	20,3	19,3	0,75	4,72	0,53	1,12	0,66		$3{,}8.10^{-7}$
12	40	1000	50	6	120	24	24	0,75	5,1	0,48	1,38	0,82		$2{,}15.10^{-7}$
13	52	653	43,5	8	330	31	20	1	4,1	0,62	1,12	0,77		$1{,}8.10^{-7}$
14	30	300	50	20	3000	100	12	1	6,2	1,58	1,65	0,91		$5{,}6.10^{-8}$
15	90	500	50	12	400	39,4	25	0,9	14,9	1,1	1,22	0,80		$3{,}8.10^{-8}$
16	150	750	50	8	3600	47	24	0,85	7,25	0,88	1,90	1,14		$2{,}5.10^{-8}$
17	150	500	50	12	500	73	18	1,5	9,22	1,17	1,93	1,15		$2{,}54.10^{-8}$
18	80	200	50	30	200	100	34	1,15	16,5	4,78	1,30	1,10		$5{,}8.10^{-9}$
19	250	500	50	12	3000	95	24	1,5	12,5	1,74	2,40	1,56	0,053	$8{,}9.10^{-9}$
20	180	315	42	16	2000	105	24	1,4	11,7	2,13	2	1,43	0,058	$9{,}3.10^{-9}$
21	400	600	50	10	2400	84	38,5	1,5	11,7	1,79	2,5	1,76		$4{,}6.10^{-9}$
22	525	300	50	20	5000	140	35	1,5	9,5	3,58	2,38	1,80		$1{,}2.10^{-9}$
23	150	70	21	36	530	275	17,5	1,75	8,85	6,93	2,18	2,24		$7{,}5.10^{-9}$
24	750	250	50	24	6300	175	39	1,5	27	5,18	2,62	1,83		$4{,}8.10^{-10}$
25	570	75	22,5	36	1900	302	35,2	1,5	7,9	10,58	3,29	2,98		$6{,}1.10^{-10}$
26	450	57,3	21	44	500	410	31	2	8,6	14,80	2,95	3,60		$7{,}5.10^{-10}$
27	650	62,5	25	48	2000	450	41	3,5	11,2	20,48	3,38	4,1	0,368	$5{,}7.10^{-10}$
28	550	3000	50	2	2000	23	53	3	14,1	0,59	5,32	3,27		9.10^{-8}
29	420	1500	25	2	5000	23,5	53	3,5	13,8	0,64	3,10	3,66		$2{,}7.10^{-7}$
30	475	1200	40	4	1000	45	38	2,25	20,8	0,98	4,28	2,5		$3{,}4.10^{-8}$
31	625	1000	50	6	2100	43,5	57	2,5	15,2	1,24	2,55	1,91		$4{,}1.10^{-8}$
32	16	1000	50	6	400	23	16,5	0,7	13,8	0,47	1,47	0,80		$7{,}7.10^{-7}$
33	16	800	40	6	240	26	24	0,75	14,3	0,49	1,35	0,85		5.10^{-7}
34	10	1000	50	6	200	23	18	0,75	15,6	0,42	1,30	0,72		$1{,}2.10^{-6}$
35	25	950	50	6	380	24,9	24	0,40	10,4	0,4	0,95	0,61		$8{,}9.10^{-8}$
36	65	1000	50	6	500	39	24	0,75	12,4	0,495	1,49	0,88		$4{,}1.10^{-8}$
37	4	1500	50	4	380	14,9	10	0,45	24,5	0,15	0,74	0,42		$3{,}8.10^{-6}$
38	5,2	1500	50	4	500	19,9	14	0,75	26	0,32	0,6	0,57		$2{,}6\,10^{-6}$
39	29,5	1500	50	4	500	26,1	19	0,8	18,2	0,34	1,43	0,80		$2{,}7.10^{-7}$
40	37,5	1000	50	6	220	33,9	26	1	18,2	0,48	1,29	0,80		1.10^{-7}
41	240	1500	50	4	1000	41,7	34	1,1	11,5	0,51	2,30	1,37		$1{,}6.10^{-8}$
42	16,5	1000	50	6	380	24,9	17	0,5	15,2	0,33	0,96	0,77		$1{,}7.10^{-7}$
43	16,5	960	50	6	500	24,9	17	0,5	15,7	0,33	0,96	0,54		$2{,}1.10^{-7}$
44	22	964	50	6	380	24,9	24	0,5	13,15	0,40	0,96	0,98		$1{,}27.10^{-8}$
45	22	1000	50	6	380	24,9	24	0,5	13,15	0,40	0,96	0,98		$1{,}27.10^{-8}$
46	33	935	50	6	500	30,8	21	0,65	14,85	0,40	1,18	0,68		1.10^{-7}
47	750	750	50	8	3100	90,7	45	1,25	6,72	1,54	2,7	1,95		1.10^{-9}
48	3850	428	50	14	12300	211	70	2	5,51	6,2	4,06	3,6		$5{,}3.10^{-11}$
49	950	750	50	8	5500	91,7	45	1,25	7,4	1,53	2,75	1,9		8.10^{-9}
50	1040	750	50	8	5500	108,7	35	1,5	8,32	1,64	3,27	2,25		$9{,}6.10^{-8}$
51	1180	750	50	8	5500	108,7	40	1,5	7,98	1,73	3,27	2,30		$7{,}3.10^{-10}$
52	1360	750	50	8	5500	108,7	45	1,5	7,5	1,79	3,27	2,4		$2{,}7.10^{-10}$
53	1470	750	50	8	5500	124,6	35	1,75	8,62	1,92	3,70	2,7		$6{,}8.10^{-9}$
54	1680	750	50	8	5500	124,6	40	1,75	8,1	1,99	3,70	2,75		6.10^{-9}
55	2200	750	50	8	5500	124,6	50	1,75	7,25	2,14	3,74	2,85		$3{,}5.10^{-9}$
56	2450	750	50	8	5500	140,6	45	1,75	6,76	2,36	4,2	3,25		$2{,}9.10^{-9}$
57	630	750	50	8	5500	91,7	31	1,25	8,92	1,31	2,76	1,80		1.10^{-9}
58	4300	428	50	14	12300	210,6	70	2	5,5	6,06	4,33	3,90		$5{,}1.10^{-11}$
59	650	125	50	48	5000	309,6	45	2	8,6	14,8	2,85	2,5		$7{,}2.10^{-11}$
60	1500	83,3	50	72	3000	408,5	35	2,2	3,42	20	3,2	2,55		$2{,}9.10^{-11}$
61	1250	375	50	16	3100	140	41	1,75	10,06	3,09	2,45	1,90		3.10^{-10}
62	1500	300	50	20	3150	160	60	2	4,7	5,93	2,4	2,35		$1{,}4.10^{-10}$
63	650	125	50	48	5000	310	45	2	8,7	15,25	2,85	2,65		9.10^{-11}
64	1450	500	50	12	5000	141	50	1,7	7,6	3,12	3,05	2,45		$2{,}7.10^{-10}$
65	1200	230	50	26	2350	210	40	1,8	8,9	5,53	2,67	2		$1{,}4.10^{-10}$
66	2200	750	50	8	12300	160	50	3	9,7	2,83	4,8	4		$4{,}3.10^{-10}$
67	250	375	50	16	3000	92	30	1	10,45	1,83	1,61	1,1		$1{,}8.10^{-9}$
68	1750	1000	50	6	3000	109	50	1,75	7,2	1,66	3,9	3		$6{,}1.10^{-10}$
69	200	300	50	20	3000	92	35	1	10,6	2,70	1,38	1,1		$1{,}5.10^{-9}$
70	415	230	30	26	500	125	40	1,5	11,25	4,80	1,59	1,4		$5{,}5.10^{-10}$
71	3300	600	50	10	12300	185	55	2	6,12	3,75	4,63	4		$1{,}1.10^{-10}$
72	720	1000	50	6	2000	92	45	1,75	8,93	1,35	3,5	2,4		$2\,10^{-9}$
73	325	125	50	48	3000	210	30	1,50	11,6	7,90	1,93	1,4		$3{,}1.10^{-9}$
74	540	150	50	40	3000	210	35	1,75	11,5	7,62	2,1	1,65		$2{,}2\,10^{-10}$
75	1500	246	50	24	3000	238,6	47	2	7,81	7	3,2	2,9		1.10^{-10}
76	350	1480	50	4	2200	45,7	38,5	1,25	11,5	0,58	2,5	1,55		1.10^{-8}
77	35	980	50	6	500	39,8	14	0,80	17,1	0,42	1,52	0,8		8.10^{-8}
78	24	1500	50	4	220	23,8	15,5	0,6	16,5	0,32	1,31	0,7		$3{,}4.10^{-7}$
79	50	750	50	8	500	45	24	0,8	13,2	0,64	1,35	0,81		$3{,}7.10^{-8}$
80	11	950	50	6	380	23	18	0,5	17,35	0,31	0,88	0,52		$3{,}6\,10^{-7}$
81	45	1500	50	4	200	28	0,5	16,4	0,33	0,54	0,75			$2{,}8.10^{-8}$
82	200	428	50	4	2000	105	3	25,2	1,71	2	1,3			8.10^{-9}
83	30	975	50	6	220	36	0,73	13,8	0,48	1,98	0,80			1.10^{-7}

Naturellement on ne peut pas avoir la prétention de résoudre d'une façon absolue le problème du choix de l'entrefer d'un moteur d'induction triphasé. Nous espérons contribuer seulement à donner des indications qui peut être faciliteront dans une certaine mesure le calcul de cette catégorie de moteurs.

Conclusions.

6. Nous proposons pour le calcul de l'entrefer δ d'un moteur d'induction triphasé la formule indiquée au § 3. Cette relation, par rapport aux autres formules analogues, présente, à notre avis, l'avantage de contenir aussi des éléments magnétiques et électriques de la machine, à coté des éléments mécaniques, uniquement utilisés presque dans la totalité des relations données pour le calcul de l'entrefer δ.

Les figures 1 et 2 permettent de déduire pour des moteurs de différentes puissances et divers nombres de pôles la valeur de la constante k, qui entre comme facteur dans la formule donnant l'entrefer δ.

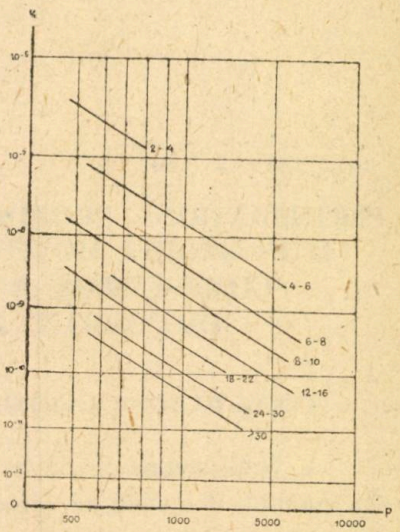


Fig. 2

Le coefficient k pour le calcul de l'entrefer δ d'un moteur d'induction triphasé, en fonction de la puissance P en Kw. et du nombre de pôles. Ces courbes se rapportent à des puissances plus grandes que 700 Kw.

Etant donné la grande importance de la valeur attribuée à l'entrefer δ pour le projet entier d'un moteur d'induction, on conçoit facilement le soin qu'il faut apporter dans la détermination de cet élément de la machine. Avec la formule recommandée et les courbes données nous croyons que la détermination de l'entrefer sera plus facile et les valeurs trouvées seront plus près des meilleurs valeurs à choisir.

Pour établir les courbes nous avons eu à notre disposition seulement les données relatives à 83 machines. Si on pouvait disposer des données recueillis sur plusieurs centaines de moteurs d'induction, il est certain qu'en suivant le même principe on pourrait aboutir à des courbes qui donneraient des valeurs beaucoup plus proches de la réalité pour la constante k et par conséquent pour l'entrefer δ.

Laboratoire de Machines électriques.
Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1946).

621.313.333 & 622.512

PERTURBATIONS PRODUITES PAR LE FONCTIONNEMENT D'UN GROUPE MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASÉ – COMPRESSEUR A PISTON SUR L'INTENSITÉ DU COURANT ABSORBÉ AU RÉSEAU *)

par

CESAR PARTENI ANTONI, V. CORLĂŢEANU et V. HANGANU

1. Nous avons étudié les perturbations produites dans l'intensité du courant, demandé au réseau par un groupe composé d'un moteur asynchrone triphasé et d'un compresseur à piston, fonctionnant dans les installations frigorifiques de Galatz, appartenant à l'administration des pêcheries de l'Etat roumain.

Le moteur asynchrone, d'une puissance de 90 C. V. à 1440 t : min. est alimenté en triphasé à une tension de 380 volts composée. Le moteur a le rotor bobiné en barres soudées et est prévu avec des bagues et rhéostat de démarrage.

Le compresseur utilise l'ammoniac et sert à produire environ 60.000 frigories par heure. Il est du type vertical avec 3 cylindres à simple effet ayant 360 t : min. Les cylindres sont alimentés directement et la sortie de l'ammoniac comprimé s'exécute de la même manière pour les 3 cylindres. Le fonctionnement des pistons présente un décalage de $2\pi/3$ entre eux.

La transmission de la puissance est réalisée par l'intermédiaire d'une courroie, fractionnée en 6 tranches trapézoïdales, le rapport des poulies étant 1 : 4.

L'ampèremètre de contrôle indique certaines variations dans l'intensité du courant demandé au réseau. De temps en temps ces variations deviennent très importantes et le personnel de surveillance a signalé le fait.

2. Pour élucider cette question et chercher les causes des fortes

*) Ce travail a été communiqué à l'Académie des Sciences de Roumanie dans la séance du 7 Mai 1947.

variations du courant nous avons entrepris certaines recherches pour nous rendre compte de la façon dont fonctionne le groupe étudié.

Nous avons fait plusieurs mesures pour différentes charges du groupe, la première se rapportant au moteur fonctionnant à vide, sans courroie de transmission.

Les résultats sont donnés dans le tableau.

De l'examen des résultats contenus dans ce tableau, on peut déduire :

a) Dans le functionnement à vide du moteur, il existe des variations d'environ 5,7% de la valeur moyenne du courant absorbé.

b) En charge normale, on constate à peu près les mêmes variations du courant. Cela nous montre que le phénomène Goerges-dont nous parlerons plus loin - est l'élément prépondérant, parce que l'on constate presque les mêmes variations dans l'intensité du courant en charge aussi bien qu'à vide.

c) Pour une charge brusque d'environ 30% de la charge initiale, ces variations augmentent, atteignant 19,4% de la valeur moyenne du courant demandé au réseau.

d) En charge normale, si le moteur I (étudié) alimente e compresseur II, on observe des variations du courant dans le stator de 7,5%, par conséquent de même ordre qu'au point a.

TABLEAU

des mesures effectuées sur le groupe à l'étude.

	Fonctionnement du moteur	Courant dans le stator			Puissance dans le stator			Glissement g %	Observations
		Valeurs extrêmes en ampères	Variations totales	% par rapport à la valeur moyenne	Valeurs extrêmes en Kw.	Variations totales	% par rapport à la valeur moyenne		
1	à vide sans courroie	30,9 — 32,7	1,8	5,7	12,330	—	—	0,27	petites variations aux wattmètres
2	en charge normale	58,5 — 60	1,5	2,5	31,5—34,9	3,4	10,2	—	
3	charge brusque	72 — 87	15	19,4	42,2— 52,3	10,1	21,3	2,06	agrandiss. brusque de la charge précéd.
4	en charge normale	67 — 71	4	5,8	36,4—41,8	5,4	13,8	1,4	
5	" " "	109,8—114,8	5	4,45	69 —72,6	3,6	5,1	1,7	
6	" " "	96 —103,5	7,5	7,5	58,5—65,7	7,2	11	—	le moteur I entraînant le compres. II
7	" " "	106 —114	8	7	—	—	—	—	le moteur II entraînant le compres. II

e) Le moteur II en charge normale présente des variations de courant du même ordre de grandeur.

f) Le glissement du moteur varie avec la charge, prenant une valeur plus grande au moment de la charge brusque. En mettant un ampèremètre à courant alternatif dans le circuit du rotor, on constate un synchronisme parfait entre la fréquence des oscillations des courants dans le stator et le rotor.

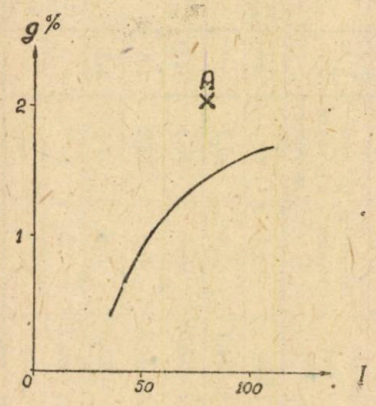


Fig. 1

Dans la figure 1, nous avons tracé la courbe des glissements en fonction du courant statorique.

Dans le cas des fortes variations du courant demandé au réseau, par suite de la charge brusque, le glissement se présente comme un point singulier *A* par rapport à notre courbe.

On peut l'expliquer en admettant qu'au moment de la charge brusque, le couple résistant augmente aussi brusquement et le volant n'a pas le temps d'intervenir, ce qui conduit à une forte chute de vitesse au moteur d'entraînement, d'où un glissement agrandi.

g) La valeur de la puissance demandée au réseau présente aussi des variations de même ordre que le courant.

Il faut ajouter encore quelques observations:

A) De nature électrique:

a) Les courants par phase dans le rotor ont été égaux entre eux dans tous les essais.

b) Les tensions moyennes par phase ont été aussi égales entre elles. Celles-ci présentaient certaines variations, difficiles à poursuivre avec les voltmètres.

c) L'isolement entre phases et par rapport à la masse a été vérifié à l'aide d'un ohmmètre et a été trouvé en bon état.

B) Au point de vue mécanique:

a) A la suite d'un accident, l'axe du moteur a été réparé dans des conditions satisfaisantes, de façon que le rotor tourne rond et l'entrefer a été trouvé uniforme et égal à 1,2 mm.

b) L'axe du moteur appuie sur deux paliers avec des roulements à billes. Le roulement qui se trouve du côté de la poulie a été changé et remplacé par un autre ayant des dimensions plus petites. On a constaté après un certain temps de fonctionnement un échauffement un

peu plus prononcé par rapport à l'autre roulement, sans que cela présente aucun danger.

c) Le compresseur entraîné par le moteur à l'étude a été reconditionné, ce qui conduit à des couples résistants plus importants que l'autre compresseur, par suite de l'élimination de toute fuite de gaz.

d) Le volant du compresseur I présente une fissure. Par suite des réparations qu'il a subies, il n'est plus équilibré au point de vue dynamique. Par conséquent, il ne tourne plus rond et produit certaines vibrations, dont l'amplitude latérale atteint 2 mm. à la périphérie.

3. Nous essayerons maintenant d'interpréter les résultats obtenus plus haut.

Les variations observées dans la valeur du courant demandé par le moteur pour la marche à vide nous indique d'une manière précise la présence du phénomène Goerges. La théorie complète de ce phénomène a été donnée par M. le Prof. A. Mauduit [1]).

La présence de ce phénomène n'implique pas absolument la rupture d'un fil dans le rotor polyphasé d'un moteur asynchrone, pour arriver ainsi à un rotor monophasé, d'après l'exposé classique. Suivant la théorie de Mauduit il suffit qu'une certaine dyssymétrie se produise dans le rotor. De cette manière, au bobinage polyphasé du rotor s'ajoute un bobinage monophasé. Le résultat se manifeste par la présence d'un courant de pulsation $(1-2g)\omega$ qui circule dans le stator et qui produit les variations entre certaines limites du courant demandé au réseau.

Dans le cas présent, il est facile de s'imaginer la cause de ces dyssymétries dans le rotor :

Il est possible que les résistances de contact pour la mise en court circuit du rotor à la fin du démarrage ne soient pas absolument symétriques.

Nous avons montré au § 1 que le bobinage du rotor est constitué par des barres soudées. Il suffit que certaines soudures soient imparfaites ; nous aurons des résistances qui s'introduisent dans les différentes phases du bobinage rotorique. Sauf un cas tout à fait exceptionnel, ces modifications des résistances des phases seront différentes d'une phase à l'autre et nous serons de cette manière dans le cas du phénomène Goerges, produit par une dyssymétrie du bobinage rotorique.

Nous avons produit artificiellement dans le laboratoire de très légères dyssymétries dans le rotor polyphasé d'un moteur asynchrone

1) A. Mauduit, *Machines électriques*, Dunod, Paris, 1931, vol. II. pag. 984-994.

Cf. R. G. E. 1932, t. XXXI, p. 662-664.

triphasé. A l'oscillographe cathodique on a observé immédiatement la variation du courant statorique. Ces expériences confirment d'une manière certaine que les plus légères dyssymétries du bobinage rotorique nous amènent aux conséquences produites dans le phénomène Goerges.

Les modifications des résistances de soudure, peuvent provenir soit d'une construction moins soignée, soit des accidents survenus par la suite. Surtout dans le cas de ce moteur, qui a été démonté et a subi un accident, en faisant une chute d'une certaine hauteur, il est facile à admettre que certaines soudures ont été modifiées et par conséquent leur résistances ont changé.

Nous avovs vu, que la fréquence des courants produits par le phénomène Goerges est égale à $(1-2g)\omega$. Pour l'essai Nr. 3, nous avons mesuré un glissement de $g = 0{,}0206$. En supposant la fréquence d'alimentation égale à 50 per : sec., nous avons pour la fréquence des courants dus au phénomène Goerges :

$$f_G = (1-2.0{,}0206).50 = 47{,}94 \text{ per : sec.}$$

Le moteur tourne à *1440* t : min ; le rapport des poulies étant *1 : 4*, le compresseur a *360* t : min, ou 6 t : sec. Un tour correspond à *47,94 : 6 = 7,99* périodes par seconde du courant Goerges.

b) Le compresseur à piston fonctionne suivant le schéma de la fig. 2. Il est à trois pistons décalés de $2\pi/3$ l'un par rapport à l'autre et calés sur le même arbre. L'alimentation est faite directement dans tous les cylindres et aussi l'évacuation des gaz comprimés.

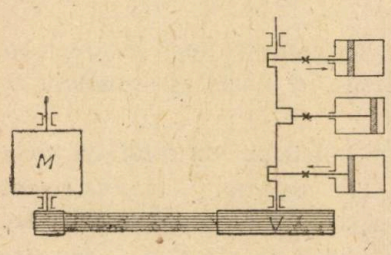


Fig. 2

Il est bien connu que le fonctionnement d'un compresseur à piston entraîné par un moteur asynchrone produit des variations assez importantes du courant demandé au réseau. Les normes américaines admettent pour les limites supérieures des pulsations du courant jusqu'à $66\,^0/_0$, ce qui revient à $33\,^0/_0$ autour de la valeur moyenne du courant [2]). Ces limites sont, en général, réduites par l'emploi des volants. Ceux-ci rendent beaucoup plus petites les irrégularités dues au fonctionnement même du système.

---

2) S. Kohn, *Aspect actuel du problème de la commande électrique des compresseurs de grande puissance.* Bull. Soc. Fr. des Electriciens, 6-e série, t. VI, 1946, p. 425-443.

Pour nous rendre compte de ce qui se passe dans notre groupe, nous avons tracé la courbe représentant le couple résistant du compresseur (fig. 3). La courbe résultante est obtenue en composant les courbes qui représentent les couples résistants dans les trois cylindres[3]), en tenant compte de leurs décalages.

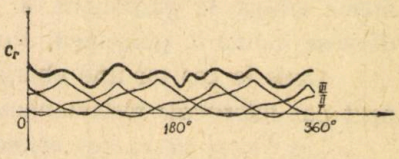


Fig. 3.

Dans notre cas spécial, il est possible que le défaut de déséquilibrage du volant, signalé plus haut (§ *2Bd*), produise des efforts supplémentaires qui, dans des circonstances particulières, peuvent s'ajouter aux valeurs maxima des efforts tangentiels.

La courbe résultante de la fig. 3 présente des variations d'environ 50 % entre les limites extrêmes du couple résultant, ou 25 % par rapport à la valeur moyenne. En marche normale, on trouve des valeurs beaucoup plus petites par suite de la présence du volant qui amortit dans une large mesure les variations habituelles du couple résistant Cette même courbe a 7 maxima pendant 360°, soit un tour de compresseur. Un tour de celui-ci correspond à 1/6 sec., ce qui nous donne 8 et 1/3 périodes du courant d'alimentation.

Pour un tour de manivelle, soit 360°, nous aurons la fig. 4. Nous avons d'une part la courbe résultante de la fig. 3 pour les efforts que le moteur doit développer par suite de l'entraînement du compresseur. Naturellement, les variations dans le couple moteur ont une répercussion directe sur les valeurs du courant absorbé par le moteur. D'autre part, pendant le même intervalle d'un tour de compresseur, nous avons montré que 8 et 1/3 périodes du courant correspondent à 50 périodes par sec. Le courant résultant, absorbé au réseau par le moteur, aura la forme donnée par la fig. 4.

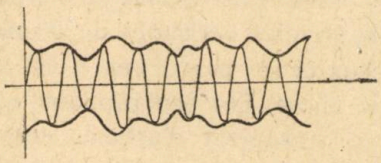


Fig. 4.

c). Les deux phénomènes montrés plus haut ont été étudiés seulement quand ils se sont produites séparément.

Dans notre cas ces deux phénomènes actionnent à la fois, de façon qu'il est possible d'avoir des résultats tout à fait différents.

En effet, dans notre essais, sauf le troisième, rien d'anormal n'arrive, les fluctuations du courant restant dans des limites très rapprochées.

Pendant le deuxième essai on a chargé brusquement le compres-

3) H. Göschel et E. Lampel, *Elektrisch angetriebene Kolben-Gaskverdichter in chemischen Grossanlagen.* Siemens-Zeitschrift, 1938, p. 365-380.

seur d'environ 30% de sa charge. Aussitôt après ont commencé de fortes variations dans le courant absorbé au réseau. Celles-ci ont passé de 2,5% à 19,4%, soit à peu près huit fois la valeur précédente. En même temps le glissement a augmenté à la valeur de 2,06%, qui dépasse même le glissement trouvé pour la pleine charge du moteur.

Dans le cas où une charge brusque survient, le couple moteur ne peut pas intervenir instantanément pour couvrir le couple résistant.

Les forces vives des masses en mouvement (du volant), probablement, à cet instant ne sont pas non plus suffisantes pour couvrir la puissance nécessaire, parceque le volant est calculé seulement pour adoucir les irrégularités dans le fonctionnement normal et non pas en cas de surcharges importantes et brusques. Par suite, il se produit un freinage du moteur et un agrandissement du glissement.

A notre avis les grandes variations dans la valeur du courant trouvées dans l'essai Nr. 3 sont dues aux deux phénomènes examinés plus haut qui agissent simultanément et auxquels on doit ajouter l'effet supplémentaire dû au déséquilibrage du volant, dont nous avons parlé plus haut.

En effet, on pourrait dire que les deux phénomènes seuls ne seraient pas suffisants pour déclancher les grandes variations observées dans l'intensité du courant. Nous avons constaté qu'en charge normale et même avec des surcharges brusques les grandes variations de courant n'apparaissent pas toujours. Pour que ceux-ci se produisent, il est nécessaire qu'il intervienne encore quelque chose. On peut supposer que la défaut du volant soit la cause de ce suplément d'action, surtout parce que le deuxième groupe ayant un volant en bon état n'occasionne jamais des variations analogues quant à la valeur du courant absorbé. Suivant que le couple supplémentaire dû à l'irrégularité du volant est additif ou soustractif par rapport au couple perturbateur produit par le fonctionnement même du compresseur, l'amplitude résultante qui inclue aussi le phénomène Goerges, prend une importance particulière, en conduisant aux fortes variations du courant constatées dans le cas étudié.

Les phénomènes qui interviennent ici ont des fréquences très rapprochées, soit: 7,99 périodes par tour de manivelle pour le courant Goerges et 8 et 1/3 périodes par tour de manivelle pour le courant dû au fonctionnement du compresseur et à l'action du volant. Les amplitudes de ces phénomènes ne sont pas connues exactement, faute d'appareils nécessaires pour effectuer les mesures.

En représentant les courbes des courants dûs au phénomène Goerges et au fonctionnement du compresseur, le défaut du volant inclus, on trouve une courbe résultante qui présente des battements.

On peut compter 2 périodes par seconde, soit 120 par minute pour la courbe résultante des battements. Cette valeur concorde en tout avec la fréquence des battements indiquée par les appareils de mesure.

La période d'amortissement des battements est une fonction des différents éléments du groupe et peut avoir des valeurs variables suivant les cas présentés.

Ces phénomènes de battement surviennent aussi dans la marche que nous avons appelée normale. Seulement l'amplitude reste assez faible et les appareils n'indiquent qu'une petite différence entre les valeurs maxima et minima mesurées.

4. *Conclusions*

Le fonctionnement d'un compresseur à piston constituant un groupe avec un moteur asynchrone triphasé, peut produire de fortes variations dans le courant absorbé au réseau, même s'il est prévu avec un volant.

Dans le cas où le rotor du moteur asynchrone présente les moindres dyssymétries, le phénomène Goerges intervient aussi. Il est possible qu'il se produise des battements qui accentuent encore la différence entre les valeurs extrêmes du courant demandé au réseau. Des fois l'amplitude de ces variations s'accroît encore par suite des autres phénomènes qui surgissent dans certaines occasions (Le déséquilibrage du volant dans le cas présent).

Tant que les variations du courant ne dépassent pas les limites admissibles, le groupe peut fonctionner. Il est toutefois recommandable de ne pas charger brusquement le moteur pendant le fonctionnement et de l'arrêter ou de le décharger si les variations du courant sont trop fortes.

Laboratoire des Machines électriques
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 1 Avril 1947).

ANOMALIES CHEZ LES PLANTES CULTIVÉES II

par

STÉFAN POPESCO

En général les semences germent après un repos, qu'elles soient des plantes annuelles, bisannuelles, d'hiver ou de printemps ; et pourtant les semences peuvent germer de très bonne heure dans le fruit, avant d'être récoltées même.

On rencontre de tels cas chez le maïs, les pommes, les concombres.

Il arrive que les semences du maïs germent même quand le spadice, enveloppé dans ses bractées, se trouve inséré sur la tige ; les pépins de pomme peuvent aussi germer dans le fruit, bien que nous ne puissions savoir s'ils germent avant ou après la récolte des fruits.

1. Souvent nous avons rencontré des semences germées au dedans du fruit chez les courges. D'après nos observations ces germinations ont lieu notamment chez les courges hybrides, dans le vrai sens du mot.

En 1929 nous avons cueilli plus de 20 fruits hybrides, de la première génération, entre Cucurbita Pepo L. fourragère x C. Pepo courgette, avec des semences germées à leur intérieur. Les années suivantes nous avons cueilli, chaque automne, de semblables fruits, aux semences germées, Fig. 1.

Dans de rares cas seulement nous avons rencontré de pareilles germinations chez les hybrides de Cucurbita maxima Duch. : C. maxima x F1, C. Pepo fourragère x C. Pepo courgette.

Mais nous n'avons rencontré jamais de semences germées, au dedans du fruit, chez les parents des hybrides, quoique les courges soient des plantes allogames et donc une sorte d'hybrides par voie naturelle.

De pareilles germinations se produisent aussi bien chez les courges aux semences avec tégument scléreux que chez ceux sans tégument scléreux.

La germination est plus ou moins avancée, en rapport avec le

séjour de la semence germée dans le fruit, ou bien avec la vigueur, prononcée ou non, de la germination même.

Ainsi on peut rencontrer des fruits auxquels:

les radicelles embryonaires poussent de 2 à 7 cm. de longueur;

d'autres ont aussi des radicelles secondaires;

ou bien les cotylédons se développent et se colorent en vert, plus ou moins foncé;

dans des cas tout à fait rares se développe aussi la première feuille, qui devient verte et se couvre de poils, Fig. 2.

Les racines et les radicelles s'entre croisent et donnent naissance à une sorte de feutre dans l'intérieur du fruit.

En dehors de ces cas de germination, en quelque sorte normale, on peut rencontrer des formations anormales, par exemple: l'axe hypocotyle se développe très bien, tandis que les radicelles se développent très mal, ou ne se développent pas du tout.

L'hypocotyle croit en des longueurs différentes: il est vert, court et sans poils chez les courges comestibles, C. maxima; et un peu mince, presque étoilé et sans poils chez les courges fourragères, C. Pepo.

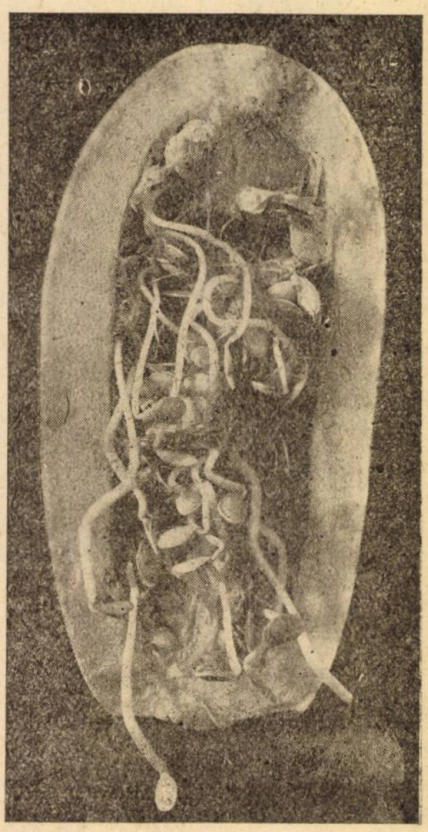


Fig. 1. – Fruit de Cucurbita Pepo L. aux semences germées.

2. La germination des semences au dedans du fruit des courges se répétant chaque année, nous a donné l'occasion de transplanter de telles semences dans des pots et de cultiver les plantes dans la serre.

Les premières plantations ont été faites vers la fin d'Octobre 1938, avec des semences germées de l'hybride C. Pepo fourragère x C. Pepo courgette. Mais les conditions de végétation dans la serre n'étant pas équivalentes à celles de la nature, nous nous sommes attendus, dès le commencement, à un développement des plantes tout à fait différent de celui de la nature.

MŰEGYETEM

En effet, les plantes ont crû, pendant un mois, très bien et leur tige hérbacée s'est allongée de 27 à 56 cm. La tige n'est pas assez grande, mais le développement des plants, au point de vue physiologique, est très avancé, car elles ont fleuri de bonne heure.

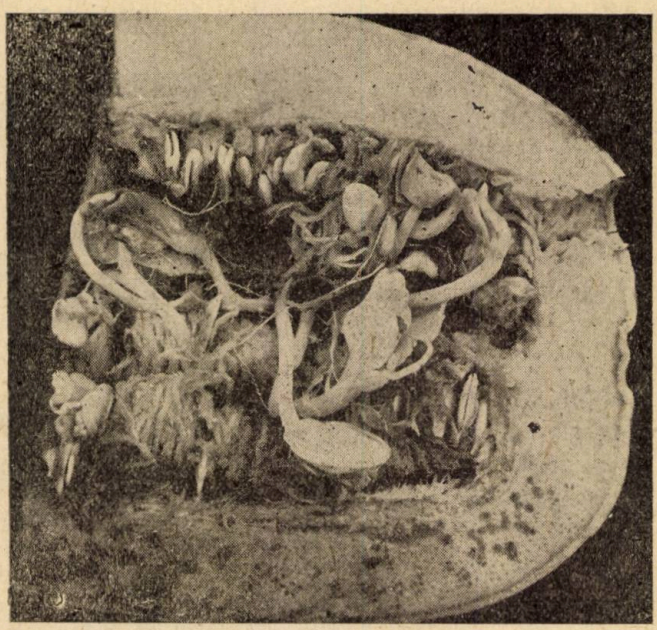


Fig. 2 - Fruit de Cucurbita Pepo L. aux semences germées, aux cotylédons et feuilles développés.

Mais, tout comme dans la germination on observe aussi quelques anormalies pendant la floraison et même dans la conformation des fleurs. Ainsi, il y a des plantes qui ont donné seulement des fleurs femelles; d'autres seulement des fleurs mâles. Les courges ont changé ainsi leur état naturel et des plantes monoïque sont devenues dioïques.

Il y a aussi des plantes qui ont donné les deux sortes de fleurs, mâles et femelles, sur la même tige, Fig. 3. Cependant l'anomalie s'observe aussi chez ces plantes car les fleurs femelles ne s'épanouissent pas et les fleurs ne pouvant être fecondées périssent. De même toutes les fleurs, mâles et femelles, situées vers le sommet de la tige périssent.

Les conditions de végétation dans la serre et l'état physiologique anormal ont fait périr toutes les plantes, et notre projet d'en faire quelques hybridations a échoué.

En général seulement une partie de semences germent au dedans du fruit; les autres ne germent pas.

Tout naturellement, nous avons semé en pleine terre une partie de telles semences – non germées. Les unes ont donné de plantes normales, sans aucune trace d'anomalies morphologiques ou physiologiques ; mais d'autres ont produit des plantes anormales : avec le pédicelle floral et même le pétiole des feuilles très courts ; avec la tige herbacée courte et sans branches latérales ; avec les fleurs femelles groupées vers le sommet de la tige, dû au raccourcissement très grand des entrenoeuds ; des fleurs avec les pétales concrescents avec le réceptacle, ne pouvant s'épanouir – série 275-38. Une autre anomalie est encore la fasciation, qui se rencontre facilement chez les courges hybrides.

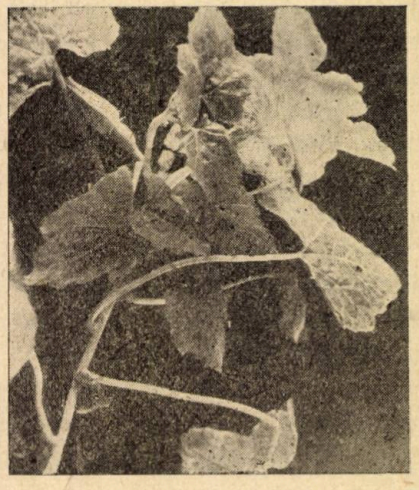


Fig. 3. – Plantes de Cucurbita Pepo L. provenues de semences germées dans l'intérieur du fruit.

* * *

Comment peut-on expliquer l'apparition de tant d'anomalies et surtout la germination de la semence et la formation de la chlorophylle dans les cotylédons et dans la feuille au dedans du fruit des courges ?

Nous supposons que la formation de la chlorophylle est un phénomène différent de celui qui se passe dans les semences de Pinus pinea L. et Citrus aurantium L. qui ont les cotylédons verts. En effet, les cotylédons des courges verdissent dans le fruit après la germination et ceux de Pinus pinea et Citrus aurantium avant la germination.

D'après nos observations, les semences germent et ensuite les cotylédons et la feuille commencent à verdir, au dedans des courges hybrides, sous l'action des substances de croissance, de nature hormonale.

D'après les recherches de Kaufmann Erika et Gershon Mosheov ces substances ne sont pas des hétérauxines, non plus d'aneurines, mais tout à fait d'autres substances, pas encore bien définies. De telles substances, stimulantes de la germination, se trouvent en grande quantité dans les feuilles d'Allium cepa L. et Cynodon dactylon (L) Pers. Dans le mésocarpe du fruit, dans le tégument des semences et dans le tissu placentaire on trouve des substances qui empêchent la germination des semences, tant que celles-ci se trouvent enfermées dans le placenta.

Mais dans le cas décrit par nous les semences sont bien enfermées dans le placenta et pourtant elles germent, Fig. 2.

Nous soupçonnons que dans l'état hétérozygote des semences les substances qui empêchent la germination, au dedans du fruit, dont parlent Kaufmann et Maximov, sont surpassées par des substances activantes, dont parle Mosheov, et la germination commence de bonne heure ; ou bien les substances sont les mêmes, mais leur action est différente, en rapport avec la constitution et l'état physiologique des semences.

En effet, l'hybride se trouve toujours dans un équilibre mobile et il suffit de petites forces pour déclancher son travail physiologique.

Nous sommes conduits à de telles conclusions par les observations suivantes :

Les semences hybrides germent en thermostate, à $16^0 — 17^0$, très rapidement-en trois jours ; tandis que les semences des parents, non hybrides, germent, dans les mêmes conditions, dans un délai de temps presque deux fois plus long.

Les semences à tégument crevassé ou sans téguments germent plus aisément que les semences à tégument non crevassé.

Des recherches sur la germination des semences des courges à l'obscurité et à la lumière donnent presque les mêmes résultats.

Un autre fait qui nous donne à savoir que la germination hâtive des semences hybrides a lieu sous l'action des substances spéciales est aussi le suivant :

En octobre 1942, nous avons mis en dépôt, dans des conditions de laboratoire, plusieurs courges Pepo et maxima. Dans ces conditions les courges peuvent se conserver plus d'une année.

Après quatre mois nous avons observé qu'une des courges Pepo s'altère ; elle présentait une tache envahie par des champignons. En le coupant nous avons constaté que presque toutes les semences ont été germées. Ce fruit est un hybride, de la série 113 — 38 C. Pepo fourragère x C. Pepo courgette. D'autres courges, de la même série examinées avec cette occasion, ont eu beaucoup de semences germées.

La déduction que nous pouvons en tirer est que la courge s'est altérée plutôt sous l'influence des ensymès que sous l'attaque des champignons. Nous faisons cette mention spéciale car il arrive que beaucoup de fruits, des courges même, sont attaqués par des champignons sans que leurs semences soient germées.

Mais les ensymes sont émises pendant la germination ; et la germination s'est déclanchée sous l'action des substances de nature hor-

monale ; ou bien, d'accord avec Kauffmann et Mosheov, sous l'action des substances spéciales activantes.

De pareilles substances peuvent se produire abandamment chez les courges vers l'automne, quand les plantes poussent des tiges et des feuilles nouvelles, pas attaquées d'Erysiphe. Ces tiges et feuilles, étant jeunes et la journée courte, peuvent produire des substances très activantes, qui s'entassent dans les semences jusqu'au premiers givres d'automnes.

C'est pour cette raison, pensons nous, que le commencement de la germination a lieu dans le champ et non pas dans le laboratoire.

Station d'Amélioration des plantes
Jassy

(Reçu le 8 Mai 1947).

Bibliographie

1) Gershon Mosheov – *The inhibition of germination and root formation by copper sulfate and the elimination of the inhibitory effect* ; Palestine journal of Botany. vol. I, serie j.

2) Iliescu Emilia – *La stimulation des semences de chaudre par le K O H* : Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine, Tome XXVIII, No. 4, 1945.

3) Kaufmann Erika – *Beiträge zur Keimungsphysiologie von Cucumis sativus in Zusammenhang mit Wachsstoffproblem* ; Planta, Bd. 33, 1943.

4) Maximov A. Nicolai – *Plant physiology* ; second english edition, chapter XIII, 1938.

5) Popesco Stefan – *Anomalies chez les plantes cultivées* ; Hommage au Professeur E. C. Teodorescu, Bucarest 1937.

6) „ „ – *Sur l'amélioration des courges*, Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy, vol. I_2, 1946, pag. 363.

CONTRIBUTION A LA CHOROLOGIE DE LORANTHUS EUROPAEUS

Utilisation de cette plante.

par

EM. ŢOPA

Le genre *Loranthus* comprend d'après Hugi plus de 200 espèces, cependant que l'Index Kewensis en cite plus de 300.

Parmi les espèces de ce genre *L. europaesus* **L.**, élément sub-méditerranéen est répandu dans l'Europe centrale-méridionale ainsi qu'en Asie mineure.

En partant des données existantes, Gajewski (1937) cherche à établir la distribution géographique de *Loranthus europaeus*. D'après cet auteur *Loranthus europaeus* est la seule espèce du groupe des plantes illyriques de migration qui n'a pas pénetré en Podolie directement par la R. S. S. Moldave centrale.

L'aire de l'espèce en question vient d'être complété ; d'abord par nous même (1935), puis par Balcovski (1939). Nous avons signalé cette plante notamment sur „Pietrosul", de la commune de Lomacenet (district de Hotin), tandis que Balcovski le constatait dans la forêt de Braţlav (district de Tulcin).

Nous avons découvert récemment cette plante semi-parasite en exemplaire isolé, abrité sur un chêne (*Quercus Robur* **L.**) à Berdena de Călineşti-Cuparencu (district de Suceava), ensuite sur des rouvres (*Qu. petraea* Lieblein) ainsi que sur des chênes séculaires (*Qu. Robur* **L.**) sur Crujana du village Lipoveni, commune Mitocul-Dragomirnei (district de Suceava).

Les deux stations en question se trouvent dans le voisinage immédiat de la ligne de partage des eaux Suceava-Siret, dont la végétation était représentée autrefois par des Pinetums, ou des traces de tourbières, caractérisées par la presence de *Sphagnum squarrosum, Leucobryum glaucum, Lycopodium annotinum, L. complanatum, L.*

Selago, Betula pubescens, Chimaphila umbellata, Pirola chlorantha, P. minor, P. secunda, etc.

Loranthus europaeus est connu dans le langage populaire sous le nom de „vâsc de stejar", „mărgărit", (Gorj), „vâsc", „bob" (Berezniţa), „chită de vâsc" (Schitul-Topolniţei), „ovâsc păsăresc" (Balta), „ovâsc iepuresc" (Prunişor), etc.

Les ouvrages scientifiques et ceux de vulgarisation ont privé le loranthe (*L. europaeus*) d'un de ces emplois les plus fréquents et cela au bénéfice du gui commun (*Viscum album*) en affirmant que les fruits de ce dernier servent à la préparation de la colle à prendre le oiseaux, cependant Tubeauf (1923), Wiesner (1923), Klein (1932), etc. n'attribuent cette qualité qu'aux fruits de *Loranthus europaeus*. De même, selon un cours d'enseignement récent (1946) les fruits du loranthe (*L. europaeus*) passent pour avoir des propriétés vermifuges, qualité qui fait, (v. Madaus 1938) appartient au gui commun (*Viscum album*).

Ces erreurs sont dues premièrement à la nomenclature populaire d'après laquelle les noms de ces deux espèces sont des homonymes ; l'erreur peut être due aussi au fait que parfois du gui commun (*Viscum album*) lui même peut se trouver sur différentes espèces de chêne (*Qu. palustris, Qu rubra, Qu. petraea*), fait déjà remarqué par Hugi, Tubeauf, etc. Nous avons signalé nous même autrefois le gui commun (*Viscum album*) sur *Quercus palustris* du Jardin Botanique de l'Université de Cernăuţi.

D'après le compendium de Wehmer (1929, 1931, 1935) les feuilles du loranthe (*L. europaeus*) contiennent une huile grasse se décomposant entre autres en alcool loranthilique, ($C_{24}H_{50}O$), coline ($C_5H_{15}NO_2$), glycerine, acide phosphorique, ce dernier en quantités notables. Les feuilles contiennent en outre des phlobaphènes, une paraffine à nombre elevé d'atomes de *C*, tandis que de ses fruits on extrait de l'alcool cétilique, du caoutchouc, de la viscine etc...

Il nous apparait donc comme probable que les deux espèces, le gui et le loranthe, ne tarderont pas à occupper la place qui leur revient parmi les plantes industrielles.

Jardin Botanique
de l'Université de Cluj

(Reçu le 31 décembre 1946).

621.3.016.73

SUR LE RÉGIME INTERMITTENT DES MOTEURS ÉLECTRIQUES

par
N. POPINCEANU

La régime intermittent de fonctionnement est caractérisé par l'alternance des courtes durées de service, de quelques secondes ou minutes, lorsque le moteur est couplé et par la marche en pleine charge avec de courtes pauses, également de quelques secondes ou minutes, lorsque le moteur est arrêté, sans tension. Ce jeu est répété parfois régulièrement, d'autres fois irrégulièrement, mais en général, on peut établir, dans une durée déterminée, un rapport de pourcentage entre la durée de couplage du moteur et le temps de couplege et de pause.

La durée de la pause ou de la suspension de la tension n'est pas assez longue pour faire descendre la température du moteur jusqu'à celle du milieu ambiant.

La puissance nominale, dénomée aussi puissance intermittente, devrait – avec un cycle régulier et une durée relative de couplage indiquée – être réalisée pendant tout le temps voulu, sans que l'échauffement dépasse les limites prescrites. Il serait possible que le moteur marche à vide pendant les pauses. En ce cas, le régime est appelé régime de fonctionnement continu avec charge intermittente. Les durées de couplage alternent avec les durées de marche à vide, la machine restant tout le temps sous tension. La durée de la marche à vide n'est pas assez longue pour que la température du moteur puisse revenir à celle qui corespondait au stade stationnaire de la marche à vide.

Si a est la durée de couplage et b la durée du repos ou, éventuellement, celle de la marche à vide, alors:

$$a + b = T_1$$

T_1 etant la période et le rapport

$$\frac{a}{a+b} \times 100 = D = \frac{a}{T_1} \times 100$$

est appelé la durée relative du couplage.

En général, les normes donnent pour $a + b = 10$ minutes et pour D des valeurs de 15%, 25% et 40%. On a décidé ainsi, afin de simplifier et d'uniformiser les calculs. La durée de couplage ne dépend donc que de la valeur de a, la période T_1 étant une constante.

Nous désignons par P' la puissance nominale du régime intermittent ou – plus simplement – la puissance intermittente du moteur.

Si le moteur fonctionnait en régime continu, avec la puissance P', il s'échaufferait suivant la courbe (1) de la fig. 1, et, après un certain temps de fonctionnement, il atteindrait la température de regime $\theta_{1\,\text{rég.}}$

Le refroidissement à partir de la température $\theta_{1\,\text{rég.}}$ aurait lieu suivant la courbe (3) de la fig. 1.

La courbe (1) représente la relation

$$\theta = \theta_{1\,\text{rég.}} \left(1 - q^{-\frac{t}{T}}\right)^{1)}$$

et la courbe (2) la relation

$$\theta = \theta_{1\,\text{rég.}}\, q^{-\frac{t}{T}}{}^{2)}$$

T étant la constante de temps du moteur.

Mais le moteur fonctionne de manière intermittente. Pendant la durée a, il s'échauffe suivant la courbe (1) de la fig. 1 et pendant la durée b, il se refroidit suivant la courbe (2) de la fig. 1, etc.

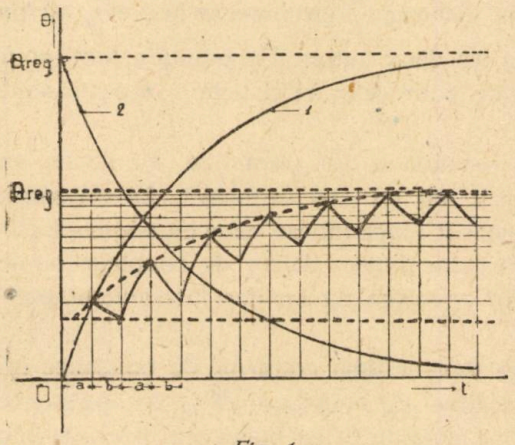


Fig. 1.

Après une durée plus longue de fonctionnement en régime intermittent avec la puissance intermittente P', on arrive à la température $\theta_{\text{rég.}}$, qui n'est jamais dépassé, quelle que soit la durée de fonctionnement de la machine. Une bonne utilisation de la machine exige le choix de P' de telle manière que $\theta_{\text{rég}}$ – la température maximum admissible pour l'isolement de la machine – soit atteinte, mais non dépassée.

En aucun cas, le moteur ne pourra donc fonctionner avec la

1) Arnold-La Cour, *Die Gleichstrommaschine*, IIIe éd. Berlin, J. Springer, p. 699.

2) Ibidem.

puissance P' en régime continu, car il atteindrait la température $\theta_{1\text{rég.}} > \theta_{\text{rég.}}$, ce que l'isolement ne permettrait pas. Il pourra fonctionner aussi en régime continu, mais avec une puissance nominale de régime continu $P > P'$.

Le moteur qui fonctionne en régime continu avec la puissance P ne doit pas dépasser la température $\theta_{\text{rég.}}$, quelle que soit la durée de son fonctionnement. Il peut fonctionner aussi dans un autre régime intermittent, caractérisé par une autre durée relative de couplage, avec une puissance intermittente correspondante, par ex. P_1'.

Si p représente les pertes du moteur correspondant à P et $p' > p$ celles correspondant à la puissance intermittente P', on peut écrire la relation

$$(1) \qquad \frac{p'}{p} = \frac{\theta_{1\text{rég.}}}{\theta_{\text{rég.}}} = q \quad ^{3)}$$

et si a représsente la durée de couplage, T_1 la période du régime intermittent et T la constante de temps, on obtient la relation:

$$(2) \qquad \frac{a}{T_1} = \frac{1}{1 - \frac{T}{a} \ln \left[q - e^{\frac{a}{T}} (q-1) \right]} \quad ^{4)}$$

De la relation (2), on peut calculer $\frac{a}{T_1}$ en connaissant q et $\frac{a}{T}$ ou un de ces rapports en connaissant les deux autres. En pratique tant pour le moteur à courant continu que pour celui à l'induction, il se présente les trois cas suivants:

1. de déterminer pour un moteur de puissance nominale en régime continu P, déjà construit ou en état de projet, la puissance intermittente $P' > P$ avec laquelle il fonctionnera dans un régime intermittent, carractérisé par une certaine durée relative de couplage ou de déterminer la durée relative de couplage du service intermittent pour une puissance donnée ;

2. de déterminer pour un moteur déjà construit, de puissance intermittente P' et de durée relative de couplage $D^0/_0$, sa puissance nominale $P < P'$ pour le régime continu et sa puissance intermittente pour un service intermittent, caractérisé par une autre durée relative de couplage ;

3. de déterminer la puissance P, avec laquelle il faut calculer un

---

3) N. Popinceanu, *Contribution à l'étude de l'échauffement d'une machine à courant continu quand la puissance varie.* Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy, I, (1946), pag. 129.

4) Arnold-La Cour. ouvr. cité. p. 699.

moteur, celui-ci devant fonctionner dans un régime, intermittent, caractérisé par une certaine durée relative de couplage, avec la puissance intermittente $P' > P$.

Dans les trois cas, la tension d'alimentation reste constante.

1a. *Le moteur à courant continu.* On connaît la puissance nominale de régime continu P, la durée relativé de couplage $D^0/_0$ ou plutôt $\frac{a}{T_1}$ et la constante de temps T.

Du rapport $\frac{a}{T_1}$ on déduit la valeur de a, T_1 étant constant et on connaît ainsi également $\frac{a}{T}$. A l'aide de la relation (2), on déduit la valeur du rapport

$$q = \frac{p'}{p}$$

de telle manière que

$$p' = qp;$$

p étant connu, puisqu'il répresente les pertes de la machine correspondant à la puissance P, on déduit p' répresentant les pertes correspondant à la puissance intermittente P'.

Pour trouver la valeur de P', il faudra tracer la courbe des pertes du moteur en fonction de la charge. Le traçage de cette courbe est difficile et demande beaucoup de temps, tant pour une machine déjà construite que pour une machine en état de projet. Nous essayerons une autre méthode:

Soit $P' = \alpha P$ où $\alpha > 1$,

entre q et α il y a la relation (3) $q = \frac{K + \alpha^2}{1 + K}$ [5] où $K = \frac{p_m + p_f}{RI^2}$,

p_m représentant les pertes mécaniques, p_f les pertes dans le fer, R la résistance totale et I le courant correspondant à la puissance P. Toutes ces données sont connues également pour le moteur déjà construit et pour celui en état de projet, étant constantes pour ce moteur. La relation (3) est représente par la courbe (1) de la fig. 2.

La partie utile, de la courbe est seulement pour $\alpha > 1$. A l'aide de la relation (3) ou de la courbe de la fig. 2, on déduira la valeur de α pour une certaine valeur de q, déduite de la relation (1) et on a ainsi déterminé

$$P' = \alpha P.$$

Pour un autre régime intermittent, on déterminera une autre valeur

5) N. Popinceanu, ouvr. cité.

de q, donc un autre α et une autre puissance intermittente, par ex. P_1'. On peut procéder aussi d'une autre manière.

Nous savons que $p' = p_m + p_f + RI'^2$,

$$\text{d'où} \quad I' = \sqrt{\frac{p' - p_m - p_f}{R}}$$

$$\text{ou} \quad I' = \sqrt{\frac{p'}{R} - K_1},$$

$$\text{où} \quad K_1 = \frac{p_m + p_f}{R}$$

aussi que $P' = UI'$,

la tension d'alimentation, comme nous l'avons déjà dit, restant constante.

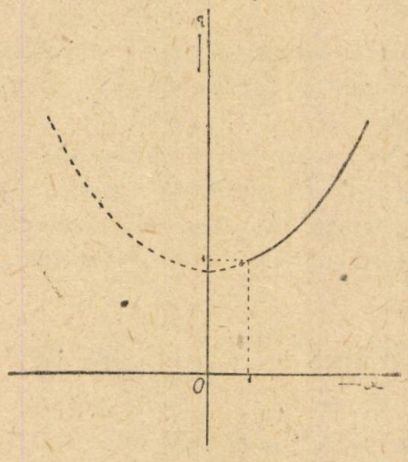


Fig. 2.

Au cas où la puissance intermittente $P' > P$ est fixée et il s'agit de déterminer la durée relative de couplage, on déduira d'abord la valeur de $\alpha = \frac{P'}{P}$, ensuite, à l'aide de la relation (3), on trouvera q, T étant la constante de temps connue. Dans ce cas, on ne peut déduire directement de la relation (2) la durée relative de couplage $\frac{a}{T_1} \times 100$

Mais nous pourrons trouver la durée de couplage a.

T_1 étant une constante connue. En divisant la relation (2) par a, nous obtenons :

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{a - T \ln \left[q - e^{\frac{a}{T}} (q-1) \right]}.$$

Les numérateurs étant égaux, les dénominateurs le seront aussi. On a donc

$$T_1 = a - T \ln \left[q - e^{\frac{a}{T}} (q-1) \right]$$

$$\text{d'où} \quad \ln \left[q - e^{\frac{a}{T}} (q-1) \right] = \frac{a - T_1}{T}$$

$$\text{ou} \quad q - e^{\frac{a}{T}}(q-1) = e^{\frac{a}{T}} \cdot e^{-\frac{T_1}{T}}.$$

En développant cette dernière formule, on obtient

$$e^{\frac{a}{T}} = \frac{q}{e^{-\frac{T_1}{T}} + q - 1}$$

$$\text{ou} \quad \frac{a}{T} = \ln \frac{q}{e^{-\frac{T_1}{T}} + q - 1},$$

$$\text{donc} \quad a = T \ln \frac{q}{e^{-\frac{T_1}{T}} + q - 1}, \tag{4}$$

a étant déterminé on connait en même temps, le régime intermittent.

1b. *Le moteur d'induction.* Nous nous trouvons aussi devant deux alternatives : déterminer la puissance intermittente P' en connaissant la durée relative de couplage ou déterminer la durée relative de couplage en connaissant la puissance intermittente.

Dans le premier cas, nous connaissons $P_1 \frac{a}{T}$, $\frac{a}{T}$ et les pertes p. A l'aide de la relation (2), nous pourrons trouver, la valeur de q et par conséquent $p' = qp$.

(5) Mais $p' = p_m + p_{fs} + R_1 I_1'^2 + R_2 I_2'^2$

où p_{fs} représente les pertes dans le fer du stator, R_1 et R_2 les résistances du stator et du rotor, I_1' et I_2' les courants dans le stator et le rotor lorsque le moteur fonctionne avec la puissance P'.

On tracera le diagramme du cercle, ce qui est possible pour un moteur en état de projet en connaissant le courant magnétisant I_μ et celui de court circuit I_{cc} aussi que pour un moteur déjà construit par une des méthodes connues (fig. 3).

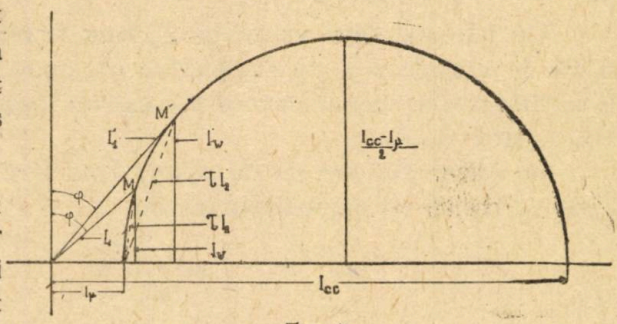


Fig. 3

Entre les courants I_1 du stator et I_2 du rotor il y a un rapport qui se maintient constant autant que possible même si la puissance devient $P' > P$ parce que la variation de la vitesse du moteur est petite.

I_2 peut être mesuré pour un moteur déjà construit, lorsque celui-ci est du type à bagues,

Ces sortes de moteurs sont construit d'habitude avec des bagues et rhéostats parce qu'ils ont des démarrages fréquents sous des couples importants.

On trouvera donc $m = \frac{I_1}{I_2}$.

En admettant le même rapport pour I'_1 et I'_2

on obtiendra $m I'_1 = I_2$ ou $I'^2_2 = \frac{I_1'^2}{m^2}$.

En introduisant cette valeur dans la relation (5), celle-ci deviendra :

$$p' = p_m + p_{fs} + R_1 I'^2_1 + R_2 \frac{I'^2_1}{m^2}.$$

En désignant par $K_r = R_1 + \frac{R_2}{m}$ et par $K_m = \frac{p_{fs} + p_m}{K_r}$,

la valeur de I'_1 sera $I'_1 = \sqrt{\frac{p'}{K_r} - K_m}$.

En portant la valeur de I'_1 à l'échelle du diagramme de la fig. 3 à partir de l'origine des axes, on détermine sur le cercle un point M' qui est le point de fonctionnement du moteur avec la puissance intermittente P'. On trouvera sur le diagramme la valeur de φ' et de $\cos \varphi'$.

On aura ainsi $P' = U I'_1 \cos \varphi' \sqrt{3}$.

On peut même vérifier si l'on a bien procédé. Le segment $M'T$ représente à l'échelle la valeur de $\tau I'_2$, τ étant le rapport de transformation à vide. Donc $I'_2 = \frac{\overline{M'T}}{\tau}$.

On introduit cette valeur de I'_2 dans la relation (5) et l'on verra si elle la vérifiée. Au cas où il existe une différence on procédera par la méthodes des approximations successives jusqu'à ce qu'on trouve la vraie valeur de I'_1.

La valeur du courant du rotor, dans le cas d'une machine à l'état de projet, est approximativement

$$I_2 = \frac{I_w \tau}{a'_2}\ ^{6)}.$$

La valeur du rapport m sera donc

6) A. Mauduit, *Machines électriques* t. II., Dunod, Paris, pag. 1030.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{m} = \frac{\tau \cos\varphi}{a'_2} \backsimeq \frac{I'_2}{I'_1},$$

a'_2 est le nombre de circuits dérivés de l'enroulement du rotor.

Pour déterminer la durée de couplage, en connaissant la puissance intermittente $P' > P$, on procédera de la manière suivante.

Ou trouvera $I'_w = I'_1 \cos\varphi = \frac{P'}{U\sqrt{3}}$ et on introduira cette valeur dans le diagramme du cercle, en trouvant ainsi l'angle φ' et le cos φ' d'où $I'_1 = \frac{I_w}{\cos\varphi'}$.

En connaissant la valeur du rapport de transformation τ on trouvera

$$I'_2 = \frac{\overline{TM'}}{\tau}.$$

En introduisant ces valeurs de I'_1 et de I'_2 dans la relation (5) on obtient les pertes qui correspondent à la puissance intermittente P et on détermine ainsi le rapport

$$q = \frac{p'}{p}.$$

A l'aide de la relation (4), on déduira la durée de couplage a en introduisant les valeurs de q et T qui sont connus, T_1 étant fixé à 10 minutes.

Il faut faire attention pour ne pas choisir un P' trop grand, afin que I'_m ne dépasse pas la valeur maximum.

2. a *Le moteur à courant continu.* La puissance intermittente P', la durée relative de couplage $D\,^0/_0$ et le rendement η sont connus étant inscrits sur la plaque de la machine.

Il faut mesurer les pertes dans le fer p_f, les pertes mécaniques p_m et la résistence totale R.

La valeur du courant I' sera $I' = \frac{P'}{U}$

et les pertes p' qui correspondent à la puissance P' seront

$$p' = p_m + p_f + RI'^2.$$

Ces pertes peuvent aussi être calculées directement, seulement avec les données inscrites sur la plaque de la machine, de la manière suivante

$$\eta = \frac{P'}{P' + p'},$$

d'où

$$p' = \frac{P' + \eta P'}{\eta}.$$

La constante de temps T peut être considérée connue, car elle peut être mesurée et T_1 est fixé à 10 minutes, donc

$$a = \frac{D \times T_1}{100}.$$

En introduisant $\frac{a}{T_1}$, $\frac{a}{T}$ et $\frac{T}{a}$ dans la relation (2), on déduira le rapport des pertes q, de telle manière que $p = \frac{p'}{q}$.

Mais nous savons que $p = p_f + p_m + RI^2$.

La valeur du courant I qui correspond à la puissance nominale de régime continu P sera

$$I = \sqrt{\frac{p}{R} - K_1}$$

où

$$K_1 = \frac{p_m + p_f}{R} \qquad \text{d'où} \qquad P = UI.$$

2b. *Le moteur d'induction.* Les données connues sont les mêmes que pour le moteur à courant continu. De même, les pertes p' seront calculées à l'aide des données inscrites sur la plaque de la machine et le rapport des pertes q sera déterminé aussi à l'aide de la relation (2).

De cette manière, nous connaîtrons aussi les pertes $p < p'$ qui correspondent à la puissance nominale de régime continu.

Mais $p = \frac{p'}{q} = p_{fs} + p_m + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$.

On tracera le diagramme du cercle pour ce moteur. On déduira p_{fs}, p_m, R_1 et R_2, on désignera ensuite le rapport $\frac{I_1}{I_2} = m$, la suite de la procédure étant analogue à celle indiquée ou point 1b.

Le courant qui correspond à la puissance nominale en régime continu P sera

$$I_1 = \sqrt{\frac{p}{K_r} - K_m}.$$

En portant cette valeur de I_1 à l'échelle du diagramme du cercle et en procédant de la manière indiquée ou point 1b., on détermine le point M de fonctionnement du moteur en régime continu

$$P = UI_1 \cos \varphi \sqrt{3}.$$

Au cas où l'on cherche la puissance intermittente $P_1' \neq P'$ du même moteur pour une autre durée relative de couplage ou la durée relative de couplage pour une puissance intermittente $P_1' \neq P$ on procédera de la même manière qu'au point 1b.

3. On peut faire le projet d'un moteur électrique en connaissant en premier lieu sa puissance en régime continu, puis sa tension, sa vitesse, etc. Dans le cas présent, nous avons, comme données connues, la puissance intermittente P', la durée relativée de couplage, la tension, la vitesse et éventuellement on peut fixer le rendement.

Pour déterminer la puissance P, il faut procéder par analogie avec des moteurs construits.

Le procédé est donc comparatif, basé sur des diagrammes et des expériences faites sur des machines existantes.

Nous avons considéré dans notre exposé la constante de temps T comme restant la même tant pendant l'échauffement que pendant le refroidissement. Mais cela n'arrive que si le moteur se refroidit dans les mêmes conditions, c'est-à-dire s'il tourne pendant le refroidissement avec la même vitesse, si c'est possible. Dans régime continu avec charge intermittente, le moteur tourne à vide pendant la période de refroidissement, donc T a la même valeur, tandis que dans le régime intermittent, les valeurs de T pendant le couplage et pendant le repos seront différentes entre elles, fait, dont il faut tenir compte.

En dehors du régime intermittent, on rencontre aussi dans la pratique des régimes de courte durée. Il n'est pas permis d'installer un moteur construit pour un régime de courte durée quand on exige un moteur pour un régime intermittent et inversement.

Pour le régime de courte durée, le moteur est construit d'après le principe de l'accumulation de la chaleur, tandis que pour le régime intermittent il est construit sur le principe de la cession de la chaleur à l'extérieur. Le moteur devra donc être calculé de manière différente suivant qu'il devra fonctionner en régime intermittent ou en régime de courte durée.

De même, ce serait une erreur le fait qu'un moteur de puissance P, construit pour le régime continu, soit utilisé avec la même puissance P dans un régime intermittent. Le rendement de l'installation sera diminué, parce qu'on utilise un moteur trop grand, dont le prix est trop élévé.

L'erreur sera ancore plus grave si l'on installe un moteur construit pour le régime intermittent pour le faire fonctionner avec la

même puissance dans un régime continu. En ce cas, le moteur sera trop chargé, l'échauffement sera exagéré et le moteur sera vite mis hors de service.

Dans les usines, la majorité des machines ne fonctionnent pas en régime continu, mais en régime intermittent ou en régime de courte durée. Les moteurs qui y sont utilisés, doivent être commandés, construits ou transformés dans ce sens, en vue d'une bonne exploitation.

Laboratoire des Machines Electriques
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 31 Mai 1947).

621.38

CONSIDÉRATIONS SUR LE MEILLEUR RENDEMENT D'UTILISATION DES ECRANS FLUORESCENTS DANS LES RAYONS X

par

V. PETRESCU et E. LUCA

Une étude théorique, qui porte sur l'utilisation dans certaines limites des substances luminescentes pour les rayons X, a été publiée par Georges Destriau [1]) en 1945.

En admettant que la substance luminescente se trouve placée tous un support absorbant, comme cela arrive dans la fabrication des écrans fluorescents utilisés dans la technique des rayons X, et en notant par a et b les épaisseurs respectives du support absorbant, et des a substance fluorescente, par τ_0, le coefficient d'affaiblissement du même support, par μ le coefficient d'absorption de la substance fluorescente, l'auteur arrive à conclure que le rapport :

$$\frac{\beta}{I_0}$$

de la brillance de l'écran β à l'intensité I_0 du faisceau incident de rayons X peut être rendu par l'expression suivante :

$$\varrho = e^{-\tau_0 a}\left(1 - e^{-\mu b}\right)$$

où τ_0 et μ sont variables suivant la longueur d'onde.

C'est de l'analyse de cette expression qu'il résulte que le rapport :

$$\varrho = \frac{\beta}{I_0}$$

passe par un maximum si la longueur d'onde varie, et que ce maximum se déplace vers les courtes longueurs d'onde si l'épaisseur du support augmente.

1) Georges Destriau. *Physique appliquée des installations à rayons X*, Dunod, Paris 1945, p. 190.

Pour vérifier ce résultat, Destriau[2]), à titre d'exemple, donne un graphique dont les courbes représentent quelques mesures personnelles pour une région de 0,15 à 0,3 Ångströms, pour des supports en cuivre des épaisseurs de : 0,12 mm., 0,22 mm. et 0,49 mm., sous lesquels on avait appliqué la substance fluorescente.

Pour une même longueur d'onde, c'est-à-dire pour un même potentiel appliqué au tube des rayons X et pour la région utilisée on constate sur le graphique :

1) La diminution du rapport $\varrho = \frac{\beta}{I_0}$ au moment où l'épaisseur du support qui soutient la substance fluorescente augmente,

2) de même l'existence des maximums, avec leurs déplacements vers les courtes longueurs d'onde ; conclusion que l'on avait prévue théoriquement.

Nous nous sommes proposé de faire une étude qui traitera non des supports absorbants qui portent la substance fluorescente, mais des filtres, et notamment de leur influence sur la technique radioscopique.

Pour ce faire, nous utiliserons des filtres d'épaisseurs différentes, placés à la sortie du tube lequel emettra le faisceau de rayons X. Remarquons entre autres que ces filtres ne constituent pas un support de la substance fluorescente.

C'est dans ces conditions de travail que nous étudierons la variation du raport

$$\varrho = \frac{\beta}{I}$$

de la brillance de l'écran β, cette-fois-ci à l'intesité I du faisceau déjà filtré, incident à l'écran luminescente et cela lorsqu'on modifie régulièrement le potentiel appliqué au tube (respectivement la longueur d'onde).

Admettons tout d'abord que la tension appliquée au tube de rayons X et l'échauffement de son filament demeurent constants.

Le faisceau émergent du tube de rayons X, ayant l'intensité initiale I_0 rencontre à la sortie du tube le filtre de l'épaisseur x, dont le coefficient d'affaiblissement est τ.

Dans ces conditions l'intensité du faisceau issu de filtre sera :

$$I = I_0 e^{-\tau x}.$$

On peut facilement admettre que cette intensité I demeure constante jusqu'au moment où elle frappe l'écran situé par exemple à une distance d du tube et des filtres.

2) Georges Destriau. *Loc. cit.* p. 192.

Si nous attribuons à notre filtre une autre épaisseur

$$x_1 > x$$

et si nous venons à admettre que τ demeure constant (tout comme pour les radiations monochromatiques), nous pourrons conclure que la nouvelle intensité du faisceau issu de filtre sera

$$I_1 = I_0 e^{-\tau x_1}$$

plus petite que I, lequel I_1 frappera à présent l'écran fluorescente.

Il résulte donc que les épaisseurs croissantes des filtres, les intensités qui frappent l'écran fluorescent diminuent d'après les épaisseurs de ces filtres.

L'écran fluorescent recevant ces intensités decroissantes, étant situé à la distance d du tube et des filtres, se compose d'un support absorbant en carton de l'épaisseur a sous lequel se trouve la substance fluorescente de l'épaisseur b.

A présent, si l'on poursuit les considération de Destriau pour les supports absorbants dans nos conditions de travail, et que l'on prenne I pour l'intensité de faisceau incidente à l'arrivée du support de l'écran, lequel I corresponde à l'épaisseur x du filtre, à la sortie du support, la nouvelle intensité, agissante maintenant sur la substance fluorescente de l'écran, sera :

$$I' = I e^{-\tau_0 a}$$

où τ_0 est le coefficient d'affaiblissement du support de l'écran.

La brillance étant proportionnelle à la quantité

$$I'(1 - e^{-\mu\beta})$$

où μ est le coefficient d'absorbtion de la substance fluorescent (qui est également fonction de la longueur d'onde), il résulte que le rapport

$$\varrho = \frac{\beta}{I}$$

de la brillance β à l'intensité incidente à l'écran I est:

$$\varrho = e^{-\tau_0 a}(1 - e^{-\mu\beta}).$$

Cette expression est donc identique à celle de Destriau quant aux supports absorbants des écrans fluorescents.

Mais, d'une manière analogue, si nous considérons l'intensité incidente à l'écran I_1, plus petite que I, qui corresponde à l'épaisseur du filtre

$$x_1 > x$$

nous trouverons pour le rapport ϱ la valeur :

$$\varrho_1 = e^{-\tau'_0 a}(1-e^{-\mu'\beta})$$

où τ_0' est le nouveau coefficient d'affaiblissement du support absorbant de l'écran luminescent et qui est plus petit que τ_0 parce que le faisceau de rayons de l'intensité initiale I_0, en traversant un filtre plus épais (épaisseur $x_1 > x$) s'est appauvri de plus en grandes longueurs d'onde (rayons mous) ; on sait que le coefficient d'affaiblissement τ diminue avec la diminution de la longueur d'onde.

Si l'on suppose que l'appauvrissement en grandes longueurs d'onde n'exerce pas une influence sensible sur le facteur

$$(1-e^{-\mu\beta})$$

il résulte

$$\varrho_1 > \varrho$$

c'est-à-dire le rapport ϱ croît pendant que l'épaisseur du filtre croît.

Concluons donc que les conditions d'utilisation de l'écran fluorescent se sont d'autant plus améliorées que l'épaisseur du filtre est devenu plus grande ; grâce à nos suppositions, ces conclusions pourraient ne se rapporter qu'à une région utile.

L'expression obtenue pour ϱ présente un maximum pour chaque épaisseur du filtre lorsque les potentiels appliqués au tube croissent.

Ces maximums se deplacent vers les courtes longueurs d'onde (vers les grands potentiels) quand les épaisseurs des filtres croissent elles mêmes, conclusions auxquelles Destriau arrive pour les supports absorbants de l'écran fluorescent.

Quant à la valeur de ces maximums ils sont d'autant plus élevés que les filtres sont plus épais, contrairement aux résultats de Destriau pour les supports absorbants des écrans fluorescents.

Pratiquement nous avons utilisé pour la mesure d'intensité du faisceau de rayons X incidente à l'écran, l'ionisation produite par ce même faisceau dans la *chambre d'ionisation de* Küstner, placée sur le trajet de ces rayons X à la distance 70 cm du tube émetteur et de ses filtres. Cette ionisation est proportionnelle à l'intensité du faisceau respectif (on travaille à la saturation) ; elle est indiquée par le nombre des divisions que l'on peut lire à l'électroscope de la chambre d'ionisation.

Pendant nos expériences le temps d'exposition a toujours été le même, c'est-à-dire une seconde.

L'échauffement du filament du tube a été au même ampérage de 82 *mA*.

Pour la mesure de la brillance nous avons utilisé un écran flu-

orescent „Super Astral" dont la substance fluorescente était fixée sous une feuille en carton.

Nous avons placé cet écran sur le trajet des rayons X à la place de la chambre d'ionisation, toujours à la même distance de 70 cm. du tube et des filtres. On a effectué la mesure de la brillance par l'appréciation du courant produit dans une cellule photoélectrique à couche d'arrêt. La cellule placée aussitôt derrière l'écran débit sur un galvanomètre „Miravi" dont la résistance est de 70 ohms. On fait la lecture du courant en divisions.

Les tensions accélératrices utilisées varient de 59 Kv. à 92 Kv., c'est-à-dire autant que permette la puissance de l'appareil de rayons X.

Les filtres utilisés en aluminium ont été aux épaisseurs suivantes : 0,5 mm., 1,5 mm., et 2,5 mm. ; en cuivre aux épaisseurs : 0,1 mm., et 0,2 mm.

Les données expérimentales pour les filtres en aluminium sont indiquées dans les tableaux I, II, III et IV.

TABLEAU I

Sans filtre.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
52	7	14	0,50
59	11	21	0,52
66	15,5	28	0,55
73	19,5	36	0,54
79	22,5	42	0,53

TABLEAU II

Filtre en aluminium de 0,5 mm.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
59	9,5	16,5	0,58
66	14	23	0,61
73	17,5	27	0,65
79	20,5	32,5	0,63
84	21	35	0,60

TABLEAU III

Filtre en aluminium de 1,5 mm.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
66	11	17	0,64
73	15,5	22,5	0,69
79	18,5	25,5	0,73
84	20	28	0,71
92	21,5	31	0,69

TABLEAU IV

Filtre en aluminium de 2,5 mm.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
66	9,5	13	0,73
73	13,5	17,5	0,77
79	17	21	0,81
84	19,5	23	0,85
92	20	24,5	0,82

Les données expérimentales pour les filtres en cuivre sont indiqées dans les tableaux V, VI et VII.

TABLEAU V

Sans filtre.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation *j*	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
52	7	14	0,50
59	11	21	0,52
66	15,5	28	0,55
73	19,5	36	0,54
79	22,5	42	0,53

TABLEAU VI

Filtre en cuivre de 0,1 mm.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation *j*	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
59	5,5	10	0,55
66	8	14	0,57
73	12,5	20	0,62
79	17	25	0,68
84	19	31	0,62

TABLEAU VII

Filtre en cuivre de 0,2 mm.

La tension appliquée au tube *Kv.*	Le courant photoélectrique β	Le courant d'ionisation *j*	Le rapport $\varrho = \frac{\beta}{j}$
66	4	6	0,65
73	6	9	0,68
79	9	13	0,69
84	11,5	16,5	0,70
92	13,5	20	0,67

Les données expérimentales concernant les filtres en aluminium sont représentées graphiquement dans la *figure Nr. 1.*

On y trouve dans l'ordonnée le rapport de la brillance de l'écran fluorescent à l'intensité du faisceau de rayons X, incidente à l'écran, et dans l'abcisse, les potentiels accélérateurs appliqués au tube de rayons X (les longueurs d'onde respectives).

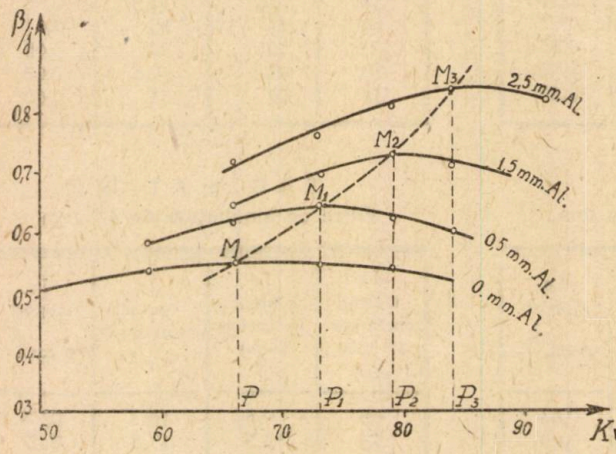


Fig. 1.

On peut remarquer sur cette figure l'existence d'un maximum du rapport ϱ pour un certain potentiel et chaque épaisseur de filtre, existence telle que l'indique les points M, M_1, M_2, M_3, qui en correspondent aux potentiels P, P_1, P_2, P_3, pour les quatre épaisseurs respectives du filtre: 0,0 mm., 0,5 mm., 1,5 mm., et 2,5 mm.

Ces derniers points (P, P_1, P_2, P_3,) indiquent donc les tension

qu'on devrait appliquer au tube afin que l'écran fluorescent en nous donnat le meilleur rendement, pour les filtres respectifs.

Ces constatations sont en accord avec l'expression théorique du raport ϱ.

Les maximums sont rejetés vers les potentiels croissants (vers les courtes longueurs d'onde) lorsque l'épaisseur du filtre croît, comme on pourrait le déduire de l'expression du rapport ϱ. Ces dernières constatations sont en concordance avec les résultats trouvés par Destriau pour les supports absorbants de l'écran fluorescent des épaisseurs différentes. Les valeurs de ces maximums croissent lorsque les filtres deviennent plus épais, comme les indiquent les distances PM, P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3. Ce résultat expérimentale s'accorde avec les considérations théoriques que nous venons de faire, grâce à l'augmentation de l'épaisseur du filtre qui conduit à la tendance de monochromatisation du faisceau de rayons X, incident à l'écran, vers les courtes longueurs d'onde, les conditions de l'utilisation de cet écran s'améliorant.

On a obtenu les mêmes résultats pour les filtres en cuivre.

Soulignons que Destriau obtient une diminuation des maximums de rapport ϱ pour les supports absorbants des écrans lorsqu'ils deviennent plus épais.

Nous nous essayerons d'expliquer ce résultat de Destriau.

Soit un échauffement constant du filament et un potentiel fixe appliqué au tube. Notons I_0 l'intensité du faisceau de rayons X qui frappe le support absorbant de l'écran d'épaisseur a sous lequel se trouve la substance fluorescent de l'épaisseur b.

L'intensité I issue du support qui vient d'arriver à la substance fluorescente est rendue par

$$I = I_0 e^{-\tau_0 a}$$

où τ_0 est le coefficient d'affaiblissement respectif du support.

La brillance étant proportionnelle à

$$I(1 - e^{-\mu\beta})$$

où μ est le coefficient d'absorbtion de la substance fluorescente, il résulte que le rapport ϱ de la brillance de l'écran à l'intensité I_0 du faisceau incident à l'écran est :

$$\varrho = e^{-\tau a}(1 - e^{-\mu b})$$

c'est-à-dire la relation donnée par Destriau.

A présent remarquons que pour une nouvelle épaisseur du support

$$a_1 > a$$

l'intensité qui arrive à la substance fluorescente sera

$$I_1 = I_0 e^{-\tau a_1}$$

et l'intensité du faisceau incident au support absorbant de l'écran cette-fois-ci demeurant la même I_0.

Pourtant, le rapport ϱ sera:

$$\varrho' = e^{-\tau' a_1}(1 - e^{-\mu' b}).$$

Supposons que l'expression

$$(1 - e^{-\mu b})$$

n'ait pas variée sensiblement et que la valeur de τ soit demeurée constante pendant que l'épaisseur du support variait de a à a_1. C'est dans ces conditions ϱ' est plus petit que ϱ, ce qui revient à dire que le rapport ϱ décroît lorsque l'épaisseur du support absorbant croît. Ainsi s'explique-t-on la raison même pour laquelle les maximums ont des valeurs plus petites lors de l'augmentation des supports. C'est là que réside l'explication des résultats de Destriau.

Or la situation expérimentale mène aux mêmes conclusions car on mesure toujours la même ionisation ce qui prouve que l'intensité incidente aux supports de l'écran demeure la même, tandis que la brillance se modifie pour les épaisseurs croissantes du support absorbant.

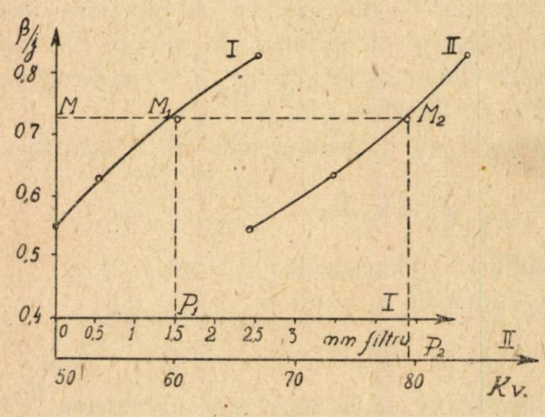


Fig. 2.

Sur la *figure Nr. 1* la réunion des points maximums M, M_1, M_2 et M_3 conduit à une courbe qui contiendra tous les points maximums pour toutes les épaisseurs respectives des filtres.

Cette courbe, telle qu'on la trouve dans la *fig. Nr. 2*, courbe II, est véritablement la courbe d'utilisation au meilleur rendement de l'écran.

La *figure 2* contient également la courbe I dont l'ordonnée porte es valeurs du rapport ϱ maximum et dont l'abscisse porte les épaisseurs du filtre.

C'est à l'aide de ces deux courbes q'on peut facilement trouver pour un potentiel donné appliqué au tube, l'épaisseur corresspondante au filtre nécessaire, afin que notre écran travaille dans les meilleurs

conditions. On peut en faire autant pour l'épaisseur du filtre et en arriver au potentiel nécessaire.

Illustrons par un exemple ce qui nous venons d'énoncer.

Nous désirons déterminer l'épaisseur du filtre nécessaire à la tension 79 Kv. afin que notre écran fonctionne en vue de son meilleur rendement. Pour ce faire, du point P_2 de la *figure 2*, on trace la droite $P_2 M_2$ qui intersecte la courbe II au point M_2. On trace aussi la droite $M M_2$ du point M_2, parallèle à l'abscisse, qui coupe l'ordonnée au point M. Ce point M fixe la valeur du rapport ϱ maximum pour la tension de 79 Kv. La droite $M_2 M$ intersecte aussi le courbe I au point M_1 d'où l'on tracera une autre droite $M_1 P_1$, parallèle à l'ordonnée, qui coupe l'abscisse, contenant les épaisseurs du filtre, au point P_1 à la valeur 1,5 mm.

Cette valeur représente l'épaisseur du filtre nécessaire à la tension 79 Kv. afin que l'écran en soit à son grand rendement.

Par contre si l'on avait l'épaisseur du filtre, on pourrait en arriver par des opérations inverses à la tension respective pour que l'écran fonctionnant aussi dans son meilleur rendement.

Concluons donc qu'il serait nécessaire de tracer pour une installation de rayons X des graphiques contenant ces deux courbes tirées pour des distances de l'écran au tube et pour des échauffements différents.

Conclusions

Il ressort de l'étude que nous venons de faire que :

1. Le rapport de la brillance d'un écran fluorescent à l'intensité du faisceau de rayons X, incident à cet écran, présente un maximum à un certain potentiel appliqué au tube (respectivement un domaine de longueur d'onde) pour chaque épaisseur de filtre, conformément aux considérations théoriques.

Ce résultat est analogue à celui de Destriau pour les supports absorbants, portant la substance fluorescente des écrans luminescents.

2. L'utilisation des filtres dont l'épaisseur augmente rejette les maximums vers les grands potentiels (vers les courtes longueurs d'onde) en accord avec les considérations théoriques et comme cela arrive aussi pour les supports absorbants de Destriau.

3. La valeur de ces maximums augmente lorsque l'épaisseur du filtre devient plus épais.

Les considérations théoriques l'avaient d'ailleurs prévue ne fût ce que pour une région.

4. Ce résultat s'oppose à celui que Destriau avait obtenu pour les supports absorbants dont la valeur des maximums diminuent au fur et à mesure que l'épaisseur du support absorbant augmente. Cette conclusion de Destriau se prête faciliment à une interprétation.

5. On pourrait tracer une courbe des valeurs maximums du rapport de la brillance à l'intensité du faisceau de rayons X, incident à l'écran fluorescent, concernant les différentes épaisseurs de filtre, en fonction des potentiels appliqués au tube de ces rayons.

Cette courbe fixe le régime d'utilisation au meilleur rendement de l'écran fluorescent pour les épaisseurs du filtre et les potentiels accélérateurs respectifs.

6. Il est utile que le graphique qui contient la courbe des valeurs ci mentionnées renferme également la courbe des mêmes valeurs maximums par rapport à l'épaisseur du filtre.

Ceux deux courbes permettent de trouver facilement soit le potentiel quand on connaît l'épaisseur du filtre, soit ces épaisseurs quand on nous a donné les potentiels appliqués, afin que l'écran put fonctionner à son meilleur rendement.

7. Des pareilles courbes peuvent être tracées pour les différentes distances de l'écran au tube et pour l'échauffement varié de ce dernier en vue d'élargir le domaine d'utilisation meilleure de l'écran fluorescent.

Laboratoire de Mesures Electriques
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 20 avril 1947).

621.38

CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE DES CHUTES INTERNES DE TENSION AUX TRANSFORMATEURS DANS LE CAS DES RADIOGRAPHIES INSTANTANÉES A FORTE INTENSITÉ

par

EMIL LUCA et GH. ILIESCU

On détermine d'une manière courante les chutes de tension aux transformateurs par la méthode de Kapp. A cause du secondaire, généralement très résistent des transformateurs de radiographie et de la dispersion magnétique puissante qu'ils possèdent, cette méthode n'est pas indiquée, leur régime de fonctionnement étant sensiblement différant de celui des transformateurs industriels à cause des intensités primaires et secondaires qui sont loin d'être sinusoïdales, condition imposée par la composition vectorielle de la théorie de Kapp.

Ce fait a conduit Georges Destriau en 1944 [1]) à une méthode plus précise qui permet de déterminer les chutes globales de tension aux transformateurs de haute tension, employés dans la technique des rayons X, par la mesure du courant photoélectrique qui se produit dans une cellule photoélectrique sous l'influence de la brillance d'un écran fluorescent, produite par l'action du faisceau respectif de rayons X sur l'écran.

Destriau admet qu'à une tension accélératrice constante et à une filtration fixe, le rapport entre la brillance de l'écran fluorescent à l'intensité du courant électronique reste constant, ce qui peut servir à caractériser la tension respective.

Le courant de la cellule photoélectrique reste proportionnel à la brillance même de l'écran.

On admet aussi que pour une tension constante la composition spectrale du faisceau de rayons X, quelle qu'en soit la filtration, est

---

1) Georges Destriau, *Physique appliquée des instllataions à rayons X.* Paris (1945), p. 111.

indépendante de l'intensité du courant électronique du tube et que la brillance produite par le faisceau hétérogène de rayons X de même composition spectrale est proportionnelle à l'intensité du faisceau.

Dans des conditions analogues, nous admettons qu'entre l'intensité du faisceau de rayon X et l'intensité du courant d'ionisation, produit par ce faisceau dans une chambre d'ionisation, il y a une proportionnalité,

$$I = kj$$

où

I = l'intensité du faisceau de rayons X

j = l'intensité du courant d'ionisation,

et donc le rapport entre le courant d'ionisation j et le courant électronique i reste constant pour une tension accélératrice constante et que ce rapport pourra caractériser cette tension.

En déterminant, comme l'un d'entre nous l'a déjà montré [2]), à l'aide d'un dosimètre la valeur du courant d'ionisation et à l'aide d'un milliampermètre, placé sur le tableau de commande de l'appareil de rayons X, la valeur du courant électronique du tube, pour une tension fixe à vide, on trace la courbe:

$$\frac{j}{i} = f(i)$$

qui est une droite.

En continuant les mesures pour différentes tensions croissantes on obtient un faisceau de droites qui nous fournira la possibilité de déterminer les chutes respectives de tension.

Nos expériences ont été portées sur un appareil de rayons X „Heliodor Duplex" de la Maison des Assurances Sociales de Jassy qui possède un transformateur Siemens Reiniger Werke de 70,6 Kv. doté d'un tube de rayons X Doglas de 6 K.W.

Le tableau de commande de l'installation nous a donné par ses appareils de mesure la possibilité de pouvoir connaître à chaque instant la tension à vide et le courant électronique du tube, en nous donnant aussi la possibilité de varier à volonté l'échauffement du filament du tube et par conséquent l'intensité du courant électronique.

A l'aide de la *Chambre d'ionisation* de Küstner, dont les qualités sont connues, nous avons fait la mesure du courant d'ionisation.

---

2. Luca Emil, *L'Utilisation des dosimètres pour la détermination de la chute interne de tension aux transformateurs au cours des radiographies.* Rev. Şt. „V. Adamachi" XXXIII, Nr. 1, Iaşi, (1947), p. 58.

Nous nous avons placé d'abord sur un plot de pénétration fixe, par exemple 59 Kv. qu'on peut lire au kilovoltmètre du tableau de commande, en fixant comme durée d'exposition une seconde, durée constamment maintenue pendant toutes les expériences.

En donnant un certain courant d'échauffement au filament du tube, nous avons noté la valeur i du courant électronique du tube, lue au milliampermètre du tableau de commande, et le courant d'ionisation j donné par le nombre des divisions de la *chambre d'ionisation de* Küstner, qui était placée sur le trajet du faisceau de rayons X.

La chambre d'ionisation nous indiquait donc le dégré d'ionisation produit par le faisceau de rayons X pour la tension et le courant électronique fixés.

On a fait passé par le filament du tube, en se maintenant sur le même plot de pénétration, à savoir 59 Kv., un autre courant d'échauffement, en marquant de nouveau la valeur du courant électronique ainsi que le nombre des divisions de la chambre d'ionisation.

On a continué de la même manière avec des valeurs du courant électronique variant entre 30 mA. et 84 mA., autant que le tube en a pu supporter.

On a procédé de même pour d'autres tensions accélératrices, en se maintenant également dans les limites imposées par la puissance de l'appareil et du tube.

Les données expérimentales obtenues sont notées dans les tableaux Nr. I, II, III, IV, et V.

TABLEAU I

La tension appliquée au tube Kv. = 59		
Le courant électronique i	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\frac{j}{i}$
30	14,5	0,48
40	17	0,42
50	19	0,38
62	21	0,34
72	22,5	0,31
84	23	0,28

TABLEAU II

La tension appliquée au tube Kv. = 66		
Le courant électronique i	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\frac{j}{i}$
30	18,5	0,62
40	22	0,55
50	26	0,52
62	28	0,45
72	30	0,42
84	31	0,37

TABLEAU III

La tension appliquée au tube Kv. = 73		
Le courant électronique i	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\frac{j}{i}$
30	22	0,73
40	27,5	0,69
50	32	0,64
62	56	0,58
72	37	0,51
84	37,5	0,45

TABLEAU IV.

La tension appliquée au tube Kv. = 79		
Le courant électronique i	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\frac{j}{i}$
30	25	0,83
40	32	0,80
50	37	0,74
62	42	0,68
72	44,5	0,62
84	45,5	0,54

Avec ces résultats on a tracé pour chaque tension la courbe :

$$\frac{j}{i} = f(i)$$

qui nous a donné la réseau de droites de la figure Nr. 1.

TABLEAU V

La tension appliquée au tube Kv. = 84		
Le courant électronique i	Le courant d'ionisation j	Le rapport $\frac{j}{i}$
30	27	0,90
40	35	0,87
50	42	0,84
62	48	0,77
72	50	0,70
84	52	0,62

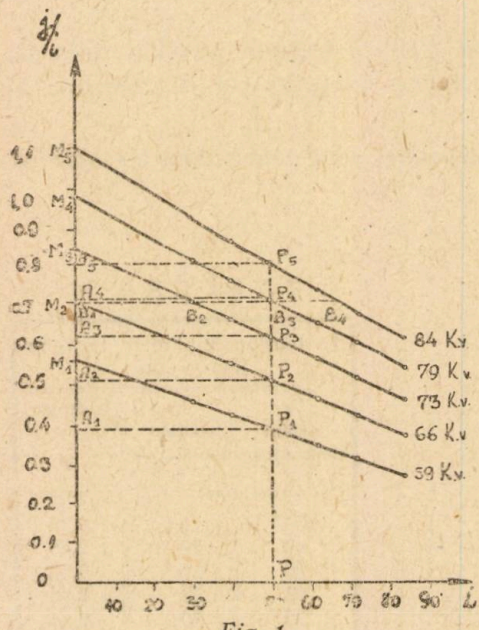


Fig. 1.

Le rapport $\frac{j}{i}$ se trouve en ordonnée et le courant électronique i du tube en abscisse.

En coupant ce réseau de droites par une horizontale $B_1 - B_4$, comme Destriau l'a indiqué, on obtient les mêmes valeurs du rapport $\frac{j}{i}$, donc la même tension effective entre les électrodes du tube pour divers régimes de fonctionnement c'est-à-dire :

Point B_1 – tension à vide 66 Kv.

Point B_2 – tension à vide 73 Kv. débit 30 mA., tension effective aux électrodes du tube 66 Kv.

Point B_3 – tension à vide 79 Kv., débit 51 mA., tension effective aux electrodes du tube 66 Kv.

Point B_4 – tension à vide 84 Kv., débit 67 mA., tension effective aux électrodes du tube 66 Kv.

Les chutes de tension seront respectivement :

Pour 73 Kv. à vide et 30 mA. courant électronique
$73 - 66 = 7$ Kv.

Pour 79 Kv. à vide et 52 mA. courant électronique
$79 - 66 = 13$ Kv.

Pour 84 Kv. à vide et 67 mA. courant électronique
$84 - 66 = 22$ Kv.

De même, on peut déterminer les chutes de tension aux divers plots de pénétration, pour une même intensité, par exemple 50 mA. courant électronique, en coupant le réseau de droites par une verticale $P - P_5$ (fig. 1).

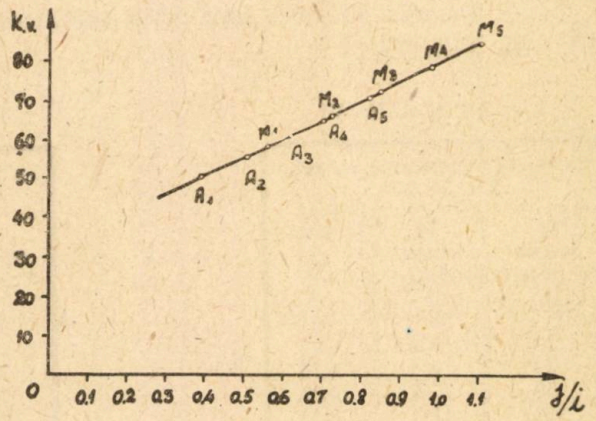


Fig. 2

Les points A_1, A_2, A_3, A_4, et A_5 correspondent aux tensions à vide qu'on peut facilement déduire par interpolation sur l'échelle déterminée par $M_1 - M_5$, ici confondue avec $A_1 - A_5$, comme on voit dans la figure 2.

Dans ce cas les chutes de tension pour un débit de 50 mA. courant électronique sont :

Pour la tension de 59 Kv. à vide $59 - 50 = 9$ Kv.
Pour la tension de 66 Kv. à vide $66 - 56 = 10$ Kv.
Pour la tension de 73 Kv. à vide $73 - 62 = 11$ Kv.
Pour la tension de 79 Kv. à vide $79 - 67 = 12$ Kv.
Pour la tension de 84 Kv. à vide $84 - 71 = 13$ Kv.

Pour faire une comparaison entre les résultats obtenues à l'aide de cette méthode, qui repose sur le courant d'ionisation et la méthode de Destriau, qui repose sur le courant photoélectrique, on a encore déterminé la chute de tension du transformateur de haute tension dans

le cas des radiographies par le courant photoélectrique, donc par le procédé de Destriau.

Dans cet but, nous nous avons placé avec l'ensemble écran fluorescent et cellule photoélectrique, dans les mêmes conditions que celles de la chambre d'ionisation de Küstner, c'est-à-dire à 70 cm. de distance du tube de rayons X.

Comme écran fluorescent on a employé un écran „*Super Astral*", la cellule photoélectrique étant de la catégorie de cellule photovoltaïque électronique avec couche d'arrêt; le galvanomètre utillisé était un „Miravi" de resistance 70 ohms.

Le procédé de travail a été le même que celui de la chambre d'ionisation, avec la différence que cette fois-ci on a noté la valeur du courant photoélectrique β donné par la cellule photoélectrique et lu au galvanomètre.

Les données obtenues sont celles spécifiées dans les tableaux Nr. VI, VII, VIII, IX şi X.

TABLEAU VI

La tension appliquée au tube Kv. = 59		
Le courant électronique i	Le courant photoélectr. β	Le rapport $\frac{\beta}{i}$
30	7,5	0,38
40	9	0,35
50	10,5	0,33
62	11	0,31
72	11	0,29
84	11	0,26

TABLEAU VII

La tension appliquée au tube Kv. = 66		
Le courant électronique i	Le courant photoélectr. β	Le rapport $\frac{\beta}{i}$
30	9,5	0,32
40	11,5	0,29
50	14	0,28
62	15,5	0,25
72	16	0,22
84	16,5	0,20

TABLEAU VIII

La tension appliquée au tube Kv. = 73		
Le courant électronique i	Le courant photoélectr. β	Le rapport $\frac{\beta}{i}$
30	11,5	0,38
40	14	0,35
50	17	0,33
62	19,5	0,31
72	21	0,29
84	21,5	0,26

TABLEAU IX

La tension appliquée au tube Kv. = 79		
Le courant électronique i	Le courant photoélectr. β	Le rapport $\frac{\beta}{i}$
30	12,5	0,42
40	16	0,40
50	19	0,38
62	22,5	0,36
72	24,5	0,34
84	26	0,31

Avec ces données on a tracé la courbe :

$$\frac{\beta}{i} = f(i)$$

où ; β est la brillance de l'écran, donnée par la déviation du galvanomètre, et

i est le courant électronique qui traverse le tube.

Il en resulte un réseau de droites indiquée par la fig. 3.

TABLEAU X

Le tension appliquée au tube Kv. = 84		
Le courant électronique i	Le courant photoélectr. β	Le rapport $\frac{\beta}{i}$
30	13,8	0,46
40	18	0,45
50	21,5	0,43
62	25	0,40
72	27	0,37
84	29	0,34

En coupant ce réseau des droites par une horizontale $B_1 - B_4$, comme dans le cas du courant d'ionisation, on a déterminé les chutes suivantes de tension pour une même valeur du rapport $\frac{\beta}{i}$.

Pour 73 Kv. à vide et 30 mA. courant électronique
73 — 66 = 7 Kv.

Pour 79 Kv. à vide et 52 mA. courant électronique
79 — 66 = 13 Kv.

Pour 84 Kv. à vide et 67 mA. courant électronique
84 — 66 = 22 Kv.

Pour une même intensité du courant électronique, par exemple 50 mA. on a coupé le réseau de droites par une verticale $P - P_5$.

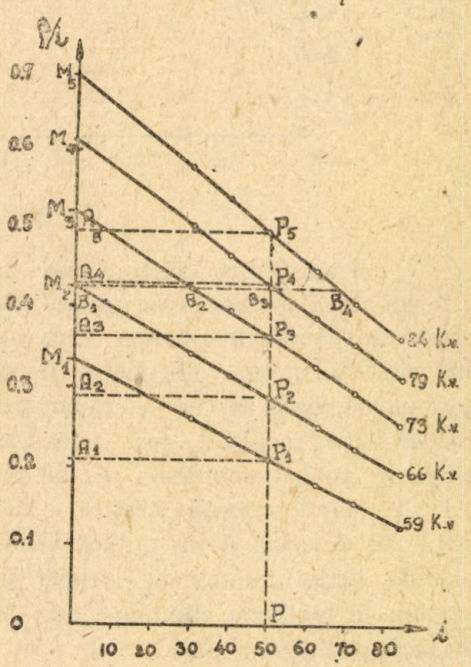


Fig. 3.

Les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 (voir fig. 3) qui correspondent aux tensions à vide, ont été déduits, comme dans le cas du courant d'ionisation, par interpolation sur l'échelle déterminée par $M_1 - M_5$ comme on peut voir sur la figure 4.

Dans ce cas les chutes de tension pour un débit de 50 mA. courant électronique sont :

Pour la tension de 59 Kv. à vide ; 59 — 50 = 9 Kv.

Pour la tension de 66 Kv. à vide ; 66 — 56 = 10 Kv.

Pour la tension de 73 Kv. à vide ; 73 — 62 = 11 Kv.
Pour la tension de 79 Kv. à vide ; 79 — 67 = 12 Kv.
Pour la tension de 84 Kv. à vide ; 84 — 71 = 13 Kv.

En comparant les résultats obtenus et les méthodes de travail on peut tirer les conclusions suivantes :

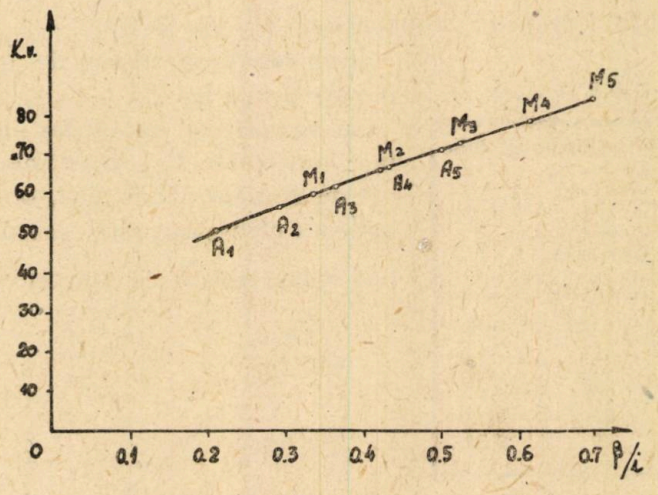


Fig. 4.

1. Il existe une concordance parfaite entre les résultats obtenus par les deux méthodes de travail, c'est-à-dire avec la chambre d'ionisation ou l'écran fluorescent. Cela nous mène à admettre, que, pour les déterminaisons des chutes globales de tension interne aux transformateurs, dans le cas des radiographies instantanées, on peut remplacer avec succès l'écran fluorescent associé à la cellule photoélectrique et au galvanomètre, par la chambre d'ionisation.

2. Notre procédé utilisant le courant d'ionisation, ne nécessitant pour ces déterminaisons qu'une chambre d'ionisation et non pas un ensemble écran fluorescent - cellule photoélectrique et galvanomètre, comme la méthode photometrique de Destriau le demande, est de beaucoup plus expéditif.

Laboratoire de Mesures Electriques
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 25 Mai 1947).

656.221

INFLUENCE DU POIDS SUR LA TRACTION PAR ADHÉRENCE POUR LES VÉHICULES ROUTIERS ET FERROVIAIRES

par

S. OPRIȘOR

Dans la traction par adhérence, pour que la translation d'un véhicule se produise sans glissement, il faut que la force à la jante des roues motrices ou couplées, soit moindre ou tout au plus égale à la force adhérente. Ce principe de base, quand il s'agit de traction, peut s'exprimer par la relation [1]):

$$T \leqq F_a$$

où : T = la force de traction à la jante des roues motrices ou couplées (en kgr.).

F_a = la force adhérente.

Mais $$F_a = m G_0 f_0,$$

de sorte que (1) $$T \leqq m G_0 f_0.$$

en désignant par :

m = nombre d'axes moteurs ;

G_0 = poids qui pèse sur un axe moteur (en kg.) ;

f_0 = coefficient d'ahérence, ou la force d'adhérence spécifique pour l'unité de charge sur essieux. Celle-ci depend des matériaux en contact et de leur état physique.

Par exemple pour :

un bandage d'acier sur rail d'acier	$f_0 = 0{,}2 - 0{,}1$
„ „ de caoutchouc sur route ou terrain	$f_0 = 0{,}8 - 0{,}1$
„ „ „ fer „ „ „ „	$f_0 = 1{,}0 - 0{,}1$
chenille d'acier „ „ „ „	$f_0 = 1{,}2 - 0{,}3.$

Par ailleurs, la force de traction doit être supérieure aux résis-

1) Voir p. ex. Dr. Ing. E. E. Seefehlner. *Traction électrique*. Traduit sur la deuxième édition allemande. Béranger, Paris, 1926, pag. 170.

tances que le véhicule rencontre au cours de son trajet, afin que l'avance n'en soit pas genée. Ce deuxième principe de base peut s'exprimer dans les mêmes conditions par[2]):

$$T \geqq \Sigma R \tag{2}$$

où: ΣR représente la somme de toutes les résistances spécifiques à la traction (en kg. par tonne). De (1) et (2) il résulte avec évidence la relation de principe:

$$m G_0 f_0 \geqq \Sigma R \tag{3}$$

Le nombre d'axes moteurs ou de couplage (m) est déterminé par la résistance mécanique des fuseaux, ou par la résistance du terrain, en cas de traction routière, par la résistance des rails, quand il s'agit de traction ferroviaire.

La résistance du sol pour routes est de 0,2 — 5 kg/cm^2
" " " " " terres arables 0,2 — 1,2 "
" " " rail est de 1250 "

En connaissant, par exemple, la résistance $R = 1250$ kg/cm^2 pour un rail au module de résistance W(en cm^3) rapporté à l'axe horizontal qui passe par le centre de pesanteur, et en connaissant également la distance entre les traverses 1 (en cm), nous pouvons trouver la charge par roue, g(en kg), comme suit:

$$g = \frac{4}{1} RW.$$

Les voies ferrées roumaines admettent pour la construction des lignes principales 18-20 tonnes en tant que charge maximum sur un axe de locomotive ou wagon, chiffre identique à celui fixé en Allemagne par les normes D. R. B. et D. I. N. 5901.

Par conséquent: $G_0 = 20.000$ kg. maximum.

Si nous marquons: $m G_0 = G_a$, il en résulte que le nombre minimum d'axes moteurs ou de couplage pour locomotrices sera:

$$m = \frac{G_a}{G_0} \tag{4}$$

où G_a représente le poids adhérent total.

Si le poids adhérent et la charge admissible sur axe déterminent le nombre d'axes moteurs, ce qui revient lorsqu'il s'agit de traction

2) Voir p. ex. Ing. I. Gr. Stratilesco, Prof. à l'École Polytechnique de Bucarest, *Curs de căi ferate*. 1944, pag. 28-30 et Pierre Prévost, *Véhicules automobiles*. Tome II. Fontainebleau, 1928, pag. 384.

électrique, pour les moteurs montés sur axes, au nombre nécessaire de moteurs, en ce cas le poids total et le poids adhérent détermineront aussi le nombre d'axes non moteurs.

En effet:

$$m + n = \frac{G_t}{G_0}.$$

D'où, eu considérant (4),

$$n = \frac{G_t - G_a}{G_0}. \tag{5}$$

Dans le rapport (5) G_t = poids total du vehicule.

Après avoir designé le poids adhérent total par G_a, l'inégalité (3) se simplifie comme suit:

$$G_a \geqq \frac{\Sigma R}{f_0}. \tag{6}$$

L'inégalité (6) représente la *condition générale de traction* pour les véhicules qui avancent en vertu du principe d'adhérence. G_a désigne en ce cas, le poids adhérent nécessaire et minimum pour une charge de traction d'une tonne.

Si nous continuons de considérer G_t comme charge totale de traction en tonnes, en ce cas G_a doit être également calculé en tonnes, ce qui nous permet d'écrire:

$$G_a \geqq G_t \frac{\Sigma R}{f_0}. \tag{7}$$

La meilleure condition de traction sera réalisée, alors que le poids adhérente sera maximum. Or le poids adhérent maximum sera réalisé économiquement lorsque $G_a = G_t$.

Pour $G_a = G_t$ le véhicule travaille à *adhérence totale*. La condition de traction revêt en ce cas la forme:

$$\frac{\Sigma R}{f_0} = 1. \tag{8}$$

Ce qui veut dire que la somme des résistances est indépendante du poids du véhicule et qu'elle est uniquement déterminée par les conditions physiques du mouvement.

Dans la relation (8) on considère la charge du véhicule comme répartie entre tous les axes moteurs ou de couplage de la manière la plus uniforme possible, afin que les forces adhérentes de ces axes soient aussi égales que possible à l'égard l'une de l'autre, si non, cer-

tains axes, en cas d'une forte traction, auront une tendance à glisser au détriment général de l'avance.

La répartition aussi uniforme que possible de la charge adhérente sur axes, se réalise facilement dans la traction électrique, du moment que les moteurs sont égaux et en général placés sur chaque axe de traction. Dans la traction mécanique cela n'est pas réalisable, aussi se sert-on en général d'une adhérence partielle, aussi bien quand il s'agit d'automotrices ou de locomotrices. Si on ne se sert que d'une partie du poids adhérent, il faut également tenir compte de la manière dont les charges sont réparties sur le véhicule. Prenons deux exemples parmi les plus simples, à savoir un véhicule à deux axes dont un seul est moteur; alors au cas où la charge est symétriquement placée, nous aurons:

$$G_a = \frac{1}{2} G_t .$$

Pour la plupart des automobiles à traction à l'arrière, on prend approximativement:

$$G_a = \frac{2}{3} G_t .$$

En général, nous pourrons écrire le rapport:

$$G_a = \frac{m}{n_t} G_t$$

où n_t = nombre totale d'axes.

En ce cas, le rapport entre les axes étant équivalent au rapport des poids, la condition de traction (8) devient:

$$\frac{\Sigma R}{f_0} = \frac{m}{n_t} . \tag{9}$$

Dont la signification est similaire au rapport (7) et (8) parce que $\frac{m}{n_t}$ sera maximum lorsque $m = n_t$, ce qui est le cas de l'adhérence totale.

Pour un véhicule n'ayant que 2 axes, si $\frac{m}{n_t} < 1$ le point d'application de la charge aura également des répercurssions sur la traction.

Soit par exemple:

a = distance minimum entre l'axe moteur et le plan transversal où l'on considère que la charge du véhicule est actionnée,

b = distance minimum de l'axe non moteur au même plan,

$a + b = L$ empattement du véhicule.

Le moment de la charge adhérente sera: $G_a L$ qui s'équilibre par le moment bG_t ou par $(L-a)G_t$. Soit:

$$LG_a = (L-a)G_t$$

ou

$$G_a = \frac{1-\frac{a}{L}}{1} G_t .$$

Si nous désignons par $C_1 = \frac{a}{L}$ nous pouvons écrire:

$$G_a = \frac{1-C_1}{1} G_t$$

et si nous désignons encore par $C_2 = \frac{1-C_1}{1}$, il en ressort la formule

(10) $$G_a = C_2 G_t .$$

En nous rapportant à l'inégalité (8) nous obtenons une forme nouvelle de la condition de traction spécifique aux automobiles à traction sur un seul axe

(11) $$\frac{\Sigma R}{f_0} \leq C_2.$$

La relation (11) nous aide à examiner les cas de charge non uniformément répartie, aussi bien les cas où la charge est uniformément répartie, (7). En effet, si la condition d'une charge symétriquement répartie entre les deux axes n'est pas réalisée, la traction sera d'autant meilleure que C_2 sera plus élevé. Sachant que pour $C_2 = 1$ nous aurons adhérence totale, il résulte que pour $a = 0$ et $C_1 = 0$, il sera réalisé la meilleure condition de traction, or cela veut dire la possibilité de réduire l'axe et les roues non motrices au minimum. Mais, pour les motifs de stabilité en cours de mouvement et pour éviter les oscillations de tangage si fatigantes pour les personnes, le matériel de suspension et d'aiguillage, et ensuite pour la consommation supplémentaire que ces oscillations parasitaires absorberaient, ainsi que pour le risque de diminuer l'adhérence dans la rampe, on évite cette assymétrie totale et on recourt à un compromis qui soit acceptable à tous les points de vue.

Nous citons comme exemple le tracteur „Fordson" pour lequel au moyen d'un léger poids total on a obtenu une adhérence statisfaisante. Pour les motifs de stabilité, le centre de pesanteur de ce tracteur a été descendu dans le plan horizontal, qui traverse l'axe moteur, et le crochet de traction a été placé sous le niveau de ce plan.

Pour un tel tracteur, il est également favorable que le crochet de la remorque soit aussi placé, assez bas, afin qu'au cours de la traction les roues motrices ne fassent pas des sauts qui diminueraient la force adhérente.

En de tels cas, on peut se servir avec succès de remorques construites sous un seul axe, et le centre de pesanteur de la remorque est calculé comme devant se trouver en face du plan transversal qui passe par l'axe, pour qu'il pèse par une composante q sur le crochet de traction.

Pourvu d'une remorque de ce genre, le poids adhérente du tracteur se trouve être :

$$G_a \geqq C_2 (G - q) \tag{12}$$

et la condition de traction :

$$G_a \geqq C_2 (G \pm q) \frac{\Sigma R}{f_0}. \tag{13}$$

On se sert du signe (+) quand le centre de pesanteur tombe dans le plan transversal á l'arrière de l'axe de la remorque.

Outre les cas ci-dessus examinés, s'il s'agit de train, on peut aussi faire une distinction entre le poids total nécessaire à la locomotive et le poids total à remorquer, car il y a des différences entre les uns et les autres au point de vue des résistances de traction. Cette différence peut être relevée, soit qu'il soit fait usage pour le calcul des résistances de formules globales, soit de formules plus exactes telles celles de Frank, Strahl, Davis, etc.

Au cas où on se sert de formules globales, la condition de traction (11) devant contenir toutes les charges, peut se présenter sous une forme nouvelle :

$$G_a \geqq (G_l + Q) \frac{\Sigma R}{f_0} \tag{14}$$

où G_l = poids de la locomotive et du tender (en tonnes)
Q = poids des wagons (en tonnes).

Au cas où on se sert de formules plus exactes, la relation (11) peut affecter la forme :

$$G_a \geqq \frac{G_l \Sigma R_l + Q \Sigma R_q}{f_0}. \tag{15}$$

Il ressort de la relation (15) que la traction d'un train est d'autant meilleure que le poids et les résistances à la traction sont moindres et que le coefficient d'adhérence en est plus grand.

Le coefficient d'adhérence d'une part, étant une fonction inverse

par rapport à la vitesse, et les résistances de roulement, d'une autre part, étant des fonctions directes par rapport à la vitesse, il s'en suit que pour ces deux raisons la traction est plus avantageuse pour ce qui est d'une petite vitesse. C'est un motif pour lequel il est demandé aux monteurs de traction un couplage puissant pour une vitesse diminuée.

Il résulte encore de cette même relation (15) que pour des rampes toujours plus grandes, R_l et R_q augmenteront d'une manière correspondant à la résistance imposée par la rampe ($h^0/_{00}$ = kg/tonne), et comme le poids adhérent, pour la rampe à angle α, devient $G_a \cos \alpha$, *la rampe travaille dans les deux cas en détriment de la traction ;* d'abord en augmentant les résistances, dans le second cas, en diminuant la force adhérente.

Nous concluons de ce qui précède, que les facteurs principaux de la traction sont, les conditions physiques de l'adhérence, où le poids adhérent joue un rôle important, ensuite les résistances de la voie et des véhicules ou la charge joue aussi un rôle important, (3).

Le poids adhérent et le poids sur l'axe déterminent le nombre d'axes de traction (moteurs ou de couplage), tout comme la charge totale impose, suivant les exigences de l'infra et suprastructure de la voie, le nombre total d'axes (relations 4 et 5)

La traction la plus favorable pour un véhicule ou convoi est obtenue lorsque tout le chargement agit sur toutes les roues de traction. Autrement dit, en cas d'adhérence totale (relations 8 et 9).

Lorsqu'il s'agit d'un véhicule à adhérence partielle, la meilleure traction s'obtient quand le centre de pesanteur maintient sa position en toute circonstance pour peser normalement sur l'axe moteur (relation 11) et quand il s'agit d'un tracteur, si la remorque contribue à l'augmentation de la force adhérente (relation 13, cas—q).

Pour ce qui est du train, la meilleure traction est pour une locomotive à adhérence totale et si les résistances de traction sont petites (relations 14 et 15).

Voilà de quelle manière, le poids impose toutes les conditions des tractions, mais par la nécessité de la force respective de traction, la puissance et les caractéristiques des moteurs de traction agissent également.

Laboratoire de Traction mécanique et électriques de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 21 Juin 1947).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

CALCUL DES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DES PIÈCES PENDANT LES CYLINDRAGES AUX TOURS AUTOMATIQUES, EN FONCTION DES PARAMÈTRES TECHNOLOGIQUES DE L'USINAGE

par

LUCIUS N. SĂVEANU

1. Considérations introductives.

La plus grande partie des tours automatiques modernes présentent parmi leurs caractéristiques communes, les traits suivants qui nous intéressent au point de vue de l'étude des déformations des pièces pendant leur usinage :

a) Les pièces usinées résultent de barres de sections circulaires constantes dont le diamètre est relativement petit.

b) Le montage de la pièce sur le maudrin de la poupée fixe est equivalent à une barre avec un bout encastré et l'autre libre.

c) L'usinage a lieu avec une vitesse de taille pour laquelle la pression spécifique de taille peut être considerée comme indépendante de la vitesse.

d) Le taillant de l'outil attaque la pièce, au début du cylindrage, à son bout libre.

L'usinage complet d'une pièce au tour automatique se compose d'une succession de *phases d'usinage.* Chaque phase à son tour consiste en une où plusieurs *opérations élémentaires* de taille qui s'effectuent simultanément pendant la phase considerée.

Parmi les diverses opérations élémentaires, *le cylindrage* et les opérations dérivées (filetage, profilage, planage etc.) soumettent la pièce à usiner à un groupe d'efforts classiques, dont le rôle prépondérant sur la déformation élastique de l'axe centrale de la pièce revient à l'effort de flexion.

Dans des conditions normales, ces efforts résultant de l'action de l'outil sur la pièce, ayant comme point d'application le centre de la

portion de contact entre le taillant principal de l'outil et la surface usinée.

Dans les passages suivants nous nous proposons d'établir les relations qui nous donnent les valeurs des déformations élastiques des pièces pendant leur cylindrage sur le tour automatique, en fonction explicite des principaux paramètres qui caractérisent l'usinage respectif.

Quant aux opérations élémentaires dérivées, comme le filetage, le profilage, le planage etc, les relations trouvées pour le cylindrage peuvent être facilement employées aussi pour la détermination des déformations élastiques des pièces pendant celles-ci.

2. Le système de référence et les notations adoptées

On rapporte les composantes de l'action de l'outil sur la pièce, l'axe centrale de la pièce, ainsi que les points de la surface de celle-ci, à un système de référence, formé de trois axes orthogonaux, ayant

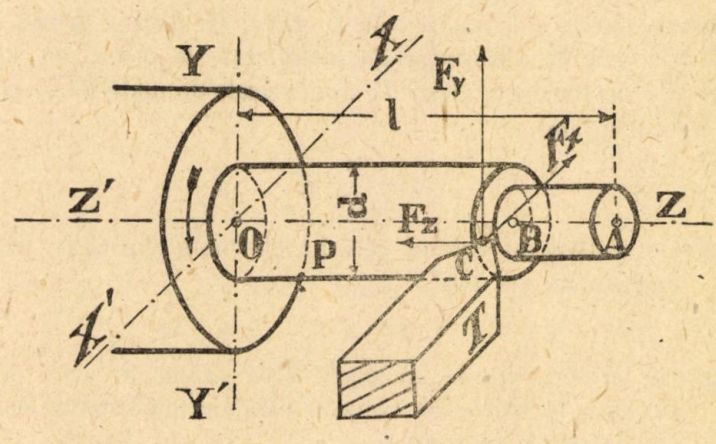


Fig. 1.

l'origine en O (fig. 1), le centre de la section d'encastration et orientées comme il suit :

ZZ' sur la direction de l'axe du mouvement principal indentique à l'axe centrale de la pièce nondéformée.

YY' sur la direction parallèle à la vitesse périphérique du point de contact entre le couteau et la pièce.

XX' sur la direction normale sur la plan YOZ.

Ensuite on adoptera les notations suivantes dans les relations qu'on va établir :

F_x = la composante sur la direction XX' de l'action de l'outil

sur la pièce, que nous nommons *la force de répulsion*, en kg.

F_y = la composante sur la direction YY' de l'action de l'outil, que nous nommons *la force de taille proprement dite*, en kg.

F_z = la composante sur la direction ZZ' de l'action de l'outil, que nous nommons *la force d'avance* [1]), en kg.

l = la longueur de la pièce mesurée de la section d'encastration, en cm,

$d = 2r$ = le diamètre de la pièce, en cm,

J = le moment d'inertie axial de la section de la pièce par rapport au diamètre, en cm^4,

J_p = le moment d'inertie polaire de la section de la pièce par rapport au centre de la section, en cm^4,

σ = la résistance à la rupture du matériel de la pièce, en kg/cm^2,

σ_z = la résistance, instantanée, à la compression du matériel de la pièce, en kg/cm^2,

B = la dureté du matériel de la pièce, en degrés Brinell,

E = le module d'élasticité du matériel de la pièce, en kg/cm^2,

G = le coefficient d'élasticité transversale du matériel de la pièce, en kg/cm^2,

$$G = \frac{5}{13} \cdot E,$$

q = la section du copeau détaché en cours d'usinage, supposée constante, en mm^2,

$$q = s.\ t,$$

s = la largeur du copeau, égale à la longueur avec laquelle avance la pointe du couteau pendant une rotation complète de la pièce, en mm,

t = la profondeur du copeau, en mm,

k = la pression spécifique résultant de la force de taille, en kg/mm^2,

C = la pression spécifique caractéristique pour $q = 1\ mm^2$, en kg/mm^2 pour $q = 1\ mm^2$,

m = exposant radical déterminant l'orientation des droites qui représentent k en fonction de q, dans les coordonnées logarithmiques,

α = l'angle libre de placement du couteau, en degrés,

---

1) Pouvant être dénominée encore *résistance à l'avance* ou *force d'alimentation*, selon l'expression italienne „forza di alimentazione" adoptée par le Dr. Ing. A. Galassini (Macchine utensili; U. Hoepli, Milano, 1943).

β = l'angle d'aiguisement du couteau, en degrés,

f_x = la flèche de l'axe de la pièce grâce à la force F_x, mesurée sur la direction XX' au niveau de la pointe C du couteau, en cm,

f_y = la flèche de l'axe de la pièce grâce à la force F, mesurée sur la direction YY' au niveau de la pointe C du couteau, en cm,

f_z = la flèche de l'axe de la pièce grâce à la force F_2, mesurée sur la direction XX' au niveau de la pointe C du couteau en cm,

ΔZ = la contraction de la pièce sur la longueur entre la section d'encastration et le point B, mesurée sur la direction ZZ', en cm,

$\Delta\varphi$ = l'angle de rotation de la section de la pièce, au niveau de la pointe C du couteau, par rapport à la section fixe d'encastration, en radians.

3. Détermination des forces de taille.

Les composantes sur les trois directions de l'action du couteau sur la pièce dépendent généralement d'une série de paramètres qui caractérisent l'usinage respectif, parmi lesquels les plus importants sont ceux qui se rapportent à la nature du matériel à usiner, les dimensions de la section du copeau, les angles de taille et la forme de l'outil.

Pour la détermination de *la force de taille proprement dite* on recourt à la relation :

$$F_y = k\,q \tag{1}$$

où apparaît évidemment seulement le paramètre q, les autres facteurs d'usinage etant concentrés implicitement dans le terme k, qui à son tour dépend de :

a) la nature du matériel de la pièce

b) la section du copeau et le raport t/s

c) les angles de taille et la forme de l'outil.

Pour la détermination de la pression spécifique k on peut employer la formule de Kronenberg [2]).

$$k = \frac{C}{\sqrt[m]{q}}. \tag{2}$$

2) Kronenberg M.: *Grundzüge der Zerspannungslehre:* J. Springer, Berlin, 1927; pag. 94.

La signification du facteur C ressort si l'on introduit dans (2) pour la section du copeau la valeur $q = 1mm^2$. Pratiquement il dépend du matériel de la pièce, des angles de taille et de la forme du couteau.

Pour un certain matériel de la pièce et un certain angle de placement (α), on peut déterminer la valeur de C à l'aide de quelques diagrammes, établis à base d'expérimentation, de la forme :

$$C = f(\sigma, \beta) \tag{3}$$

ou de la forme :

$$C = f(B, \beta) \tag{4}$$

établis par Kronenberg pour l'acier et pour la fonte.

On peut aussi déterminer C avec suffisante approximation à l'aide de quelques formules empiriques résultant d'une série d'expériences spéciales, comme par exemple la formule :

$$C = 2{,}5 + 3\sqrt{B.\beta} \tag{5}$$

valable pour le cylindrage d'acier avec $\alpha \cong 8°$.

L'erreur, d'ailleurs pratiquement négligeable, que présentent généralement les diagrammes et les formules de la forme (3), (4) et (5) consiste dans le fait que dans ceux-ci on ne tient pas compte de l'influence de l'angle de position du couteau, ainsi que de celle du rapport t/s.

Si l'on logarithme la relation (2) on obtient :

$$\log k = \log C - \frac{1}{m} \cdot \log q. \tag{f6}$$

Pour un matériel à usiner déterminé, un couteau déterminé et sa position par rapport à la pièce déterminée, la facteur C peut être considéré constant, et le diagramme logarithmique qui résulte de la relation considérée sous la forme :

$$\log k = f(\log q) \tag{7}$$

est une droite ayant pour coefficient angulaire négatif l'inverse de m. Donc l'exposant radical m de la relation (2) indique l'orientation de la droite qui représente k en fonction de q en coordonnées logarithmiques, pour un matériel déterminé. Il dépend de la nature du matériel de la pièce et pratiquement on peut le déterminer à l'aide de quelques tables ou diagrammes établis par voie d'expérimentation.

En introduisant la valeur de k de (2) en (1), on obtient l'expression de la force de taille proprement dite en fonction des paramètres principaux de l'usinage :

(8) $$F_y = C . q^{\frac{m-1}{m}}$$

Il résulte de l'experience que pour le cylindrage en conditions normales on peut écrire la relation:

(9) $$F_y > F_x > F_z$$

tandis que pour le planage, si l'on maintient le système de coordonnées choisi, il y aura:

(10) $$F_y > F_z > F_x .$$

La force de taille proprement dite pouvant être déterminée avec suffisante précision à l'aide de la relation (8), on peut considérer alors aussi comme résolue la détermination de la force de répulsion que de la force d'avance, si l'on connait les rapports respectifs de grandeurs entre F_y et les autres forces.

En utilisant pour ce but différents diagrammes comme ceux obtenus par Kronenberg[2]), Schlesinger[3]), Gottwein et Reichel[4]), on peut calculer, pour les opérations d'usinage qui nous intéressent, la valeur moyenne des coefficients:

(11) $$j_x = F_x / F_y \quad \text{et} \quad j_z = F_z / F$$

qui nous permettent la détermination de la force de répulsion:

(12) $$F_x = j_x . F_y = j_x . C . q^{\frac{m-1}{m}}$$

ainsi que celle de la force d'avance:

(13) $$F_z = j_z . F_z = j_z . C . q^{\frac{m-1}{m}}$$

alors que l'on connaît la force de taile proprement dite.

4. Détermination des déformations élastiques de la pièce.

En notant avec x, y, z les coordonnées, à un moment donné, de la pointe C de l'outil par rapport au système de référence choisi, on observe que x représente le rayon instantanné de cylindrage, y représente la surélévation du couteau par rapport à l'axe de cylindrage, pouvant être considerée dans notre cas constamment nule, et z représente la distance de la pointe C du couteau du tour automatique.

Les trois forces de taille, considérées comme agissant isolément, imprimeront à la pièce à usiner les déformations suivantes:

3) Schlesinger G.: Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Berlin, Bd. 73, Heft 53, pag. 1284.

4) Dubbel H.: Taschenbuch für Maschinenbau; J. Springer, Berlin, 1935.

a) *La force de répulsion* F_x soumet la pièce à un effort de *flexion* qui donne une déformation élastique contenue dans le plan XOZ.

La flèche du point B$(0, 0, z)$ de l'axe de la pièce nondéformée: deviendra à cause de la force F_x :

$$f_x = \frac{F_x \cdot z^3}{3EJ} \tag{14}$$

ou, introduisant en (14) les valeurs respectives pour F_x et J, on obtient

$$f_x = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{j_x \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{E} \cdot \frac{z^3}{X^4}, \tag{15}$$

La flèche maxime aura lieu au début du cylindrage pour $x = r$ et $z = l$:

$$f_x\,(\max) = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{j_x \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{E} \cdot \frac{l^3}{r^4}. \tag{15'}$$

b) *La force de taille proprement dite* F_y soumet la pièce à un effort de *flexion* et à un effort de *torsion*.

En vertu de l'effort de *flexion* l'axe de la pièce à usiner reçoit une déformation dans le plan YOZ et la flèche de cette axe à la distance z, mesurée sur la direction YY', sera :

$$f_y = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{C \cdot q^{m-1}}{E} \cdot \frac{z^3}{X^4}. \tag{16}$$

Tout comme dans le cas précédent, f_y atteint la valeur maxime pour $x = r$ et $z = l$:

$$f_y\,(\max) = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{E} \cdot \frac{l^3}{r^4}. \tag{16'}$$

La force F_y sollicite en même temps la pièce à un *moment de torsion* M_t , ayant la valeur :

$$M_t = F_y \cdot x = C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot x \tag{17}$$

qui fait tourner la section à la distance z, d'un angle $\Delta\varphi$ par rapport à la section d'encastration :

$$\Delta\varphi = \frac{M_t}{G \cdot J_p} \cdot Z \tag{18}$$

Introduisant en (18) les valeurs pour M_t et T_p, l'on obtient :

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{G} \cdot \frac{z}{x^3} \cdot \tag{19}$$

Pour $x = r$ et $z = l$, l'on aura :

$$\Delta\varphi\,(\max) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{G} \cdot \frac{l}{r^3} \cdot \tag{19'}$$

c) *La force d'avance* F_z produit dans la pièce à usiner un effort de *compression* et un autre de *flexion*, grâce à son action sur une direction parallèle à l'axe de la pièce mais excentrique par rapport à celle-ci avec la distance x.

L'effort de *compression* donnera naissance sur la portion z de la pièce à une contraction élastique Δz, ayant selon la loi de Hoocke la valeur :

$$\Delta z = \frac{z \cdot \sigma_z}{E} \tag{20}$$

dans laquelle :

$$\sigma_z = \frac{F_z}{\pi \cdot x^2} = \frac{j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{\pi \cdot x^2} \cdot \tag{21}$$

En remplaçant σ_z de (21) en (20) on obtient :

$$\Delta z = \frac{j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{\pi \cdot E} \cdot \frac{z}{x^2} \tag{22}$$

et, pour $x = r$ et $z = l$

$$\Delta z\,(\max) = \frac{j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{\pi \cdot E} \cdot \frac{l}{r^2} \cdot \tag{22'}$$

Grâce à l'excentricité de la force F_z, les rections de la pièce sont soumises à l'action d'un moment de flexion constant $M_f = F_z \cdot x$, qui déforme élastiquement l'axe mediane de la pièce dans le plan XOZ.

La flèche f_z résultant de cette déformation a la valeur [5] :

$$f_z = x \left(\frac{1}{\cos \omega z} - 1 \right) \tag{23}$$

dans laquelle :

$$\omega = \sqrt{F_z \,|\, EJ}. \tag{24}$$

5) Hütte : *Des Ingenieurs Taschenbuch*, Bd. I ; W. Ernst & Sohn, Berlin. 1941, pag 696.

Dans la rélation (23) on peut, avec une suffisante approximation, adopter :

$$\cos\omega\, z = 1 - \frac{F_z \cdot z^2}{2E \cdot J}. \tag{25}$$

En introduisant en (23) la valeur de $\cos\omega\, z$ de (25) et au lieu de la force F_z ; l'expression de celle-ci en fonction de paramètres de l'usinage, on obtient la relation suivante :

$$t_z = \frac{2j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot x \cdot z^2}{Ex^4 - 2j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot z^2}. \tag{26}$$

On déduit que la valeur maxime pour t_z a lieu, comme dans les cas précédents, pour $x = r$ et $z = l$, quand on a :

$$t_z\,(\max) = \frac{2j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot r \cdot l^2}{Er^4 - 2j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot l^2}. \tag{26'}$$

5. Conclusions.

Si l'on note avec ξ, η, ζ les coordonnées, dans le système de référence adopté, du bout libre A de l'axe de la pièce, en état déformé, en utilisant les résultats précédents (15'), (16'), (22') et (26'), en vertu du principe de la superposition des effets, on aura :

$$\xi = f_{x\,(\max)} - f_{z\,(\max)} = \frac{2C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot l^2}{E \cdot r^4} \left(\frac{2j_x \cdot l}{3\pi} - \frac{j_z \cdot r}{1 - \frac{2j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}} \cdot l^2}{E \cdot r^4}} \right) \tag{27}$$

$$\eta = f_{y\,(\max)} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{E} \cdot \frac{l}{r^4} \tag{28}$$

$$\zeta = l - \Delta_{z\,(\max)} = l\left(1 - \frac{j_z \cdot C \cdot q^{\frac{m-1}{m}}}{\pi \cdot E \cdot r^2}\right). \tag{29}$$

a) On peut déterminer à priori la flèche $f_{(\max)}$ mesurée dans le plan XOY, qu'obtient pendant un certain usinage le bout libre de l'axe de la pièce, en fonction des principaux paramètres technologiques de l'opération.

Ainsi, en faisant appel aux résultats (27) et (28), on aura :

(30) $$f_{(max)} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

La valeur de cette flèche est en liaison étroite avec *le dégré de précision de l'usinage.*

b) La détermination préalable de la flèche $f_{(max)}$ en fonction des paramètres de l'usinage a une considérable importance dans le choix de *la section maximum du copeau*, quand, avec un couteau déterminé, il s'agit d'usiner un certain matériel sous forme de barres cylindriques de dimensions déterminées.

Pour que la flèche $f_{(max)}$ reste dans le cadre des *tolérances admissibles* de l'usinage respectif, on limitera la section du copeau qui va être realisée pendant cet usinage à une valeur maximum admissible résultant des relations précédentes.

c) Sur la direction XX' l'action de déformation de la force de répulsion F_x est en partie compensée par l'effort de flexion grâce à l'action excentrique de la force d'avance F_z.

Comme F_y est toujours plus grande que F_x, il résulte que le déplacement du bout libre de l'axe de la pièce sur la direction XX' sera assez petit par rapport au deplacement du même point sur la direction YY'.

d) La déformation élastique Δz, due à l'effort de compression de la force d'avance F_z est également petite par rapport à f_y. A cause de sa direction axiale, on peut considérer comme nulle l'influence de cette déformation sur la dégré de précision du cylindrage.

La déformation angulaire $\Delta\varphi$, due à l'effort de torsion exercé par la force de taille proprement dite F_y, n'intervient pas dans l'évaluation de la flèche maximum de l'axe déformée de la pièce.

e) On peut annuler les déformations élastiques ξ et η par la division en parties égales de la section du copeau entre deux ou plusieurs couteaux, ayant les angles de taille identiques et disposés symétriquement par rapport à l'axe de la pièce.

Ainsi, par l'emploi des tours automatiques ayant des *couteaux multiples* avec des *actions déformantes compensées dans les plans des sections normales de la pièce*, on peut effectuer un usinage de haute précision et d'une grande capacité de production, due à la grande section totale du copeau et à la grande vitesse de taille réalisable en ces conditions.

Laboratoire des Machines-outils
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 15 Juin 1947).

SUR LA CAUSE DE LA PRESENCE DE SODIUM DANS LES EAUX DES OCÉANS D'APPROXIMATIVEMENT TRENTE FOIS PLUS QUE LE POTASSIUM

par

HARALAMBIE VASILIU

La présente communication est en rapport avec l'une de mes études intitulée *„La Prédésagrégation"* ou *„Die Vorverwitterung"*, travail où j'avais démontré que la transformation des rocs éruptifs et de schistes cristallins en rocs sédimentaires et en sols eut lieu beaucoup plus rapidement que ne le montre généralement la Science *).

Selon les évaluations de Clarke, les rocs éruptifs et les schistes cristallins contiendraient en moyenne, en pourcentages, 3.84 Na^2O, 3.15 K^2O, 3.6 Ca O et 3.4 Mg O et toujours d'après *Clarke* une couche d'environ 800 mètres se seraient désagrégée à la surface de la lithosphère. Après la désagrégation les solutions se sont versées dans l'Océan mondial (Weltmeer).

Certains des bases mentionnées ci-dessus se sont conservées dans les restes de la désagrégation, soit insolubles, soit absorbées, tel surtout le potassium. D'après les résultats des diverses analyses des sédiments et des sols nous apprécions que de pourcentages approximatifs de 0.40 Na^2O, 0.9 K^2O, 0.6 Ca O, 0.7 Mg O se seront gardés dans les restes de la désagrégation.

En pourcentages seront donc trouvés dans les solutions de la désagrégation de rocs: 3.44 Na^2O, 2.25 K^2O, 3.0 Ca O, 2.8 Mg O.

Une prisme de rocs eruptifs à la base d'un centimètre carré et haute de 800 mètres, aura le volume de 80.000 cmc., ou de 80 dmc. et pèsera $80 \times 2.8 = 224$ kg. — la densité des rocs éruptifs est de 2.8.

De la surface du globe terrestre la terre ferme occupe 2/5, tandis

*) H. Vasiliu, *La prédésagrégation*. Bulletin de la Faculté des Sciences agricoles de l'Université de Jassy. Vol. II, page 3, 1937, et H. Vasiliu, *Die Vorverwitterung*. Ibidem. Vol. III, page 5, 1938.

que l'Océan s'etend sur les 3/5 restants. La profondeur moyenne de l'Océan est de 3650 m. Si l'on s'imagine un nivellement des accidents du sol, l'eau s'étendrait alors uniformément sur toute la terre, qu'elle recouvrirait d'une couche d'eau épaisse de 2200 m. Une prisme à la base de 1 cm. carré et haute de 220 m., aura donc le volume de 220 dmc.

Les eaux provenant de la désagrégation des 224 kg. de rocs éruptifs avec leur sels se serait touvées dans les 220 Kg. d'eau marine, ce qui veut dire qu'à un kilogramme de roc désagrégé correspond un kilogramme d'eau marine.

En ce cas, il faudrait donc que l'eau de l'Océan mondial contienne, en moyenne, en pourcentages 3.44 Na^2O, 2.25 K^2O, 3.0 Ca O, 2.8 Mg O, quand en realité selon Vernadsky, dans les eaux de l'Océan mondial se trouvent en pourcentages 1.53 Na^2O, 0.05 K^2O, 0.07 Ca O, 0.23 Mg O.

L'on s'aperçoit aisément des grandes différences entre les deux rangées de nombres. L'une des premières causes de ces différences réside dans le fait, qu'une partie des sels des solutions provenant de la désagrégation ait formé des dépôts dans le sol.

Ainsi trouvera-t-on de grands dépôts de Cl Na, de dépôts moindres de sels de K, d'importants dépôts de plâtre et surtout de calcaire, dont ce dernier pourrait à lui seul, selon Clarke, recouvrir toute la terre d'une couche épaisse de 40 m., ensuite aussi de dépôts de dolomite etc. Les dépôts de Cl Na sont incomparablement plus riches que ceux des sels de K.

Dressons maintenant un tableau, qui nous éclaire mieux sur ce qui précède.

Les bases %	Dans les rocs éruptifs	Dans les restes de la désagrégation	Dans les solutions de la désagrégation	Dans les eaux de l'Océan	Dans les dépôts	Surplus
Na O	3.88	0.4	3.44	1.53	beaucoup	+
K^2O	3.15	0.9	2.25	0.05	très peu	—
Ca O	3.6	0.6	3.0	0.07	très abondants	+
Mg O	3.5	0.7	2.8	0.23	suffisant	0

D'après ce tableau nous nous croyons autorisés de tirer la conclusion qu'une grande quantité de K a disparue pour qu'en révanche la quantité de Ca se soit accrue.

Nous nous sommes aperçus de ce fait déjà depuis 1936, à l'occasion de notre étude, que nous redigions alors, sur la prédésagréga-

tion et nous avons eu l'impression, que nous n'avons pas encore réussi complètement à expliquer le phénomène, quoique je supposâsse bien que la radioactivité du potassium pouvait en être la cause.

A la lumière des récentes théories sur la transmutation des éléments et de la découverte de la radioactivité artificielle due à Rutherford, Bothe, Chadwick etc., aussi bien que grâce aux époceaux travaux de Fermi, de Lawrence et surtout de Joliot-Curie (1934) l'on peut expliquer maintenant la raison pourquoi le potassium vient de disparaître dans la plus grande partie, tandis que le calcium a beaucoup augmenté.

L'on vient de prouver expérimentalement, que si l'on bombarde le noyau des différents atomes avec des particules α (noyaux d'Hélium), avec des protons (noyaux de H ordinaire), avec des deutons (noyaux de H dense), ou bien avec des particules β (électrones), avec de neutrones, ou de positrones etc., les atomes correspondents deviennent radioactifs, — ayant une demi-durée caractéristique — se transformant en atomes d'autres éléments avec dégagement d'une quantité d'énergie.

Ainsi Na se transforme en Mg conformément aux formules:

$$^{23}_{11}Na + ^{2}_{1}H = ^{24}_{11}Na + ^{1}_{1}H \text{ et } ^{24}_{11}Na = ^{24}_{12}Mg + \bar{e} + h\nu .$$

C'est à dire qu'en bombardant le sodium au numéro d'ordre 11 et au poids atomique 23 avec des deutons au numéro d'ordre 1 et au poids atomique 2, on obtient l'isotope de sodium au numéro d'ordre 11 et au poids atomique 24. Cet isotope est radioactif avec une demi-durée de 15 heures et il se transforme en Mg au numéro d'ordre 12 et au poids atomique 24 et dégage en meme temps des particules β ($\bar{e}$), ainsi qu'une quantité d'énergie $h\nu$, où h est la constante universelle de Planck, dont la valeur est 6.55×10^{-27}, et ν la fréquence.

Il en sera de même pour le potassium, $^{39}_{19}$ K ou autrement dit le potassium au numéro d'ordre 19 et au poids atomique 39, bombardé avec des particules α, ou d se transformera dans l'isotope $^{42}_{19}$ K, ce qui veut dire le potassium au numéro d'ordre 19 et au poids atomique 42. Celui-ci avec une demi-durée de 14 heures se transformera dans l'isotope de Ca, $^{40}_{20}$ Ca se dégageant une quantité d'énergie sous forme de particules β.

Plus radioactif, le potassium se sera transformé bien plus rapidement en calcium, que le sodium en magnesium.

Le bombardement des noyaux atomiques eut lieu probablement surtout avec les deutrons de l'eau dense (D^2O), qui se trouve dans l'eau ordinaire en proportion de 0.02 %. L'eau marine en contient un peu davantage.

Comme l'Océan n'est agité que jusqu'à une profondeur de 200 à 300 m., le fond. étant tout à fait calme et comme les densités de l'eau ordinaire et de l'eau dense sont 1.02 et 1.1056, l'eau dense descendra lentement vers le fond. L'eau marine doit être par conséquant plus riche en eau dense dans sa profondeur. La transformation de K en Ca sera donc plus intense dans la profondeur de l'Océan. Il est bien probable que cette transformation dans le milieu fluide aqueux, des ions, eut lieu de façon plus rapide, que dans les cristaux des rocs éruptifs et des schistes cristallins.

C'est à l'avenir de tirer à clair comment a lieu ce bombardement des noyaux atomiques. Les émanations des particules α de la profondeur peuvent également jouer un rôle dans cette transmutation.

Comme on le sait, les kathions de pottassium jouent le premier rôle dans la synthèse de la matière vivante, tandis que les kathions de calcium n'ont qu'un rôle bien plus restreint, comme par exemple celui de la neutralisation de l'acide oxalique dans les plantes, ou bien celui de la formation du phosphate de calcium chez les animaux; les plantes inférieures pouvant même se dispenser.

La transmutation du potassium en calcium, la diminution d'un élément dynamique, vivant, et l'augmentation d'un élément mort, signifie donc une diminution de l'intensité de la vie terrestre. Cette transmutation est une des causes de la mort de la terre.

L'application des nouvelles théories sur la radioactivité, aussi bien que celles sur les transmutations des éléments pourraient jeter des lumières toutes neuves sur maints problèmes; telle par exemple, sur la formation des gisements des sels de potassium, sur la façon, dont se produit le Golfstream, sur la transformation de certains minéraux componants des rocs etc.

Laborafoire de Chimie Agricole
de l'Ecole Polyfechnique de Jassy

(Reçu le 25 Juin 1947).

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS

M. Piazzolla Beloch. – *Lezioni di Geometria Descrittiva.* Corredate di disegni originali in collaborazione con l'Ing. G. Setti. Vol. II. Edit. Grafolito – Bologna – 1946 (Lithographié).

C'est le second volume des leçons de Géométrie Descriptive professées par M-me Piazzolla Beloch à l'Université de Ferrare.

Sur le premier volume vous avons donné déjà un compte rendu dans ce même Bulletin [1]).

L'auteur a partagé le livre, qui a presque la même étendue que le premier (174 pages), en huit chapitres.

Le premier chapitre se réfère aux figures planes. Les courbes de deuxième dégré sont considérées de deux manières différentes, comme la projection centrale d'un cercle, ou comme la section d'un cône du second ordre.

Il est à remarquer, que l'auteur à cette occasion ne fait pas l'usage du théorème de Dandelin.

On rappelle de même quelques propriétés projectives des coniques, utiles dans les constructions demandées par la Géométrie Descriptive. Pour résoudre quelques problèmes se référants à la vraie forme et à la grandeur des figures contenues dans un plan, l'auteur utilise le rabattement, en considérant la relation d'affinité orthogonale qui existe entre la projection et le rabattement et ayant comme axe d'affinité la trace du plan, qui contient la figure, sur le plan de projection.

Les constructions géométriques qu'y sont suivies, sont instructives et intéressantes.

Dans le II-ème chap. on traite : La projection orthogonale des polyèdres (pyramide, tétraèdre, etc.). Sections planes. Intersection d'un polyèdre avec une droite et intersections de deux polyèdres. L'auteur a utilisé un grand nombre d'esquisses et d'épures.

Les cônes et les cylindres avec leurs problèmes afférants, plans tangents, sections plans et intersections, sont traités dans le III-ème chapitre.

Les surfaces de rotation qui font l'objet du IV-ème chapitre ont

1) Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy, vol. I. Fasc. 2, 1946, p. 399-400.

été très soigneusement étudiées. On donne ici les théorèmes intéressants sur les plans tangents, sections planes etc. On résout le fastidieux problème de l'intersection de deux surfaces de révolution dans tous les cas possibles.

L'auteur se propose de même, le problème intéressant de déterminer le contour apparent d'une surface de révolution vue d'un point quelconque (à distance finie ou à l'infini).

Pour finir ce chapitre riche en applications on résout le problème de trouver les points communs à trois sphères, en remarquant qu'avec cela on a résolu de même le problème de la photogrammétrie aérienne de „trouver le sommet de la pyramide".

Le V-ème chap. est destiné aux quadriques considérées comme surfaces de translation.

Dans les chapitres suivants sont traitées : l'hélice et la surface hélicoïdale, et parmis d'autres surfaces réglées sont étudiées l'hyperboloïde à trois directrices droites et les conoïdes.

Le livre est facilement lu. Les problèmes, clairement formulés, sont résolus au complet. Nous remarquons avec plaisir que la plupart des questions sont originales. Le troisième volume maintenant sous presse, et dont nous attendons la parution, va mettre fin aux leçons de géométrie descriptive que M-me Beloch professe magistralement chaque année à l'Université de Ferrare.

Prof. Dr. **MIHAIL ŞT. BOTEZ**

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Roland Deaux. — *Introduction à la géométrie des nombres complexes.* 163 pag. Ed. A. De Boeck, Bruxelles 1947.

Dans sa dernière conference, *La pensée et l'action*, Paul Langevin rappelait une fois de plus aux sceptiques que toute recherche scientifique, si théorique qu'elle paraisse, est susceptible tôt ou tard d'être appliquée dans l'industrie ou la vie courante et il citait comme des exemples particulièrement frappants les carrés magiques à l'aide desquels on a résolu certains problèmes posés par la technique du métier Jacquart ou -dans l'agriculture- par la rotation des cultures et les nombres complexes qui constituent aujourd'hui le moyen le plus simple pour traiter les problèmes soulevés par la technique des courants alternatifs.

S'inspirant des mêmes idées et à peu près vers la même époque

que la conférence de Langevin, M. R. Deaux, professeur à la Faculté Polytechnique de Mons et géomètre hautement qualifié, avait fait commencer l'impression de l'ouvrage dont nous donnons le compte rendu, ouvrage qui constitue le développement des leçons données depuis 1930 par l'auteur aux candidats ingénieurs éléctromécaniciens de Mons.

Comme le dit lui-même, M. Deaux a voulu faire oeuvre de mathématicien pur, mais il a choisi et traité son sujet de telle manière qu'une fois son livre assimilé, n'importe quel ingénieur puisse lire avec fruit les mémoires et traités spéciaux d'électrotechnique ; il souhaite d'ailleurs qu'un ingénieur averti complète son ouvrage par un travail contenant des illustrations techniques des théories exposées par lui et, de notre côté, nous serions heureux de voir son souhait promptement exaucé.

Les bons ouvrages, tels que celui de J. L. Coolidge—*The geometry of the complex domain* —, consacrés exclusivement à la géométrie des nombres complexes sont assez rares et, à notre connaissance, il n'y en avait aucun en français si on excepte les „*Leçons de géométrie projective complexe*" de Elie Cartan, livre qui n'est pas, certes, à la portée des débutants ; à ce point de vue M. Deaux a comblé une regrettable lacune d'autant plus que la lecture de son livre est rendue trés attachante par son talent de présentation claire, vivante et alerte.

Le livre est divisé en trois Chapitres, dont voici les titres :

Ch. I. Représentation géométrique des nombres complexes.

Ch. II. Eléments de géométrie analytique en nombres complexes.

Ch. III. Transformations circulaires.

Signalons parmi les questions particulièrement attirantes : la théorie des quadrangles harmonique et équianharmonique (Ch. I, n-os 30-32) qui jouent en somme dans le plan de Gauss à peu près le même rôle que les polygones réguliers dans le plan euclidien ; les courbes cycloïdales (Ch. II, n-os 50-52) présentées à l'aide de leur génération cinématique ; les quartiques bicirculaires et cubiques circulaires unicursales (Ch. II, n-os 65-72) ; la démonstration du théorème de Siebeck, due à l'auteur (Ch. III, no. 98).

Dans l'ensemble, le travail de M. Deaux est une réponse pertinente à ceux-là, trop nombreux, hélas! qui conçoivent l'ingénieur comme une espèce de mécano plus habile et nous ne pouvons que recommander chaleureusement sa lecture, facilitée par la netteté du

style, à nos jeunes ingénieurs qui sont parfaitement à même, vu la préparation qu'ils reçoivent, de le comprendre et de l'utiliser.

* * *

Mauro Picone e Carlo Miranda. — *Esercizi di Analisi Matematica.* Seconda Edizione. 470 pag S. A. Tumminelli Editrice „Studium Urbis" Roma. 1945.

Les éminents auteurs, analystes de réputation mondiale, se sont proposé de mettre à la disposition des étudiants un manuel d'exercices qui les aide d'une part à une meilleure compréhension et maîtrise technique des théories apprises aux cours du premier „biennio" et qui, d'autre part, doit leur stimuler le goût de compléter les connaissances acquises ; ce second but est atteint par l'inclusion de certaines questions qui ne sont pas prévues par les programmes. telles par exemple :

L'étude de certaines fonctions spéciales (Si (x), Ci x), li (x), $\Gamma(x)$, exercices n-os 487,515,608) ;

Les problèmes à la limite, y compris un aperçu des théorèmes d'oscillation qui sont redevables à M. Picone de progrès substantiels, pour les équations différentielles ordinaires (Ch. X, 3) ;

Les inégalités d'Abel-Cauchy (ex. 552) et de Hadamard (ex. 553) ;

Enfin et surtout la propriété isopérimétrique du cercle par la méthode de Hurwitz (ex. 571).

Le livre offre aux étudiants 696 exercices variés et de difficulté graduelle, tous entièrement résolus ou à solution indiquée et la matière est divisée en X Chapitres, dont voici le contenu ,

Ch. I. Nombres complexes. Equations algébriques.

Ch. II. Analyse combinatoire. Déterminants. Sistèmes d'équations linéaires.

Ch. III. Limites. Fonctions d'une variable.

Ch. IV. Dérivées des fonctions d'une variable.

Ch. V. Intégrales des fonctions d'une variable.

Ch. VI. Les séries.

Ch. VII. Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables.

Ch. VIII. Intégrales curvilignes.

Ch. IX. Intégrales multiples.

Ch X. Equations différentielles.

Chaque chapitre est précédé d'un résumé succint et clair de la théorie qui constitue un „memento" commode et très utile pour les

étudiants, surtout pour les futurs ingénieurs, à l'intention desquels M. Picone et Miranda ont rédigé leur manuel.

Signalons enfin le développement peu commun des chapitres relatifs aux intégrales curvilignes et multiples, questions trop souvent négligées par les auteurs des recueils d'exercices.

En résumé, les auteurs ont fait au public mathématique un don précieux apte à stimuler de nouvelles vocations et preuve du haut niveau scientifique de l'enseignement supérieur italien.

Nous recommandons instamment à nos étudiants de l'Ecole Polytechnique de Jassy, qui tous doivent suivre un cours d'italien, l'étude et l'utilisation fructueuse de ce recueil, pour le plus grand bien de leur préparation scientifique et professionnelle.

Prof. Dr. **AL. C. CLIMESCU**
Séminaire Mathématique de l'Ecole Polytechnique de Jassy

* * *

Mauro Picone et Paolo Tortorici: *Trattato di Matematiche Generali.* Volume primo; Società anonima Tumminelli Editrice. „Studium Urbis", Rome, 1947, p. 591.

Le traité de Mathématique Générale par Mrs. Mauro Picone et Paolo Tortorici vient à remplir un vide dans la littérature mathématique. Son but, selon le désir de ses auteurs, est de faciliter aux hommes de sciences, de tous les domaines modernes de recherches, la technique mathématique et la manière mathématique du raisonnement. Comme dans le stade actuel de développement, aucune science ne peut se dispenser des calculs et des raisonnements mathématiques, la nécessité de cette oeuvre s'impose. Sa source, naturellement, est là, où les nécessités techniques touchent les idées mathématiques et où les idées mathématiques aident à éclaircir les faits techniques.

La synthèse réalisée par cette oeuvre est brillante. La cristallisation parfaite des diverses branches de Mathématique, dans des formes nouvelles, concises et à l'entendement de tous, ne pouvait se réaliser mieux que par la longue et riche expérience scientifique et didactique du grand mathématicien, l'académicien Mauro Picone, qui déjà depuis longtemps a habitué le monde mathématique à ses vues originales Dans ce traité de Mathématique, les jeuns mathématiciens trouveront des suggestions et des voies nouvelles pour des recherches; les étudiants en Mathématique seront en face des méthodes modernes, des points de vues originaux et d'une forme concise d'exposition, plus

rigoureuse et débarrassée des lests inutiles des démonstrations. Pour les étudiants des autres sciences et surtout pour ceux des écoles polytechniques, ce traité sera le meilleur guide.

Le soin didactique dans l'exposition est porté à l'extrême et, selon les affirmations des auteurs, quiconque a les notions élémentaires de Mathématique et un raisonnement normal, peut aborder facilement ce traité, car les auteurs donnent une exposition totale, en partant des premières notions.

On observe de même la préoccupation constante vers l'utile et le pratique par de nombreux exemples. Le premier volume est divisé en cinq chapitres. Dans chacun d'eux on traite les éléments des diverses branches fondamentales de Mathématique.

On commence dans le premier chapitre par les compléments d'Algèbre : permutations, arrangements, combinaisons, progressions arithmétiques et géométriques, déterminants. On remarque la manière didactique d'introduire les déterminants par une méthode d'induction qui facilite beaucoups leur entendement.

Le chapitre II contient les éléments de Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, de Goniométrie et les nombres complexes. L'idée de traiter la Goniométrie et le Trigonométrie après l'introduction des notions de Géométrie analytique est intéressante. La démonstration des formules d'addition des fonctions circulaires est très remarquable et originale.

Le chapitre III est consacré à l'introduction dans le calcul infinitésimal par la théorie des limites. Ici, surtout, on remarque l'art de concilier la rigueur mathématique avec la clarté de compréhension On traite la théorie générale des limites par l'introduction des notions fondamentales de la théorie des ensembles, puis les séries, les fonctions continues avec le thèoreme de Weierstrass, les séries de fonctions, de puissances, séries trigonométriques.

Le chapitre IV, le plus vaste, comprend les dérivées et les intégrales des fonctions d'une variable. On applique la théorie des dérivées à tous les problèmes d'Algèbre et de Géométrie analytique qui les nécéssitent : les théorèmes de Rolle, Cauchy, Cavalieri-Lagrange, la règle d'Hospital, l'étude du diagramme d'une fonction, les maximums et minimums, le calcul approximatif des racines d'une équation, l'étude des séries de puissances, série de Taylor, exemples de développement en série de Taylor et Mac-Laurin, construction de tables pour les fonctions circulaires et logarithmiques, interpolations et extrapolations aves les formules de Lagrange et Newton.

Le calcul intégral commence par les définitions fondamentales: paires de classes contigües, définition de l'intégrale pous les fonctions continues, représentation géométrique de la notion d'intégrale, intégrale comme limite, intégrales définies. On continue par les méthodes élémentaires de calcul des intégrales, la formule de Wallis, les intégrales impropres, formules de Moivre-Stirling, intégration des fonctions généralement continues, courbes régulières dans le plan et l'espace; le calcul numérique des intégrales définies, intégration par des séries, l'intégrale de Gauss, les intégrales elliptiques de Legendre; intégration par interpolation et extrapolation, méthode de Côtes, Bézout, Cavalieri-Simpson et Gauss. Enfin on expose le développement en séries de Fourier, y compris la méthode sommatoire de Fejér, les critères de développement en séries de Fourier, convergence en moyenne.

Le chapitre V contient les dérivées et les intégrales des fonctions de plusieures variables: dérivées partielles, defférentielles totales, dérivées des fonctions composées; les intégrales définies, fonctions des paramètres, les intégrales multiples, le théorème de Dirichlet, expression par l'intégrale du reste dans la formule de Taylor; l'analyse des fonctions dans le plan et dans l'espace, figures planes et dans l'espace avec les fondements pour l'analyse des fonctions et le théorème générale de Weierstrass; gradient et divergence d'un vecteur, paramètres différentiels; surfaces régulières et définition d'un domaine régulier dans l'espace; sur la résolution des plus générales systhèmes d'équations, maximums et minimums pour les fonctions de plusieurs variables; la méthode des moindres carrés dans les sciences experimentales avec les principes de la théorie des erreurs d'observations, l'équation de Van der Waals, la loi de survivance de Gompretz-Makeham; des recherches sur les maximums et minimums liés des fonctions de plusieurs variables et les fonctions de figures complètes.

L'oeuvre de Mrs. M. Picone et Paolo Tortorici réunit l'utile, le rigoureux et l'estétique du point de vue mathématique. On y trouve les derniers résultats, quoique l'on commence par les premiers éléments. Le cours suivi est un trajet minimum en compréhension, temps, espace et maximum en estétique, utile et didactique. Le monde scientifique attend avec légitime curiosité et impatience le second volume de Mrs. Mauro Picone et Paolo Tortorici.

Prof. Dr. **ION L. CREANGĂ**
Séminaire Mathématique de l'Ecole Polytechnique de Jassy

* * *

Mauro Picone, *Lezioni di Analisi Funzionale*. Dispense Universitarie Tumminelli, Città Universitaria, Rome (1946-1947), 576 pages (Lithographié),

Dès la parution du „Traité de Calcul différentiel et intégral" publié par M. Mauro Picone, illustre savant de réputation mondiale de l'Université de Rome et Directeur de l'Institut pour les applications du Calcul près du Conseil National de Recherches Scientifiques, le monde mathématique et la critique internationale ont été justement frappés par son contenu extraordinairement riche et par ce degré de généralité uni à une clarté admirable et profonde que caractérise toujours l'exposition de toutes les questions abordées par M. Picone commençant par les plus élémentaires (Voir les recensions des *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. I, 1-e et 2-e partie, *Calcolo differenziale e integrale*, Circolo Matematico di Catania, 1923, parus dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 49 (1923), pages 172-173 et des *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Naples, 1940, publiées dans le *Zentralblatt für Mathematik*, 24 (1941), pages 23-24). Le développement incessant de ce point de vue, qui a permis à l'Auteur de réunir par des liens indissolubles ce qu'on nommait les Mathématiques „pures" et les Mathématiques „appliquées" et de cristalliser brillament depuis lors presque tous les chapitres de l'Analyse Mathématique moderne, aboutit tout à fait récemment à la publication par le même Auteur d'un nombre de traités *) qu'on devra à juste titre considérer classiques dès leur parution. Tels sont: *Fondamenti di analisi funzionale lineare*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Città Universitaria, Rome; *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni*, Libreria „La Goglíardica", Pise, et la seconde édition des *Appunti di Analisi Superiore*, par les soins des M.M. C. Miranda et A. Ghizzetti, publiée en deux volumes, aux éditions de Rondinella, Naples, augmentée de plusieurs nouveaux chapitres.

En nous bornant à donner dans les lignes ci-dessous quelques brèves indications concernant un autre de ces récents traités et précisément *Lezioni di Analisi Funzionale*, mentionné dans le titre, nous ne pouvons que souhaiter très chaleureusement la parution imprimée de sujets exposés dans ce volume qui consitue le commencement d'une série entière de traités promettant une mise au point actuelle et heureuse des contributions propres importantes de M. Picone et des

*) Voir dans ce même „Bulletin" les recensions des autres traités récents de M. Picone tels que *Esercizi di Analisi Matematica* (en collaboration avec M. C. Miranda) et *Trattato di Matematiche Generali* (en collaboration avec M. P. Tortorici).

brillants exposés d'Analyse générale et de Topologie faits par E. H. Moore, M.M. P. Alexandroff, M. Fréchet, P. Levy et d'autres pendant les trois décades dernières.

Ces leçons, professées à la Faculté des Sciences de l'Université de Rome pendant l'année académique 1946-1947, comprennent, dans une introduction étendue sur 117 pages, une exposition d'une portée vaste et profonde concernant l'Analyse fonctionnelle. De la sorte, on voit s'accomplir le passage de la notion d'une fonction de ligne au sens de l'Ecole italienne au champ tout à fait général dans lequel on pourra choisir la variable d'une fonctionnelle. Une fois suffisamment acquise la mentalité de l'Analyse générale, l'Auteur passe à l'exposition du Calcul des variations, considéré comme un chapitre d'une science plus générale destiné à prendre dans les Sciences Mathématiques une place de plus en plus importante. De cette manière l'Auteur réussit pleinement à satisfaire aux vœux et aux désirs exprimés par V. Volterra et par M. J. Hadamard (Voir M. Fréchet, Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 6).

Nous reproduisons les titres des principaux chapitres et paragraphes de ce volume qu'on ne pourrait résumer ici sans les mutiler : § 1. Le concept de fonctionnelle. § 2. Ensembles abstraits et leur propriétés topologiques § 3. Ensembles de fonctions. § 4. Espaces. § 5. Premières propriétés des ensembles contenus dans un espace. § 6. Ensembles des ensembles. § 7. Fonctions et leur propriétés fondamentales. Dans ce paragraphe nous soulignons une importante généralisation du théorème de Ascoli-Arzelà. Chap. I. Premiers théorèmes d'existance dans les problèmes du Calcul des variations. § 1. Théorèmes généraux de minimum et de maximum. § 2. Minimums et maximums des intégrales ordinaires (contenant, entre autres, les extensions aux fonctionnelles dépendant d'une fonction complexe ou de fonctions de plusieurs variables) § 3. Courbes dans un espace euclidien. Chap. II. Espaces métriques et leur problèmes de minimum. § 1. Les métriques d'un espace. § 2. Digression sur l'espace de Hilbert. § 3. Les polynomials. Chap. III. Conditions nécessaires et suffisantes d'un extremum relatif pour les intégrales de forme normale. Chap. IV. Technique eulerienne du Calcul des variations. Chap. V. Applications aux théories de l'élasticité.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**
Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

Bruno Finzi. – *Meccanica Razionale*, I, Teorie introduttive. Cinematica. Statica. XIII + 339 pag., & II, Dinamica. XI + 425 pag. N. Zanichelli, Bologne, 1946.

Les nécessités et les tendances modernes d'un élargissement de plus en plus accentué des programmes de mathématiques pures et appliquées dans les établissements d'enseignement supérieur tant théoriques que techniques, dont nous avons déjà eu l'occasion de parler autrefois[1]), ont permis de moderniser le cours de Mécanique rationnelle en y englobant nombre de nouvelles branches de la Mécanique moderne telles que la Mécanique relativiste, les Mécaniques statistiques et ondulatoires ou bien certains chapitres de la Mécanique classique tels que la Mécanique des corps fluides et des corps élastiques et, plus généralement, la Mécanique des milieux continues déformables.

Ces tendances ont trouvé dans la personne de M. B. Finzi un adepte enthousiaste. Bref, dans les 24 chapitres de ses deux volumes M. Finzi a réussi d'une manière heureuse à traiter quasi toutes les questions essentielles de la Mécanique théorique.

Après avoir exposé dans l'introduction quelques considérations dignes d'être mises en évidence sur le but de la Mécanique et sur son histoire et après avoir présenté différentes quantités physiques et leurs relations, l'auteur décrit dans les chapitres II et III les méthodes mathématiques du calcul vectoriel et tensoriel nécessaires pour la compréhension du cours. Fidèle à l'histoire et à la tradition de cette Science de la Nature, M. Finzi a su mettre en évidence d'une manière limpide les rapports continues et actifs de la Mécanique rationnelle avec la Physique en choisissant pour le développement de son cours l'ordre qui suit. En commençant par la Cinématique qui contient les chapitres: IV, traitant sur des points et des systèmes mobiles ; chap. V, sur le déplacement ; chap. VI, sur le mouvement ; chap. VII, sur la vitesse ; chap. VIII, sur l'accélération et chap. IX, sur la cinématique relativiste, l'Auteur passe à la Statique. Dans les quatre chapitres de cette partie du cours se sont développées les notions préliminaires et la statique du point, la statique des corps rigides, la statique de systèmes déformables et le principe des travaux virtuels. L'étude de la Dynamique est divisée par l'Auteur en deux parties, dont la première, la *Dynamique physique*, contient l'exposition des principes fondamentaux et des théorèmes dont en résulte les lois générales du mouvement des corps naturels (Chap.

1) Voir: Les recensions des livres récents de Mécanique rationnelle publiés par M. Ch. Platrier (Ce „Bulletin", I$_2$, 1946, 401 – 405) et Les Notes sur la vie universitaire et polytechnique insérées dans la Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" (Revue Scientifique „V. Adamachi", Jassy, XXXIII, 2—3, 1947).

XIV. Concepts et lois fondamentals ; Chap. XV. Actions et caractéristiques mécaniques. Théorèmes de conservation. Caractéristiques mécaniques des systèmes matériels. Equations cardinales. Principes thermodynamiques ; Chap. XVI. Mécanique des mouvement relatifs ; Chap. XVII. Mécanique relativiste restreinte et générale et Chap. XVIII. Dimensions et unités de mesures des quantités mécaniques). La deuxième partie, le *Calcul des mouvements*, comprend la détermination mathématique effective des mouvements des corps, lorsqu'on connait les forces traduisant les circonstances physiques et les liaisons (Chap. XIX. Dynamique du point matériel libre ou lié ; Chap. XX. Dynamique du corps rigide ayant un axe fixe, un point fixe ou libre ; Chap. XXI. Dynamique des systèmes holonomes et non holonomes. Stabilité. Vibrations. Equations. Principes variationaux ; Chap. XXII. Dynamique des milieux continus déformables. Dynamique des corps élastiques. Dynamique des fluides ; Chap. XXIII. Dynamique *impulsive*, du point matériel, des corps rigides et des systèmes et ses équations cardinales ; Chap. XXIV. Mécanique statistique).

En parcourant ce traité moderne de Mécanique rationnelle de M. Finzi, nous ne pouvons que féliciter très chaleureusement l'Auteur pour sa réussite d'avoir donné une vue cristalline d'ensemble sur les plus différentes branches de cette „Philosophie de la Nature" et d'avoir présenté toutes ces questions d'une manière si brève que l'on est surpris de voir toute les questions essentielles traités en un si petit nombre de pages. Pour exemplifier, je ne puis pas m'abstenir, dans cet ordre d'idées de citer l'exposition, faite par l'auteur, des principes variationaux de Gauss, Hertz et Hamilton, qui permet d'instituer entre la Mécanique ondulatoire et la Mécanique corpusculaire des rapprochements au sens de M. L. de Broglie- semblables à ceux existant entre l'optique physique et l'optique géométrique et conduit le lecteur, d'une manière rapide et brillante, aux points de vues des plus actuels de la Physique mathématique moderne (II, pag. 299 - 312).

Nous souhaitons bien de pouvoir saluer le plus tôt possible l'utilisation du cours de Mécanique rationnelle de M. B. Finzi par nos étudiants, parallèlement à la consultation des traités roumains correspondants, convaincu d'un profit des plus heureux qui en résultera pour notre jeunesse désireuse d'élargir son horizon scientifique.

La présentation typographique impeccable de ces deux volumes est due à la célèbre Maison N. Zanichelli, Editeur, Bologne.

* * *

Antonio Signorini, Meccanica Razionale con elementi di Statica Grafica, I, Perrella - Rome, VI + 333 pag., 1947.

Après avoir offert au monde scientifique nombre de traités aujourd'hui classiques contenant, entre autres, les résultats des brillantes découvertes faites par l'Ecole géométrique italienne, on participe dans ces derniers temps à la parution en Italie d'une série de mises au point de Mécanique rationnelle, commencée par les illustres et très regrettés savants T. Levi Civita et R. Marcolongo et d'un nombre de traités d'Analyse Mathématique moderne, inauguré par des grands promoteurs du „Calcul sublime", U. Dini et G. Peano.

L'illustre successeur de Levi Civita à la chaire de Mécanique rationnelle à l'Université de Rome, M. A. Signorini, qui a publié de nombreuses études personnelles importantes concernant différentes branches de la Physique Mathématique, nous présente dans ce premier volume de son cours, divisé en 9 chapitres et destiné aux étudiants ès sciences mathématiques et physiques et aux futurs ingénieurs, le Calcul vectoriel, la Cinématique et la Statique graphique.

D'une valeur didactique exceptionnelle, vérifiée pendant quelques éditions lilhographiées et de plus en plus perfectionnées [1]), ce traité permet d'éliminer la nécessité d'un enseignement autonome de la Statique graphique dans les Ecoles Polytechniques et aboutit d'extraire de cette doctrine de la Statique graphique des profits sensibles pour les étudiants des sciences mathématiques et physiques.

L'Auteur commence par la théorie des vecteurs et par l'introduction à la Statique grafique, passe ensuite à l'étude de la Cinématique d'un point, aux déplacements et mouvements rigides, et enfin aux mouvements relatifs et aux applications variées des mouvements rigides. La Géométrie des masses suit immédiatement aux chapitres consacrés à la Cinématique. La détermination des centres de gravité et l'intégration graphique sont exposés dans les chapitres V et VI. Les moments d'inertie et leur calcul graphique, surtout pour les systèmes plans, occupe les chapitres VIII et IX.

Un certain changement de l'ordre habituel des chapitres classiques de la Mécanique théorique est complètement justifié par l'Auteur par l'avantage de pouvoir distribuer uniformément les exercices graphiques en s'appuyant dès le commencement sur la Géométrie des masses.

L'introduction dans ce traité d'un nombre de perfectionnement

1) Voir: A. Signorini, Meccanica razionale con elementi di Statica grafica. R. Università di Roma, Facoltà di Scienze. Anno accademico 1941-1942 D. U. S. A. 676 pages.

extraits des plus recents travaux de l'Auteur, tels qu'une certaine extension de la notion de l'ellipse centrale d'inertie (Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (8) 1, 1946, pag. 137-142) et les contributions concernant la Stéréodynamique et la Géométrie des masses (Dans cet ordre d'idées on doit relever, entre autres, les applications au mouvement à la Poinsot, pag. 319-320) et les développements sur les moments d'inertie, pag. 320-333, sont dignes d'être mises en évidence. La présentation extérieure de ce volume aux Editions de Perrella-Rome, les notes instructives et nombreuses en bas des pages et les 125 figures très bien exécutées, constituent un motif de plus pour souhaiter la parution le plus tôt possible du second volume qui nous permettra de pouvoir souligner, une fois de plus, la grande portée de cette nouvelle oeuvre académique de l'illustre Auteur.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

C. V. Gheorghiu, *Coloranți organici* (Les colorants organiques ; en roumain). Collection de monographies des Sciences pures et appliquées publiée par la Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" (Revue Scientifique „V. Adamachi"), in grand 8^0, XVI+588 pages, Iaşi, 1947.

La littérature d'enseignement supérieur vient de s'enrichir d'un ouvrage de haute qualité embrassant tout le domaine des colorants. Dans une monographie de 588 pages, l'auteur a su présenter, d'une façon claire et judicieuse, l'état actuel de nos connaissances touchant aux colorants et aussi, très souvent, aux problèmes qui restent posés aux chercheurs.

L'ouvrage est conçu avec un haut souci de didactique évitant tout encombrement qui serait de nature à déconcerter le lecteur.

La première partie (131 pages) est consacré à un aperçu d'ensemble des théories chimiques et physiques des colorants et aux phénomènes de halochromie On admet actuellement que la couleur dépend non seulement de la structure fondamentale de la molécule, mais aussi de ses états d'excitation. C'est pour cela que l'auteur n'a pas hésité, pour compléter nos connaissances sur les chromophores et sur les auxochromes, à faire intervenir avec C. K. Ingold, L. Pauling, C R. Bury, E. Arndt, B. Eistert et C. Schwarzenbach, les théories électroniques et quantiques modernes dans la discussion des formules des colorants. Il y reviendra souvent au cours de son ouvrage.

La partie spéciale débute par un chapitre dans lequel sont exposées les substances de base nécessaires à la préparation des colorants de synthèse. Ensuite la matière est divisée systhématiquement en 18 chapitres. Chaque colorant y est présenté avec sa formule de constitution développée, alors que sa nomenclature est donnée aussi en allemand, anglais et français. Une bibliographie très complète accompagne tous les chapitres et si parfois on ne trouve pas assez de détail, dans le texte, sur les méthodes de préparation, les lecteurs pourraient remonter, si besoin est, aux mémoires originaux.

Au troisième chapitre on trouve que la substitution du groupement $-SO_2NH_2$ dans la position para de la chrysoïdine mène à la formation du prontosil. L'auteur saisit cette occasion pour donner un très court aperçu sur les sulfamides.

Une attention toute particulière a été accordée, par l'auteur, aux colorants trouvés dans les fleurs et dans les fruits : les anthocyanes et les anthocyanidines (XIIIe chapitre), et aussi aux colorants trouvés dans le liquide biliare, dans le sang et dans les feuilles (XIVe chapitre). Les pigments respiratoirs, la chlorophylle et son action photochimique pendant l'assimilation du gaz carbonique, voilà des sujets qui intéressent à un très haut degré, non seulement les chimistes, mais aussi les biologistes.

Une grande place a été consacrée aussi aux colorants trouvés dans les ailes des papillons (XVe chapitre) ; aux flavines, avec le ferment jaune de respiration (XVIe chapitre), et aux carotinoïdes (XVIIe chapitre).

Tous ces colorants ont été activement étudiés ces dernières années et, si l'accord n'est pas fait sur toutes les questions qui se posent, des vues nouvelles se sont fait jour et semble s'imposer.

L'auteur a su relever tous ces résultats d'une façon remarquable.

En lisant cette monographie, aussi remarquable par la clarté de l'exposé que par la documentation sûre et étendue, le lecteur reçoit bien l'impression que la chimie des colorants est un champ énorme et prodigieusement fertile pour l'activité scientifique des chimistes et des biologistes.

Nous donnons plus bas le sommaire de cette monographie.

Première Partie. **Couleur et constitution chimique.** (Chap. I. *Introduction.* Chap. II. *Théories chimiques des colorants.* Chap. III. *Chromophores.* Mésomérie. Energie de résonance. Le groupement éthylénique. Méthodes pour le calcul d'état quantique des électrons π. L'absorption de la lumière et la double liaison. Hydrocarbures colorés. Chromophore C=O. Le complexe quinonique. Chromophore azo (N=N). Chromophore azométhine. Chromophore NO. Chromophore NO_2. Liai-

son semipolaire. Chromophore SO_2. La mésomérie des anions contenant des groupements nitrés. Carbone trivalent. Enolyse. Tautomérie de valence. Azote bi- et tétravalent. Influence de la cyclisation. Chap. IV. *Auxochromes.* La participation des groupes auxochromes à la mésomérie des colorants. Auxochromes qui favorisent l'état électropositif, électronégatif et auxochromes amphotères. Colorants à ionisation intramoléculaire. Groupe auxochrome en liaison cyclique. Rôle des halogènes. Chap. V. *Phénomènes d'halochromie.* Liaisons d'hydrogène. Système redox. Electrode à quinhydrone. Chromoisomérie. Chap. VI. *Phototropie et thermochromie.*

Deuxième Partie. **Matières colorantes organiques artificielles et naturelles.** Chap. I. *Matières primes et intermédiaires à la fabrications de colorants artificiels.* Chap. II. *Colorants nitrés et nitrosés.* Chap. III. *Colorants azoïques.* La copulation des sels de diazonium avec les amines et les phénols au point de vue de la théorie électronique. Colorants azoïques basiques. Colorants azoïques acides. Sulfamides. Indicateurs. Le symbole p_H. Colorants azoïques substantifs. Colorants azoïques produits directement sur la fibre. Aplications des colorants azoïques dans la teinture des textiles. Chap. IV. *Colorants quinoniques.* Colorants végétals dérivés de la naphtoquinone. Vitamine K. Colorants dérivés de l'anthraquinone. La structure des oxyanthraquinones et de ses sels, d'après R. Scholl. Colorants carminiques. Colorants pour cuve de la série de l'anthraquinone. Colorants végétals quinoniques et du règne animal. Hypéricine, colorant photodynamique. Chap. V. *Colorants dérivés du triphénylméthane.* Principe mériquinoïde. Colorants de la classe de fuchsine, du vert malachite et de fuchsone. Phtaléines. L'influence de nombre des groupements auxochromes sur la nuance et l'intensité de la couleur. Chap. VI. *Colorants dérivés du diphénylméthane.* Chap. VII. *Indophénols et indamines.* Chap. VIII. *Colorants oxaziniques, thiaziniques et diaziniques.* Colorants au soufre. Colorants produits par les bactéries. Chap. IX. *Colorants dérivés des bases quinoléiques et d'acridine.* Chap. X. *Colorants de la classe d'indigo.* Mélanines. Chap. XI. *Matières colorantes naturelles dérivées des pyrones et colorants oxycétoniques.* Catéchines. Matières tannantes. Chap. XII. *Colorants du bois de Brésil et du bois de campêche.* Matières colorantes du bois de santal et de la drogue „Kamala". Chap. XIII. *Anthocyanes et anthocyanidines.* Les pigments colorés de la drogue „Sanguinis draconis". Les couleurs des fleurs et des fruits. Chap. XIV. *Les colorants de la bile, du sang et des feuilles vertes* La structure fine du noyau porphinique. Pigments respirateurs (Cytochromes, Peroxydases, Catalase). L'action photochimi-

que de la chlorophyle et l'assimilation carbonique. Réaction en chaîne. Chap. XV. *Colorants puriniques* (Lépidoptérines). Murexide. Vitamine B_1. Chap. XVI. *Flavines.* Lactoflavine. L'acide lactoflavine phosphorique et le ferment jaune. L'action vitaminique des flavines et la fonction physiologique du ferment jaune. Chap. XVII. *Carotinoides.* Chap. XVIII. *Berbérine,* colorant basique naturel. Cap. XIX. *Matières colorantes à constitution inconnue.*

Index alphabétique des auteurs et des matières.

Prof. Dr. **G. COSTEANU**
Laboratoire de Chimie Physique
de l'Université de Jassy

Sommaire

du Tome II, fasc 1. (Janvier à Juin 1947)

		Pages
A. Wintner (Dr., Prof. à l'Univ. John Hopkins, Baltimore, Md.)	Arithmetically monotone sequences	3
Herman T. R. Aude (Dr., Prof. à l'Univ. Colgate, Hamilton, N. Y.)	The pattern for the distribution of the numbers c when the diophantine equation $ax + by = c$ has exactly n solutions	10
Octav Munteanu (Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy)	Applications du problème de prolongement d'un système associatif dénombrable	19
Adolf Haimovici (Chef de travaux à l'Univ. Jassy)	Sur une certaine déformation des congruences de courbure nulle	22
Stefania Ruscior (Asistant à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur une certaine correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces cerclées	26
I. Creangă (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur une famille de transformations entre deux surfaces réglées	35
Mendel Haimovici (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	Sur les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de III-e espèce nulle	46
Const. Borș (Prof. au Lycée, P. Neamț)	Sur les courbes concurrents dans la géométrie centro-affine	71
Ilie Popa (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	Sur un théorème de géométrie élémentaire	79
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Notes d'Analyse, I. Sur la définition du logarithme dans le domaine réel	81
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Recherches sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur	89
N. Negoescu (Asistant à l'Univ. Jassy)	Sur une équation de récurrence triangulaire	94
H. Hadwiger (Dr., Prof. à l'Univ, Bern)	Multikongruenz ebener Mengen und Pythagoreischer Lehrsatz	99
R. Deaux (Dr., Prof. à la Fac. Polyt. Mons)	Sur trois homographies du plan de Gauss	106
Gh. Ciobanu (Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur une certaine surface reglée liée à une surface périsphère	117

		Pages
C. P. Bogdan (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	Sur les surfaces lieu de coniques	121
Stéfan Procopiu (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	Rapport entre la chaleur moléculaire de fusion et la température absolue de fusion des métaux monoatomiques et des composés chimiques	125
C. V. Gheorghiu (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	La phototropie au point de vue de la mésomérie	141
Cesar Parteni Antoni & (Ing., Dr., Prof. a l'Ec. Polyt. Jassy) *Vasile Corlăţeanu* (Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy)	La longueur de l'entrefer dans uu moteur d'induction polyphasé	156
César Parteni Antoni & *V. Corlăţeanu &* *V. Hanganu* (Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy)	Perturbations produites par le fonctionnement d'un groupe moteur asynchrone triphasé-compresseur à piston sur l'intensité du courant absorbé au réseau	166
Stéfan Popesco (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Anomalies chez les plantes cultivées, II	174
Em. Topa (Dr., Chef de travaux à l'Univ. Cluj)	Contribution à la chorologie de Loranthus Europaeus	180
N. Popinceanu (Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur le régime intermittent des moteurs électriques	182
V. Petrescu & (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) *E. Luca*	Considérations sur le meilleur rendement d'utilisation des écrans fluorescents dans les rayons X	139
E. Luca & (Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) *Gh. Iliescu* (Ing. Chef de Travaux à l'Ec. Polyt. Jassy)	Contributions à l'étude des chutes internes de tension aux transformateurs dans le cas des radiographies instantanées à forte intensité	203
S. Oprişor (Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Influence du poids sur la traction par adhérence pour les véhicules routiers et ferroviaires	211
Lucius N. Săveanu (Dr., Ing. Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Calcul des déformations élastiques des pièces pendant les cylindrages aux tours automatiques en fonction des paramètres technologiques de l'usinage	218
H. Vasiliu (Dr., Prof. Hon. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Sur la cause de la présence de Sodium dans les eaux des Océans d'approximativement trente fois plus que le Potassium	
COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS		232
M. Piazzolla Beloch. – Lezioni di Geometria descritiva. Vol. II, Bologne (1947) (Lithographié) (Prof. Dr. Mihail Şt. Botez)		

R. Deaux. - Introduction à la géométrie des nombres complexes. A. De Boeck, Bruxelles (1947) (Prof. Dr. Al. C. Climescu)

Mauro Picone & Carlo Miranda - Esercizi di Analisi Matematica. 2-e éd. S. A. Tumminelli Editrice „Studium Urbis", Rome (1945). (Prof. Dr. Al. C. Climescu)

Mauro Picone & Paolo Tortorici. - Trattato di Matematiche Generali, I, Soc. An Tumminelli Editrice: „Studium Urbis", Rome, (1947). (Prof. Dr. Ion L. Creangă)

Mauro Picone. - Lezioni di Analisi Funzionale. Tumminelli, Rome (1946-1947) (Lithographié) (Prof. Dr. D. I. Mangeron);

Bruno Finzi. - Meccanica Razionale, I. Teorie introduttive. Cinematica, Statica & II. Dinamica. N. Zanichelli, Bologne (1946) (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Antonio Signorini. - Meccanica razionale con elementi di Statica grafica, I. Perrella. Rome. (1947) (Prof. Dr. D. I. Mangeron);

C. V. Gheorghiu - Coloranți organici (Les colorants organiques; en roumain). Collection de monographies des Sciences pures et appliquées publiée par la Revista Științifică „V. Adamachi". (Revue Scientifique „V. Adamachi"), Jassy (1947) (Prof. Dr. G. Costeanu).

F. 1812

BULETINUL
POLITEHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 2

(Fasc. 2. Juillet à Décembre 1947)

MŰEGYETEM

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1947

J/1.
1147-2

Le présent *Bulletin* se compose des articles originaux de Mathématique, Physique, Chimie, Sciences naturelles et Technique, pas encore publiés *in extenso* dans d'autres revues scientifiques.

Le Comité de Rédaction se propose de faire publier chaque année deux fascicules du *Bulletin* d'environ 160 pages chacun.

Les auteurs assument toute responsabilité en ce que regarde les articles publiés.

Les manuscrits, d'un style concis et correct, doivent être rédigés en français et dactylographiés. Le *Bulletin* publie aussi les articles des auteurs de l'étranger rédigés en anglais, en français, en espagnol, en italien et en allemand. L'ordre de leur publication correspond en principe à la classification décimale internationale. Selon les possibilités, chaque auteur reçoit gratuitement au moins 50 tirages à part. Les prix des clichés sont à la charge des auteurs.

Dès que les conditions techniques le permettront, les manuscrits pourront être rédigés dans n'importe quelle langue d'usage international courant.

COMITÉ DE RÉDACTION

Prof. Dr. Ing. Gh. Alexa
Prof. Dr. Al. Cişman
Prof. Dr. D. I. Mangeron
Prof. Ing. Dr. César Parteni
Prof Dr. Şt. Popesco

AVIZ

Toutes les communications relatives à la rédaction et à l'administration du *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy* (envoi des manuscrits, abonnements, échanges, services des numéros, etc.) doivent être adressées à M. le Prof. D. I. Mangeron, Directeur du

Séminaire Mathématique de
L'Ecole Polytechnique de Jassy,
Jassy-Iaşi
(Roumanie)

Prix de l'abonnement pour un an (2 fascicules) à partir du 1-er janvier 1947:

Etranger. Tarif international: 20 frs. suisses; le fascicule: 10 frs. suises.
Abonamentul anual: 2.000 lei, o fascicolă 1.000 lei.
Abonamentul pentru autorităţi: 5.000 lei.
Abonamentele se achită pînă la 15 Martie 1948.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9 - IAŞI
PRINTED IN ROUMANIE

BULETINUL
POLITEHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 2

(Fasc. 2. Juillet à Décembre 1947)

GÉPÉSZMÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZÖ INTÉZET • MŰEGYETEM •

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1947

Copyright by Politehnica „Gh. Asachi" din Iaşi.

Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30. 5. 1946.

Nr. Aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1. 6. 1946.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9. – IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

NÉCROLOGUE

L'école polytechnique de Jassy vient de perdre un de ses meilleurs professeurs : l'ingénieur MIHAI KONTESCHWELLER, mort subitement à la suite d'une attaque de congestion cérébrale. Bien connu des spécialistes et du grand public en Roumanie, il s'est illustré comme un de nos meilleurs techniciens. Né à Craiova, en 1897, il fit ses études en Grande Bretagne, à Bristol et à Londres.

Rentré dans le pays sitôt après, il entra au service du Ministère de la guerre pour organiser de toutes pièces l'arsénal radiotechnique de l'armée, qu'il a conduit jusqu'à sa mort. Auteur de plusieurs brevets en exploitation, il a écrit aussi plusieurs livres et publié de nombreuses brochures, dont la plupart ont été prémiés par l'académie roumaine.

Devenu professeur de radiotechnique à l'école polytechnique de Jassy, en 1945, il sut gagner très vite l'estime de ses collègues et l'attachement de ses élèves, qui ont donné son nom à une promotion d'ingénieurs de l'école.

La rédaction de ce Bulletin exprime ses sincères condoléances pour la famille du défunt et pour ses collègues.

Buletinul Politehnicii „Gh. Asachi" din Iaşi
Bulletin de l'École Polytechnique de Jassy
Tome II. Fasc. 2. (Juillet à Décembre 1947)

512

ETUDE DES COEFFICIENTS DU BINOME, MODULO LE NOMBRE PREMIER p.

par

VICTOR LALAN

On sait que les coefficients du binôme C_m^n peuvent s'obtenir comme *nombres figurés* de divers ordres : il suffit de former le tableau suivant, où chaque terme est la somme du terme placé à gauche et du terme placé au-dessus :

(I)

	0	1	2	3	4	5	. . .
0	1	1	1	1	1	1	. . .
1	1	2	3	4	5	6	. . .
2	1	3	6	10	15	21	. . .
3	1	4	10	20	35	56	. . .
4	.	.	.	.	.	.	. . .

Au croisement de la ligne marquée 3 et de la colonne marquée 5, par exemple, nous avons le terme que nous noterons Φ_3^5, et qui vaut 56 ; c'est le coefficient du binôme C_8^5. D'une façon générale, $\Phi_m^n = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} = C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$, ce qui montre la symétrie $\Phi_m^n = \Phi_n^m$ de Φ par rapport à ses 2 indices. La loi de formation concernant les Φ, à savoir $\Phi_m^n = \Phi_m^{n-1} + \Phi_{m-1}^n$, correspond, en ce qui concerne les coefficients du binôme, à la formule bien connue $C_{m+n}^n = C_{m+n-1}^{n-1} + C_{m+n-1}^n$. Si F_n^m désigne, suivant l'usage, le n-ième nombre figuré d'ordre m, on a $F_n^m = \Phi_m^{n-1}$. On notera que, dans le tableau (I), la m-ième colonne a été marquée $m-1$, de même que la n-ième ligne a été marquée $n-1$.

Nous nous proposons d'étudier les termes du tableau (I) modulo p, p étant un nombre premier quelconque, c'est-à-dire les restes de la division de Φ_m^n par p. Si $p=5$, pour fixer les idées, nous récrivons

MŰEGYETEM

le tableau en remplaçant chaque terme par son reste relativement au diviseur 5 :

(II)

	0	1	2	3	4	5	. . .
0	1	1	1	1	1	1	. . .
1	1	2	3	4	0	1	. . .
2	1	3	1	0	0	1	. . .
3	1	4	0	0	0	1	. . .
4	.	.	.	.	.	.	. . .

Ce second tableau peut d'ailleurs être formé directement, en opérant comme pour obtenir les nombres figurés, mais en traitant *0, 1, 2, 3, 4* comme les symboles des *classe résiduelles modulo 5*, avec les règles de calcul correspondant à cette interprétation. Appelant R_m^n les termes du tableau (II), nous aurons encore $R_m^n = R_m^{n-1} + R_{m-1}^n$ l'addition étant comprise modulo *5*. Il s'agit de trouver la loi permettant de calculer le plus simplement possible R_m^n à partir de *m* et *n*.

Le résultat auquel nous sommes parvenu est le suivant : *il suffit de calculer* R_m^n *pour m et n inférieurs à p.* Ceci fait, *pour m et n quelconques, on écrit ces indices dans le système de numération de base p. Soit m écrit dans ce système* $\alpha\beta\gamma\delta..\theta$, *et n,* $\alpha'\beta'\gamma'\delta'..\theta'$, *on a*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta..\theta}^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'..\theta'} = R_\alpha^{\alpha'} R_\beta^{\beta'} R_\gamma^{\gamma'} K_\delta^{\delta'} .. R_\theta^{\theta'},$$

la multiplication, à droite, étant faite modulo p. Tous les facteurs, tels que $R_\alpha^{\alpha'}$ sont supposés connus, puisque α et α' sont inférieurs à *p*.

Nous démontrerons la formule précédente par récurrence sur *m* et *n*.

D'abord, on a $R_o^n = 1$, quel que soit *n*, c'est-à-dire $R_{ooo}^{\alpha\beta\gamma} = 1$, et c'est bien égal à $R_o^\alpha R_o^\beta R_o^\gamma$, puisque chacun de ces facteurs vaut *1* : la loi est donc vraie pour $m = 0$, quel que soit *n*. On voit de même qu'elle est vraie pour $n = 0$, quel que soit *m*. Supposons la vraie pour $m = 0,1,2,...\mu$, quel que soit *n*, et pour $n = 0,1,2,... \nu$, quel que soit *m*. Nous montrerons, en nous servant de la formule $R_{\mu+1}^{\nu+1} = R_{\mu+1}^{\nu} + R_\mu^{\nu+1}$, qu'elle est vraie pour $m = \mu + 1$, $n = \nu + 1$. De là, on déduira facilement, toujours par l'emploi de la même formule, qu'elle est

vraie pour $m = \mu + 1$, quel que soit n, et enfin, pour m et n quelconques.

Dans la formule $R_{\mu+1}^{\nu+1} = R_{\mu+1}^{\nu} + R_{\mu}^{\nu+1}$, la loi doit être considérée comme vraie pour $R_{\mu+1}^{\nu}$, puisque n n'est pas supérieur à ν, et pour $R_{\mu}^{\nu+1}$, puisque m n'est pas supérieur à μ. Trois cas sont à envisager : 1^0 les derniers chiffres de μ et ν ne sont pas $p-1$; 2^0 l'un des indices μ, ν, a pour dernier chiffre $p-1$, et l'on peut toujours supposer que c'est μ, à cause de la symétrie $R_{\mu}^{\nu} = R_{\nu}^{\mu}$; 3^0 les derniers chiffres de μ et ν sont $p-1$.

1er cas. Supposons $\mu = \alpha\beta\gamma\ldots\theta$, $\nu = \alpha'\beta'\gamma'\ldots\theta'$, θ et θ' inférieurs à $p-1$. On aura $R_{\mu+1}^{\nu} = R_{\alpha\beta\gamma\ldots\theta+1}^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\theta'}$, et cela vaut, par hypothèse, $R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} R_{\gamma}^{\gamma'} \ldots R_{\theta+1}^{\theta'}$; et en outre, $R_{\mu}^{\nu+1} = R_{\alpha\beta\gamma\ldots\theta}^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\theta'+1}$, qui vaut, toujours par hypothèse, $R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} R_{\gamma}^{\gamma'} \ldots R_{\theta}^{\theta'+1}$. La formule de récurrence $R_{\mu+1}^{\nu+1} = R_{\mu+1}^{\nu} + R_{\mu}^{\nu+1}$ donne donc

$$R_{\mu+1}^{\nu+1} = R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} R_{\gamma}^{\gamma'} \ldots (R_{\theta+1}^{\theta'} + R_{\theta}^{\theta'+1}) = R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} R_{\gamma}^{\gamma'} \ldots R_{\theta+1}^{\theta'+1},$$

en vertu de la même formule. Or $\mu + 1$ s'écrit $\alpha\beta\gamma\ldots(\theta+1)$ et $\nu+1$: $\alpha'\beta'\gamma'\ldots(\theta'+1)$. D'où

$$R_{\mu+1}^{\nu+1} = R_{\alpha\beta\gamma\ldots\theta+1}^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\theta'+1} = R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} R_{\gamma}^{\gamma'} \ldots R_{\theta+1}^{\theta'+1}$$

ce qui prouve que la loi énoncée est exacte pour $m = \mu + 1$, $n = \nu + 1$.

2ème cas. Supposons que μ se termine par le chiffre $p-1$, que nous écrirons π pour simplifier ; afin d'envisager le cas général, supposons même que μ se termine par plusieurs π, trois pour fixer les idées : $\mu = \alpha\beta\ldots\theta\pi\pi\pi$, $\nu = \alpha'\beta'\ldots\theta'\varrho'\sigma'\tau'$, θ et τ' inférieurs à $p-1$, alors $R_{\mu+1}^{\nu} = R_{\alpha\beta\ldots(\theta+1)\,0\,0\,0}^{\alpha'\beta'\ldots\theta'\varrho'\sigma'\tau'} = R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} \ldots R_{\theta+1}^{\theta'} R_{0}^{\varrho'} R_{0}^{\sigma'} R_{0}^{\tau'}$ par hypothèse ; mais cela s'écrit plus simplement : $R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} \ldots R_{\theta+1}^{\theta'}$, car les 3 derniers facteurs valent 1. En outre, $R_{\mu}^{\nu+1} = R_{\alpha\beta\ldots\theta\pi\pi\pi}^{\alpha'\beta'\ldots\theta'\varrho'\sigma'(\tau'+1)} = R_{\alpha}^{\alpha'} R_{\beta}^{\beta'} \ldots R_{\theta}^{\theta'} R_{\pi}^{\varrho'} R_{\pi}^{\sigma'} R_{\pi}^{\tau'+1}$, par hypothèse. Mais le dernier facteur, $R_{\pi}^{\tau'+1}$, est nul. En effet $\Phi_{\pi}^{\tau'+1} = \dfrac{(\pi+\tau'+1)!}{\pi!\,(\tau'+1)!}$, ou encore, $\Phi_{\pi}^{\tau'+1} = \dfrac{(p+\tau')!}{(p-1)!\,(\tau'+1)!} = \dfrac{p(p+1)\ldots(p+\tau')}{(\tau'+1)!}$.

C'est un nombre entier, et puisque p est premier, $(\tau'+1)!$ divise $(p+1)(p+2)...(p+\tau')$, donc $\Phi_\pi^{\tau'+1}$ est multiple de p, donc $R_\pi^{\tau'+1}=0$. La formule de récurrence donne donc simplement

$$R_{\mu+1}^{\nu+1}=R_{\mu+1}^{\nu}=R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\theta+1}^{\theta'}.$$

Mais $\mu+1=\alpha\beta\gamma...(\theta+1)\,0\,0\,0$, $\nu+1=\alpha'\beta'...\theta'\varrho'\sigma'(\tau'+1)$, donc

$R_{\alpha\,\beta\,...\,(\theta+1)\,0\,0\,0}^{\alpha'\beta'...\,\theta'\varrho'\sigma'(\tau'+1)}=R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\theta+1}^{\theta'}$, qui s'écrit aussi :

$R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\theta+1}^{\theta'}R_0^{\varrho'}R_0^{\sigma'}R_0^{\tau'+1}$, puisque $R_0^n=1$, quel que soit n. La loi est donc encore vraie dans ce second cas.

3ième cas. μ et ν se terminent tous les deux par $p-1=\pi$. Il faut distinguer suivant qu'ils se terminent par le même nombre de chiffres π, ou non.

A. Soit le même nombre de π, deux pour fixer les idées : $\mu=\alpha\beta...\varrho\pi\pi$, $\nu=\alpha'\beta'...\varrho'\pi\pi$, ϱ et ϱ' étant inférieurs à π.

On aura, $R_{\mu+1}^{\nu}=R_{\alpha\beta...(\varrho+1)\,0\,0}^{\alpha'\beta'...\,\varrho'\pi\pi}$, ce qui, par hypothèse vaut

$R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\varrho+1}^{\varrho'}$, en supprimant 2 facteurs égaux à 1. En outre,

$R_\mu^{\nu+1}=R_{\alpha\beta...\;\varrho\;\;\pi\pi}^{\alpha'\beta'...\,(\varrho'+1)\,0\,0}$, qui, par hypothèse, vaut $R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_\varrho^{\varrho'+1}$, en supprimant pareillement 2 facteurs égaux à 1. En vertu de la formule de récurrence,

$$R_{\mu+1}^{\nu+1}=R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...\left(R_{\varrho+1}^{\varrho'}+R_\varrho^{\varrho'+1}\right)=R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\varrho+1}^{\varrho'+1}.$$

Or $\mu+1=\alpha\beta...(\varrho+1)\,0\,0$ et $\nu+1=\alpha'\beta'...(\varrho'+1)\,0\,0$. Donc, par comparaison,

$R_{\alpha\,\beta\,...(\varrho+1)\,0\,0}^{\alpha'\beta'...(\varrho'+1)\,0\,0}=R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\varrho+1}^{\varrho'+1}$, ou, si l'on veut, $=R_\alpha^{\alpha'}R_\beta^{\beta'}...R_{\varrho+1}^{\varrho'+1}R_0^0R_0^0$

puisque $R_0^0=1$; la loi est donc exacte encore dans ce cas.

B. Le nombre des π finaux est différent dans μ et dans ν ; par exemple, $\mu=\alpha...\varrho\pi\pi\pi$, $\nu=\alpha'...\varrho'\sigma'\pi\pi$.

Alors, $R_{\mu+1}^{\nu}=R_{\alpha\,...(\varrho+1)\,0\,0\,0}^{\alpha'...\,\varrho'\sigma'\pi\pi}$, c'est-à-dire, par hypothèse

$R_\alpha^{\alpha'}...R_{\varrho+1}^{\varrho'}$, en supprimant 3 facteurs égaux à 1. Par ailleurs,

$R_\mu^{\nu+1}=R_{\alpha\,...\varrho\;\pi\,\pi\,\pi}^{\alpha'...\,\varrho'(\sigma'+1)\,0\,0}$, c'est-à-dire, toujours par hypothèse,

$R_{\mu}^{\nu+1} = R_{\alpha}^{\alpha'} \ldots R_{\varrho}^{\varrho'} R_{\pi}^{\sigma'+1}$, les facteurs supprimés valant *1*. Mais, comme on l'a vu au 2-ième cas, $R_{\pi}^{\sigma'+1} = 0$, donc $R_{\mu}^{\nu+1} = 0$, et la formule de récurrence donne simplement

$$R_{\mu+1}^{\nu+1} = R_{\mu+1}^{\nu} = R_{\alpha}^{\alpha'} \ldots R_{\varrho+1}^{\varrho'} .$$

Or $\mu+1 = \alpha \ldots (\varrho+1)\,000$ et $\nu+1 = \alpha' \ldots \varrho'(\sigma'+1)\,00$; donc, en rapprochant les 2 expressions de $R_{\mu+1}^{\nu+1}$:

$R_{\alpha \ldots (\varrho+1)\,000}^{\alpha' \ldots \varrho'(\sigma'+1)\,00} = R_{\alpha}^{\alpha'} \ldots R_{\varrho+1}^{\varrho'}$ ou, si l'on veut, $R_{\alpha}^{\alpha'} \ldots R_{\varrho+1}^{\varrho'} R_{0}^{\sigma'+1} R_{0}^{0} R_{0}^{0}$,

puisque les 3 derniers facteurs valent *1* ; la loi est donc exacte aussi dans ce dernier cas. Notre proposition est donc établie dans toute sa généralité. Nous en tirons des conséquences, en ce qui concerne la périodicité de R_m^n, et en ce qui concerne la construction du tableau (II).

Périodicité de R_m^n. Si l'indice inférieur m est au plus égal à $p-1$, R_m^n, considéré comme fonction de n, admet la période p. En effet, dans le système de numération de base p, m n'a alors qu'un chiffre, et l'on a, par exemple, $n = \alpha\beta\gamma\delta$, d'où

$$R_{m}^{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{0}^{\alpha} R_{0}^{\beta} R_{0}^{\gamma} R_{m}^{\delta} .$$

La valeur de R_m^n ne dépend donc que du dernier chiffre de n, et ce chiffre n'est pas changé quand on ajoute p, qui s'écrit, pour le moment, 10. Pour la même raison, si $n < p$, R_m^n est une fonction périodique de m, de période p.

Si m est inférieur à p^2, qui s'écrit 100, R_m^n, en tant que fonction de n, admet la période p^2. En effet, m n'a que 2 chiffres au plus ; soit $m = \varrho\sigma$, $n = \alpha\beta\gamma\delta$; on aura

$$R_{\varrho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{0}^{\alpha} R_{0}^{\beta} R_{\varrho}^{\gamma} R_{\sigma}^{\delta} = R_{\varrho}^{\gamma} R_{\sigma}^{\delta} = R_{\varrho\sigma}^{\gamma\delta} .$$

La valeur de R_m^n ne dépend que des 2 derniers chiffres de n, et ces 2 derniers chiffres ne sont pas altérés par l'addition de $p^2 = 100$. D'une façon générale, si m s'écrit avec k chiffres au plus, c'est-à-dire est inférieur à p^k, R_m^n en tant que fonction de n, admet la période p^k, et il en est de même de R_m^n en tant que fonction de m, si n est inférieur à p^k.

MŰEGYETEM

Construction du tableau (II). Nous supposons $p=3$, pour faciliter les explications. Les lignes et les colonnes sont numérotées dans le système de numération de base 3.

	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	. . . . .
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	
10	1	1	1	2	2	2	0	0	0				
11	1	2	0	2	1	0	0	0	0				
12	1	0	0	2	0	0	0	0	0				
20	1	1	1	0	0	0	0	0	0				
21	1	2	0	0	0	0	0	0	0				
22	1	0	0	0	0	0	0	0	0				
100	1	1	1										
101	1	2	0										
102	1	0	0										
.													
.													
.													
.													
.													

On construira d'abord le carré de 9 termes en haut à gauche. Pour cela, on calculera R_m^n pour m et n inférieurs à $10(=3)$; mais on a déjà remarqué, dans l'étude du 2-ième cas, que $R_m^n = 0$ si, m et n n'ayant qu'un chiffre, on a $m+n \geqslant 3$. Donc dans ce carré, que nous appellerons carré du premier ordre, il ne figure que des zéros au-dessous de la diagonale non principale. En outre, il y a symétrie par rapport à la diagonale principale.

Ce premier carré une fois construit, on le répète indéfiniment vers la droite et vers le bas ; cela exprime que R_m^n admet la période 3 par rapport à n quand m n'a qu'un chiffre et par rapport à m quand n n'a qu'un chiffre.

Passons maintenant au carré du second ordre, qui contient 81 termes, c'est-à-dire 9 carrés du premier ordre ; m et n ont alors 2 chiffres au plus. On connaît déjà les 3 carrés du premier ordre qui

forment la bande supérieure, et aussi les carrés qui forment la bande verticale de gauche. Soit à former le carré du premier ordre placé au centre du carré du second ordre. Ses termes sont de la forme $R_{1\alpha}^{1\alpha'}$, et valent $R_1^1 R_\alpha^{\alpha'}$. Chaque terme de ce carré s'obtient donc en multipliant par $R_1^1 (= 2)$ le terme $R_\alpha^{\alpha'}$ du premier carré qui est semblablement placé dans le premier carré ; le multiplicateur R_1^1 est le terme qui est placé dans le premier carré comme le carré qui nous occupe est placé dans le carré du second ordre, c'est-à-dire, au centre. La loi est générale. Ainsi, le 3-ième carré de la seconde bande horizontale, formé de termes $R_{1\alpha}^{2\alpha'} = R_1^2 R_\alpha^{\alpha'}$ se déduit du premier carré en haut à gauche en multipliant par R_1^2 le terme $R_\alpha^{\alpha'}$ placé dans le premier carré comme l'est $R_{1\alpha}^{2\alpha'}$ dans le carré étudié, et le multiplicateur R_1^2, c'est le terme placé dans le premier carré comme le carré que nous étudions est placé dans le carré du second ordre. Ici, $R_1^2 = 0$, donc tous les termes du 3-ième carré de la seconde bande seront nuls.

Une fois construit le carré du second ordre, on le répètera indéfiniment vers la droite et vers le bas, pour tenir compte de la période $9 (= 100)$. Le carré du 3 ordre, qui n'est pas figuré, contient 9 carrés du second ordre ; chacun de ces 9 carrés est *semblable* au carré du second ordre que nous avons construit, le coefficient de similitude étant égal au terme du premier carré du premier ordre qui est placé dans ce premier carré comme le carré du second ordre que l'on étudie est placé dans le carré du troisième ordre. Le même processus se répète indéfiniment ; il ne fait que traduire la formule fondamentale

$$R_{\alpha\beta\gamma\ldots\theta}^{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\theta'} = R_\alpha^{\alpha'} R_\beta^{\beta'} R_\gamma^{\gamma'} \ldots R_\theta^{\theta'} \pmod{p}.$$

23 bis Avenue de Clamart
Issy-les-Moulineaux
(Seine)

(Reçu le 27 Avril 1947).

HELICES IN A FLAT SPACE OF FOUR DIMENSIONS

par

S. J. JASPAR

Let x_i be rectangular cartesian coordinates in a flat space of N-dimensions and positive definite metric form $ds^2 = d_i\, dx_i$, where the summation convention is used. A curve C is defined by the equations $x_i = x_i(s)$ where the parameter s measures the arc length from some point. For this curve we can develop the Frenet formulae in generalized form

(1) as $D\lambda_{(\alpha)i} = K_{\alpha+1}\lambda_{(\alpha+1)i} - K_\alpha \lambda_{(\alpha-1)i}$, $K_0 = K_N = 0$, $(\alpha = 0, 1, \ldots N-1)$, $D = {}^{d}/_{ds}$ and $\lambda_{(\alpha)i}$ are unit vectors.

For a curve in a four dimensional flat space the Frenet formulae are written

$$
\begin{aligned}
D\lambda_{(0)i} &= K_1 \lambda_{(1)i} \\
D\lambda_{(1)i} &= K_2 \lambda_{(2)i} - K_1 \lambda_{(0)i} \\
D\lambda_{(2)i} &= K_3 \lambda_{(3)i} - K_2 \lambda_{(1)i} \\
D\lambda_{(3)i} &= \qquad\quad - K_3 \lambda_{(2)i}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

We shall define a helix in this four dimensional flat space as the curve having three constant positive non-zero curvatures K_1, K_2, K_3.

By differentiation and substitution $\lambda_{(1)i}$, $\lambda_{(2)i}$ and $\lambda_{(3)i}$ are eliminated from (2) so that finally

$$D^4 \lambda_{(0)i} + K D^2 \lambda_{(0)i} + K^2{}_1 K^2{}_3 \lambda_{(0)i} = 0, \quad K = K^2{}_1 + K^2{}_2 + K^2{}_3 . \tag{3}$$

The complete solution of (3) is

$$\lambda_{(0)i} = C_i \cos M_s - D_i \sin M_s + E_i \cos N_s - F_i \sin N_s \tag{4}$$

where C_i, D_i, E_i, and F_i are constant vectors; and M and N are defined by

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \tfrac{1}{2}\left(K - \sqrt{K^2 - 4K^2{}_1 K^2{}_3}\right), \quad M > 0 \\
N^2 &= \tfrac{1}{2}\left(K + \sqrt{K^2 - 4K^2{}_1 K^2{}_3}\right), \quad N > 0 .
\end{aligned} \tag{5}
$$

We shall now show that the vectors C_i, D_i, E_i, and F_i, are not completely arbitrary. Since $\lambda_{(o)\,i}$ is a unit vector we obtain

$$(6)\qquad 1 = [C_i \cos M_s - D_i \sin M_s + E_i \cos N_s - F_i \sin N_s] \times \\ \times [C_i \cos M_s - D_i \sin M_s + E_i \cos N_s - F_i \sin N_s] .$$

Expanding and simplifying we obtain

$$(7)\qquad H_0 + H_1 \cos 2M_s + H_2 \sin 2M_s + H_3 \cos 2N_s + H_4 \sin 2N_s + \\ + H_5 \cos (M+N)_s + H_6 \sin (M+N)_s + H_7 \cos (M-N)_s + \\ + H_8 \sin (M-N)_s = 0,$$

where

$$(8)\qquad H_0 = \tfrac{1}{2}(C^2 + D^2 + E^2 + F^2 - 2) \qquad H_4 = -E_i F_i$$
$$H_1 = \tfrac{1}{2}(C^2 - D^2) \qquad H_5 = C_i E_i - D_i F_i$$
$$H_2 = -C_i D_i \qquad H_6 = -(C_i F_i + D_i E_i)$$
$$H_3 = \tfrac{1}{2}(E^2 - F^2) \qquad H_7 = C_i E_i + D_i F_i$$
$$H_8 = C_i F_i - D_i E_i$$

and $C_i C_i = C^2$ etc. Equation (7) is, of course, an identity for all values of the arc length s.

We shall evaluate the H's by considering the case of M/N irrational simultaneously. In (5) it is noted that M is less than N for all K'_s. We shall let p be any positive number and define

$$(9)\qquad \theta = s/p .$$

From (7) we have

$$(10)\qquad H_0 + H_1 \cos 2Mp\theta + H_2 \sin 2Mp\theta + H_3 \cos 2Np\theta + \\ + H_4 \sin 2Np\theta + H_5 \cos (M+N)p\theta + H_6 \sin (M+N)p\theta + \\ + H_7 \cos (M-N)p\theta + H_8 \sin (M-N)p\theta = 0.$$

We multiply the above equation across by $d\theta$ and integrate over the range 0 to 2π. Letting $p \longrightarrow \infty$ we find

$$(11)\qquad H_0 = 0.$$

Multiplyng (10) across by the coefficient of the particular H being sought; then expressing the result as the sum and difference of sines and cosines we multiply across by $d\theta$ and integrate over the range 0 o 2π. Letting $p \longrightarrow \infty$ we obtain

$$(12)\qquad H_0 = H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = H_6 = H_7 = H_8 = 0.$$

Investigating the magnitude and orthogonality relationships among the vectors in (8) we obtain by using (12)

$$(13)\quad \begin{array}{llll} C^2 = D^2 & C_i\, D_i = 0 & D_i\, E_i = 0 & E_i\, F_i = 0. \\ C^2 + E^2 = 1 & C_i\, E_i = 0 & D_i\, F_i = 0 & \\ D^2 + F^2 = 1 & C_i\, F_i = 0 & & \end{array}$$

Thus the vectors C_i, D_i, E_i, and F_i, are mutually perpendicular. They *are not unit* vectors.

To represent the helix in simplified form we choose the coordinate axes along the vectors so that

$$(14)\quad \begin{array}{llll} C_1 = 0, & D_1 = C, & E_1 = 0, & F_1 = 0, \\ C_2 = C, & D_2 = 0, & E_2 = 0, & F_2 = 0, \\ C_3 = 0, & D_3 = 0, & E_3 = 0, & F_3 = E, \\ C_4 = 0, & D_4 = 0, & E_4 = E, & F_4 = 0. \end{array}$$

For this choice of coordinate axes the components of the unit angent vector $\lambda_{(0)i}$ become by (4)

$$(15)\quad \begin{aligned} \lambda_{(0)1} &= -\, C \sin M_s\,, \\ \lambda_{(0)2} &= \quad C \cos M_s\,, \\ \lambda_{(0)3} &= -\, E \sin N_s\,, \\ \lambda_{(0)4} &= \quad E \cos N_s\,. \end{aligned}$$

Integration of the above yields the equation of the four dimensional helix in parametric form as

$$(16)\quad \begin{array}{llll} x_1 = ({}^{C}/_{M}) \cos M_s & , & x_3 = ({}^{E}/_{N}) \cos N_s \\ x_2 = ({}^{C}/_{M}) \sin M_s & , & x_4 = ({}^{E}/_{N}) \sin N_s\,. \end{array}$$

The constants of integration have been removed by a translation of axes.

There is an interesting distinction between the case where M/N is rational and the case where M/N is irrational. If M/N is rational the helix is a closed curve. If M/N is irrational the helix is not closed.

From (16) by simple algebra we obtain

$$(17)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ({}^{C}/_{M})^2 + ({}^{E}/_{N})^2$$

and note that this is the equation of a hypersphere with center at the origin.

By differentiating (16) twice and using the fact that $D\lambda_{(0)i}\, D\lambda_{(0)i} = K_1^2$ from the Frenet formulas as well as (5) we find

$$(18)\quad C^2 = \frac{-\, K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}{2\,(K^2 - 4K_1^2\, K_3^2)^{1/2}} + \frac{1}{2},\quad C > 0\,,$$

$$E^2 = \frac{K_1^2 - K_2^2 - K_3^2}{2(K^2 - 4K_1^2 K_3^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}, \quad E > 0.$$

We now have the constants C and E as well as M and N expressed in terms of the curvatures.

In (16) we square and add the first two equations, then square and add the last two equations to get

$$(19) \qquad x_1^2 + x_2^2 = (C/M)^2, \qquad x_3^2 + x_4^2 = (E/N)^2.$$

It is noted that the projection of the helix on the $x_1 x_2$ plane is a circle of radius C/M, hereafter called R_{12}. Similarly the projection of the helix on the $x_3 x_4$ plane is a circle of radius E/N, hereafter called R_{34}. Also we shall define

$$(20) \qquad R_{12} = C/M \quad , \quad R_{34} = E/N.$$

Let us consider two points moving on the circumference of R_{12} and R_{34} according to (16). These points start together for $s = 0$. The values of the angular velocities for R_{12} an R_{34} with respect to s are M and N respectively. The ratio M/N of the angular velocities will hereafter be refered to as the pitch ratio. It is evident that a helix is completely represented (to within a translation) by the two representative moving points.

The following table shows a summary of the results of the various cases considered. The radii as well as the angular velocities on the representative circles are given, and in addition the pitch ratio. The table is read lengthwise, the type of helix being considered stated in the left hand column.

From the table we observe that R_{12} and R_{34} may be equal. If we equate C/M to E/N and simplify we find

$$(21) \qquad K_1^2 = (K_2^2 + K_3^2)^2 (K_3^2 - K_2^2)^{-1}$$

which must be satisfied for the circles to have equal radii. It is interesting to give a geometrical interpretation to this relationship. Let us introduce the auxiliary variables x, y, and z as follows. In (21) let us substitute

$$(22) \quad K_1^2 = y + z, \quad K_2^2 = x/\sqrt{2} + y - z, \quad K_2^2 = x/\sqrt{2} - y + z.$$

After simplification we have the result

$$(23) \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

which is the equation of a cone.

Using (22) we express M, N, C, and E, in the terms of x, y,

TABLE SHOWING VALUES AND LIMITING VALUES OF RADII, ANGULAR VELOCITIES AND PITCH RATIO FOR REPRESENTATIVE CIRCLES

Case	Radii of representative circles $R_{12} = C/M$	$R_{34} = E/N$	Angular velocities M	N	Pitch ratio M/N
General	Eq. (5) Eq. (18)	Eq. (5) Eq. (18)	Eq. (5)	Eq. (5)	Eq. (5)
$K_1 = K_2 = K_3$	$K_1^{-1}\left[(5+2\sqrt{5})/5\right]^{1/2}$	$K_1^{-1}\left[(5-2\sqrt{5})/5\right]^{1/2}$	$K_1\left[\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\right]^{1/2}$	$K_1\left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right]^{1/2}$	$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$
$K^2_1 = \frac{(K^2_2+K^2_3)^2}{(K^2_3-K^2_2)}$	$\left[\frac{K^2_3-K^2_2}{2K^2_3(K^2_2+K^2_3)}\right]^{1/2}$	$R_{12}=R_{34}$	$\left[\frac{K_3(K^2_2+K^2_3)}{K_2+K_1}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{K_3(K^2_2+K^2_3)}{K_3-K_2}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{K_3-K_2}{K_3+K_2}\right]^{1/2}$
$K_1 \rightarrow 0$	∞	0	0	$(K^2_2+K^2_3)^{1/2}$	0
$K_2 \rightarrow 0,\ K_1 > K_3$	0	K_1^{-1}	K_3	K_1	K_3/K_1
$K_2 \rightarrow 0,\ K_1 = K_3$	$(\sqrt{2}K_1)^{-1}$	$(\sqrt{2}K_1)^{-1}$	K_1	K_1	1
$K_2 \rightarrow 0,\ K_1 < K_3$	K_1^{-1}	0	K_1	K_3	K_1/K_3
$K_3 \rightarrow 0$	∞	$K_1(K^2_1+K^2_2)^{-1}$	0	$(K^2_1+K^2_2)^{1/2}$	0

and z. With these results we investigate the ratios C/M and E/N to find

$$(24) \qquad {}^{C}/_{M} = (\sqrt{2}\,x + y + z)^{-1/2} = (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{-1/2}$$

$${}^{E}/_{N} = (\sqrt{2}\,x + y + z)^{-1/2} = (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{-1/2}.$$

These ratios are of course equal, each being the common value of the radii $R_{12} = R_{34}$.

For a section of the cone $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ with $z =$ constant we have using (22) the following result. Any point bounded by the circumference of the circle and the line $x/\sqrt{2} + y - z = 0$ gives $R_{12} > R_{34}$. Any point bounded by the circumference of the circle and the lines $y + z = 0$, $x/\sqrt{2} + y - z = 0$ and $x/\sqrt{2} - y + z = 0$ gives $R_{12} < R_{34}$. Any point on the circumference of the circle and bounded by the lines $x/\sqrt{2} + y - z = 0$ and $x/\sqrt{2} - y + z = 0$ gives $R_{12} = R_{34}$.

Department of Mathematics and Astronomy of the University of Kentucky, U. S. A.

(Reçu le 7 Juin 1947)

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1948 BUDAPEST

MÉRNÖKI TOVÁBBK... INTÉZET MŰEGYETEM

2

SUR QUELQUES SURFACES EN RELATION AVEC LES CONGRUENCES DE WAELSH

par

F. MARCUS

Dans un des chapitres du premier tome de la „Geometria proiettiva differenziale" par G. Fubini et E. Čech [1]) on détermine la condition de l'existence sur une surface de l'espace projectif E_3 d'un système de lignes conjuguées, à invariants de Darboux égaux, de l'équation correspondante ponctuelle ou tangentielle de Laplace. En indiquant par (1) $B^2\,du^2 - A^2\,dv^2 = 0$ un système de lignes conjuguées, et par h, k, H, K, respectivement les invariants pour les équations de Laplace, relatives aux coordonnées du point ou de plan tangent de la surface, on considère aussi le cas suivant:

Les invariants de l'équation de Laplace sont égaux. C'est-à-dire $h = k$. Dans ce cas il résulte

$$\frac{\partial^2 \log B^2 : A^2}{\partial u\,\partial v} - \left(\beta\frac{A^2}{B^2}\right)_u + \left(\gamma\frac{B^2}{A^2}\right)_v = 0. \tag{2}$$

Si le système est isotherme conjugué alors on pourra rendre (3) $\beta_u = \gamma_v$ et nous aurons les surfaces de Ionas.[2]) Une interprétation géométrique de ce dernier cas, d'après ce que nous connaissons, n'est pas encore connue. Bien que nous étudions dans cette note seulement quelques cas particuliers, toutefois on peut déduire que ce cas est étroitement lié à la théorie des congruences de Waelsh. C'est le but de cette note.

Soit S une surface décrite par un point x de coordonnées x, y, z, t, fonctions de u, v, qui sont les paramètres asymptotiques de la surface, avec l'élément linéaire de Fubini

$$\frac{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3}{2\,du\,dv},\quad \beta\gamma \neq 0.$$

Considérons les congruences décrites par les tangentes au système de lignes conjuguées, (1). La surface est donc la première nappe focale de

ces congruences. On sait d'après Fubini[3]) que les secondes nappes focales de ces congruences sont décrites par les points

$$x_1 = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v)$$
$$x_2 = \bar{\mu} x + 2(Ax_u - Bx_v) \tag{4}$$

les analogues pour $y_1, z_1, t_1, y_2, z_2, t_2$)

$$\mu = -(A_u + A\theta_u + B_v + B\theta_v) + A\frac{B_u + A\beta}{B} + B\frac{A_v + B\gamma}{A} \tag{5}$$

et $\bar{\mu}$ s'obtient de μ par le changement de B en $-B$, x, y, z, t, étant es solutions du système canonique de Fubini

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \qquad (\theta = \log \beta\gamma).$$
$$x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x \tag{6}$$

Une congruence de droites est de Waelsh[4]) si aux asymptotiques d'une nappe focale correspondent sur l'autre un système de lignes conjuguées.

Afin que les tangentes aux lignes (1) soient de Waelsh, il est nécessaire et suffisant de pouvoir déterminer six fonctions a, b, c, d, e, f, de u, v, telles que

$$x_{1uv} + ax_{1u} + bx_{1v} + cx_1 = 0$$
$$x_{2uv} + dx_{2u} + ex_{2v} + fx_2 = 0$$

où d, e, f, se déduisent de a, b, c, en changeant B en $-B$.

En dérivant (4) et en tenant compte que les points x, x_u, x_v, x_{uv}, sont linéairement indépendents, il résulte comme le prouve le calcul, qu'on pourra déterminer les six fonctions si $\Delta = \Delta_1 = 0$ où Δ_1 se déduit de Δ en changeant B en $-B$, et

$$\Delta = \begin{vmatrix} m + 2B_v + 2B\theta_v & 2B & 2A & 0 \\ m_v + n\gamma + 2B(\gamma_v + \gamma\theta_u + p_{22} & m & 2A_v + 2B\gamma & 2A \\ n_v + n\theta_v + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) + \varrho & n & \mu + 2B_v + 2B\theta_v & 2B \\ np_{22} + 2B(p_{22u} + \gamma p_{11}) + \varrho_v & \varrho & \sigma & \mu \end{vmatrix}$$

$$m = \mu + 2A_u + 2A\theta_u \qquad n = 2B_u + 2A\beta$$
$$\varrho = \mu_u + 2Ap_{11} \qquad \sigma = \mu_v + 2Bp_{22}. \tag{5'}$$

Pour l'étude de ces conditions, il se présente plusieurs cas:

1-er cas. Les éléments de la première ligne de Δ et Δ_1 sont proportionnels, respectivement, avec les éléments de la quatrième ligne.

Il résulte donc

$$\mu = \bar{\mu} = 0 \tag{7}$$

$$(8)\qquad \frac{\sigma}{2A}=\frac{\varrho}{2B}=\frac{np_{22}+2B(p_{22u}+\gamma p_{11})+\varrho_v}{m+2B_v+2B\theta_v}$$

$$(9)\qquad \frac{\bar\sigma}{2\bar A}=\frac{\bar\varrho}{-2B}=\frac{\bar n p_{22}-2B(p_{22u}+\gamma p_{11})+\bar\varrho_v}{\bar m-2B_v-2B\theta_v}$$

où les expressions $\bar\sigma$, $\bar\varrho$, $\bar n$, $\bar m$, se déduisent de σ, ϱ, n, m, par le changement de B en $-B$.

De (7), en tenant compte de (5), il résulte

$$(10)\qquad \theta_u=\frac{\partial \log B:A}{\partial u}+\frac{B^2}{A^2}\gamma\ ;\ \theta_v=-\frac{\partial \log B:A}{\partial v}+\frac{A^2}{B^2}\beta$$

et de la condition d'intégrabilité (10) on obtient

$$\frac{\partial^2 \log B^2:A^2}{\partial u\,\partial v}+\left(\frac{B^2}{A^2}\gamma\right)_v-\left(\frac{A^2}{B^2}\beta\right)_u=0.$$

Donc, l'équation de Laplace relative au système conjugué (1) est à invariants de Darboux égaux et les tangentes aux système (1) décrivent des congruences de Waelsh.

En tenant compte que dans ce cas

$$\varrho=\bar\varrho=2Ap_{11}\qquad m=\bar m=2A_u+2A\theta_u$$

$$\sigma=-\bar\sigma=2Bp_{22}\qquad n=2B_u+2A\beta\qquad \bar n=-2B_u+2A\beta,$$

il résulte des premiers rapports de (8) et (9)

$$(11)\qquad B^2p_{22}=A^2p_{11}$$

et de l'égalité des seconds rapports

$$12)\qquad p_{22u}=p_{11v}=0.$$

De (11), en tenant compte de (12), il suit

$$\frac{\partial^2 \log B^2:A^2}{\partial u\,\partial v}=0.$$

On pourra rendre, avec un changement des paramètres des asymptotiques,

$$B^2=A^2.$$

C'est-à-dire que (1) est un réseau isotherme conjugué et de (10) il résulte $\beta_u=\gamma_v$. Donc les surfaces sont de Ionas. De (10), (11), (12) nous avons

$$\theta_u=\gamma\ ;\ \theta_v=\beta\ ,\ p_{11}=p_{22}=\text{const.}$$

$$(13)\qquad x_1=2(x_u+x_v)$$

$$x_2=2(x_u-x_v).$$

Les points x_u, x_v, x_1, x_2 forment une quaterne armonique. De la condition de l'intégrabilité complète des équations (6) il résulte à cause de (13) $\beta_u = \gamma_v$. Nous pouvons faire voir que dans ce cas les secondes nappes focales dégénèrent. On la démontre soit en observant que les coordonnées tangentielles $\zeta = (x_1, x_{1u}, x_{1v})$; $\bar{\zeta} = (x_2, x_{2u}, x_{2v})$ s'annullent, ou encore, en calculant les expressions N de la théorie des congruences W de Fubini[5]) qui s'annullent seulement dans ce cas.

En effet

$$N = \lambda\mu + 2A\left(\mu_u + 2Ap_{11} - \mu\frac{B_u + A\beta}{B}\right) - 2B\left(\mu + 2Bp_{22} - \mu\frac{A_v + B\gamma}{A}\right)$$

et en tenant compte de (7), (13) il résulte $N = 0$. On sait que dans ce cas les congruences appartienent à un complèxe linèaire, dont l'axe est la deuxième nappe focale[5]). Pour $\beta = \gamma$ il résulte $\beta = \gamma = \frac{-2}{u+v}$ et les équations de Fubini et Čech[6]) s'intégrent avec[7])

$$L = 4\left(-\frac{3}{2}(u+v)^{-2} + c_1 u^2 + c_2 u + c_3\right)$$

$$M = 4\left(-\frac{3}{2}(u+v)^{-2} + c_1 v^2 - c_2 u + c_3\right). \qquad (c_i = \text{const})$$

2-ième cas. Les éléments de la quatrième ligne de Δ et Δ_1 sont proportionnels avec ceux de la troisième. On a donc les relations

$$(14) \quad \alpha = \frac{\mu}{2B} = \frac{\sigma}{\mu + 2B_v + 2B\theta_v} = \frac{\varrho}{n} = \frac{np_{22} + 2B(p_{22u} + \gamma p_{11}) + \varrho_v}{n_v + n\theta_v + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) + \varrho}$$

et celles que l'on obtient en changeant B en $-B$.

Pour étudier ce cas, observons que la congruence ne change pas si l'on multiplie A, B, μ par un même facteur. Nous pourrons donc rendre $\alpha = 1$ et nous aurons de (14) $\mu = -\bar{\mu} = 2B$. En tenant compte de (5) il résultera

$$\theta_v = \frac{A^2}{B^2}\beta + \frac{\partial \log A:B}{\partial v} - 2 \quad ; \quad \theta_v = \frac{B^2}{A^2}\gamma + \frac{\partial \log B:A}{\partial u},$$

donc

$$\frac{\partial^2 \log B^2:A^2}{\partial u\,\partial v} + \left(\gamma\frac{B^2}{A^2}\right)_v - \left(\beta\frac{A^2}{B^2}\right)_u$$

et le système conjugué (1) est aussi dans ce cas à invariants de Darboux égaux. De $\sigma = \mu + 2B_v + 2B\theta_v$; $\bar{\sigma} = \bar{\mu} - 2B_v - 2B\theta_v$, en tenant compte de (14), il résulte $\sigma = -\bar{\sigma} = 2B + 2B\theta_v + 2B_v$. Mais de (5') et

(14) nous avons $\sigma = -\bar{\sigma} = 2B_v + 2Bp_{22}$, donc $p_{22} = 1 + \theta_v$. De $\frac{\varrho}{n} = \frac{\bar{\varrho}}{n} =$ il résulte avec (5) et (14), $2B_u + 2Ap_{11} = 2B_u + 2A\beta$, donc $p_{11} = \beta$. Pour $A = B$ il suit $\beta_u = \gamma_v$; $\theta_u = \gamma$; $\theta_v = \beta$, donc $p_{22} = p_{11} + 1$.

3-ième cas. Les éléments de la quatrième ligne de Δ et Δ_1, sont proportionnels à ceux de la deuxième. On trouve dans ce cas

$$\theta_u = \frac{\partial \log B:A}{\partial u} + \frac{B^2}{A^2}\gamma - 2 \quad ; \quad \theta_v = \frac{\partial \log A:B}{\partial v} + \frac{A^2}{B^2}\beta$$

et par consequence $\dfrac{\partial^2 \log B^2:A^2}{\partial u\,\partial v} + \left(\dfrac{B^2}{A^2}\gamma\right)_v - \left(\dfrac{A^2}{B^2}\beta\right)_u$

$$p_{22} = \gamma \qquad p_{11} = 1 + \theta_u .$$

4-ième cas. Proportionnalité entre les éléments de la deuxième ligne de Δ et de Δ_1 à ceux de la troisième. C'est-à-dire

$$\frac{A}{B} = \frac{2A_v + 2B\gamma}{\mu + 2B_v + 2B\theta_v} = \frac{m}{n} = \frac{m_v + n\gamma + 2B(\gamma_u + \gamma\theta_u + p_{22})}{n_v + n\theta_v + 2B(\beta\gamma + \theta_{uv}) + \varrho}$$

on trouve dans ce cas

$$\theta_u = \frac{\partial \log B:A}{\partial u} - \frac{B^2}{A^2}\gamma$$

$$\theta_v = \frac{\partial \log A:B}{\partial v} - \frac{A^2}{B^2}\beta ,$$

donc $$\frac{\partial^2 \log B^2:A^2}{\partial u\,\partial v} + \left(\beta\frac{A^2}{B^2}\right)_u - \left(\gamma\frac{B^2}{A^2}\right)_v = 0$$

et le système (1') $B^2\,du^2 + A^2\,dv^2 = 0$ est à invariants de Darboux égaux. Pour $A = B$ il résulte $\theta_u = -\gamma$, $\theta_v = -\beta$ et on trouve des surfaces de Ionas avec $p_{22} - p_{11} = \gamma^2 - \beta^2$.

(Réçu le 31 Décembre 1946).

Services techniques de la ville de Botoşani

Travaux cités

1. G. Fubini - E. Čech. *Geometria proiettiva diff.* Tome 1, pag. 102-109.
2. „ „ Idem pag. 106.
3. „ „ Idem pag. 243-244.
4. L. Bianchi - *Lezioni di Geometria diff.* Vol. I, parte II, pag. 490.
5. G. Fubini - E. Čech. Oeuvre citée, pag. 251 - 255.
6. „ „ Idem, pag. 93.
7. F. Marcus. *Interpretazione geometrica dell'equazione* etc. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, Vol. 27 (1938) pag. 148.

UEBER GANZE RATIONALE FUNKTIONEN EINER DUALKOMPLEXEN VERAENDERLICHEN

von

FRITZ REUTTER

In einer früheren Abhandlung [1]) wurden im Anschluss an einige Arbeiten von Herrn Haenzel [2]) eine Reihe geometrischer Theoreme über ganze rationale Funktionen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen gewonnen. Die vorliegende Arbeit dehnt jene Untersuchungen auf Funktionen einer Veränderlichen $z=x+\varepsilon y$ mit $\varepsilon^2=+1$ und $\varepsilon^2=0$ aus; wir sprechen dem in der Liniengeometrie üblichen Sprachgebrauch folgend von einer „dualkomplexen" Veränderlichen (auch im Falle $\varepsilon^2=+1$).

Im ersten Abschnitt werden die ganzen rationalen Funktionen von $z=x+\varepsilon y$ mit $\varepsilon^2=+1$ behandelt. Im Sinne der nichteuklidischen Geometrie liegt die pseudoeuklidische Ebene (zwei reelle Fundamentalpunkte, hyperbolische Winkelmessung) vor. Infolge der gegenüber der euklidischen Ebene veränderten Relativitätsverhältnisse ergeben sich einige merkwürdige neue Theoreme, insbesondere erfährt auch der Fundamentalsatz der Algebra eine neue Formulierung.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den Kovarianten der ganzen rationalen Funktion in der pseudoeuklidischen Ebene. Dabei ergibt sich u. a. für die kubische Funktion $f_3(z)$ mit der Jakobischen Kovariante $J(z)$ und die biquadratische Funktion $f_4(z)$ mit der Hesseschen Kovariante $H(z)$ je ein neuer Satz über die Verteilung der Nullstellen der Funktionenbüschel $f_3+\lambda J$, $f_4+\lambda H$ und des Wertevorrats der gebrochenen rationalen Funktionen $w=-\frac{f_3(z)}{J(z)}$ und $w=-\frac{f_4(z)}{H(z)}$.

---

1) F. Reutter: *Die Werteverteilung ganzer rationaler Funktionen.* Jahresbericht d. d. M. V. 51 (1941) S. 258–282. (Im folgenden zitiert als Abhandlung I).

2) G. Haenzel: *Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen.* Sitz. Ber. Berl. Math. Ges. 27 (1928), §. 16–19 (Abhandlung II) – Über ganze rationale Funktionen. Sitz. Ber. Berl. Math. Ges. 28 (1929), S. 31–45 (Abhandlung III).

Der letzte Abschnitt bringt eine kurze Behandlung des Falles $\varepsilon^2 = 0$. Es liegt eine Ebene mit parabolischer Winkelmessung (ein doppelt zählender Fundamentalpunkt) vor.

I. *Die ganze rationale Funktion und ihre Nullstellen im Falle* $\varepsilon^2 = +1$.

1. Bekanntlich gibt es drei Systeme allgemeiner komplexer Zahlen c mit zwei Einheiten e_0, e_1, für die das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt, nämlich

$$1)\ c = ae_0 + be_1 \quad \text{mit} \quad e_1^2 = -e_0$$
$$2)\ c = ae_0 + be_1 \quad \text{„} \quad e_1^2 = 0$$
$$3)\ c = ae_0 + be_1 \quad \text{„} \quad e_1^2 = +e_0 .$$

Die Grössen a und b dürfen zunächst beliebige reelle Zahlen sein (reelles System komplexer Grössen). Später werden bei den Systemen 2) und 3) für a und b auch gewöhnliche komplexe Zahlen zugelassen.

Das erste ist das System unserer gewöhnlichen komplexen Zahlen. Die Division durch von Null verschiedene Elemente ist unbeschränkt ausführbar, es liegt ein kommutativer Körper vor.

Das zweite System ist das der dualen Zahlen von Clifford, es findet in der Liniengeometrie („dualer Vektor") Anwendung. Es kann aus den Systemen 1) und 3) durch Grenzübergang hergeleitet werden. Im Gegensatz zum System 1) enthält es ∞^1 Zahlen $c'_\nu = b_\nu e_1$, deren reziproke Elemente c'^{-1}_ν nicht zum System gehören. Das Produkt irgendzweier Zahlen c'_μ, c'_ν verschwindet, ohne dass $c'_\mu = 0$, $c'_\nu = 0$ gilt. Die Grössen c'_ν heissen *Nullteiler*. Das System stellt einen kommutativen Ring, aber keinen Körper dar.

Das dritte System ist bisher wenig untersucht worden. Es enthält ∞^1 Nullteiler von der Form $\alpha = a e_0 + a e_1$ und ∞^1 Nullteiler von der Form $\beta = b e_0 - b e_1$, es gilt also $\alpha\beta = 0$, ohne dass $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Daher bilden die Zahlen des Systems 3) wiederum einen kommutativen Ring, aber keinen Körper. In jedem kommutativen reellen System komplexer Grössen gibt es Nullteiler, es sei denn, dass das System nur eine Einheit enthält oder mit dem der gewöhnlichen komplexen Grössen (System 1) identisch ist[3]).

Die Zahlen des Systems 3) lassen sich auch in der Form

---

3 Weierstrass in einer Vorlesung „*Über komplexe Zahlgrössen*", Berlin 1863, siehe E. Kossak, *Elemente der Arithmetik*, Berlin 1882, Friedr. Werd. Gymn. Progr.

mit
$$\gamma = p\eta_0 + q\eta_1$$
$$\eta_0 = e_0 + e_1 \qquad \eta_1 = e_0 - e_1$$

schreiben. Die Grössen $p\eta_0$ und $q\eta_1$ bilden als Systeme mit nur einer Einheit je für sich einen Körper, der zum Körper der reellen Zahlen isomorph ist. Das System 3) ist also die Summe zweier Körper [4]).

Im folgenden werden die Systeme 3) und 2) behandelt. Dabei sollen für a und b jetzt auch gewöhnliche komplexe Zahlen (System 1) zugelassen werden.

2. Wir setzen nun $\varepsilon_0 = 1$, $e_1 = \varepsilon$ mit $\varepsilon^2 = +1$. Die ∞^2 daulkomplexen Zahlen $z = x + \varepsilon y$ des Systems 3) werden umkehrbar eindeutig den ∞^2 Punkten der *pseudoeuklidischen Ebene* zugeordnet. Diese geht aus der euklidischen Ebene durch die imaginäre Kollineation

$$x_1' = x_1 \quad , \quad x_2' = i x_2 \quad , \quad x_3' = x_3$$

hervor. Daher treten an die Stelle der euklidischen konjugiert imaginären Kreispunkte $J_1 (1 : i : 0)$, $J_2 (1 : -i : 0)$ die pseudoeuklidischen Fundamentalpunkte $L_1 (1 : 1 : 0)$, $L_2 (1 : -1 : 0)$. Die euklidischen Kreise sind demnach durch die mit L_1, L_2 inzidenten gleichseitigen Hyperbeln zu ersetzen. Insbesondere werden die Nullteiler des Systems 3) auf die Punkte der Geraden $y = \pm x$ (die pseudoeuklidisch isotropen Geraden durch 0) abgebildet.

Die ganze rationale Funktion n-ten Grades von $z = x + \varepsilon y$ werde in der Form

$$(1) \qquad w = f_n(z) = a_n + \binom{n}{1} a_{n-1} z + \binom{n}{2} a_{n-2} z^2 + \ldots\ldots + a_0 z^n$$
$$= u(x,y) + \varepsilon v(x,y)$$

geschrieben, wo $a_\nu = a'_\nu + \varepsilon a''_\nu$, a'_ν, a''_ν reell.
Dabei ist noch auszuschliessen, dass *alle* a_ν einen Nullteiler als Faktor enthalten, da sonst die Gleichung $f_n(z) = 0$ unendlich viele Wurzeln besitzen kann.

Die Nullstellen der Funktion (1) lassen sich jetzt als Schnittpunkte der Kurven

$$u(x,y) = 0$$
$$v(x,y) = 0$$

bestimmen. Diese Auffassung liegt auch dem bekannten 2. Gaussschen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra zu Grunde. Solange aber $\varepsilon^2 = -1$, haben die Kurven $u = 0$, $v = 0$ gerade n (u.U.z.T zusammenfallende) Schnittpunkte. In der dualkomplexen Ebene mit $\varepsilon^2 = +1$

4) van der Waerden, *Moderne Algebra*, Berlin, 1931, 150.

ändern sich die Verhältnisse wesentlich. Man kann jetzt nur sagen, dass $u(x,y)$ und $v(x,y)$ algebraische Kurven n-ter Ordnung darstellen, die n^2 reelle verschiedene oder z.T. zusammenfallende oder paarweise konjugiert imaginäre Schnittpunkte gemeinsam haben. I.a. sind sämtliche n^2 Schnittpunkte

$$z_\nu = x_\nu + \varepsilon y_\nu \qquad (x_\nu , y_\nu$$

reell oder je paarweise komplex), $\nu = 1, 2, \ldots, n^2$, als Nullstellen der Funktion zu betrachten. Doch können diese Nullstellen für eine Produktdarstellung mit n Linearfaktoren nicht beliebig ausgewählt werden, daher schreiben wir die Produktdarstellung unter Heranziehung aller Nullstellen in der Form

$$(2) \qquad \prod_{\nu=1}^{n} (z - (x_\nu + \varepsilon y_\nu)) = [f_n(z)]^n .$$

Durch Vorgabe von je n Nullstellen sind die $n(n-1)$ übrigen bestimmt und *eine gegebene Funktion $f_n(z)$ kann jetzt auf verschiedene Arten in Linearfaktoren zerlegt werden.* Man zeigt leicht, dass die Kurven $u(x,y) = 0$, $v(x,y) = 0$ keine pseudoeuklidischen Zirkularkurven sein können; von den übrigen $n(n-1)$ Nullstellen können also keine in die Fundamentalpunkte L_1, L_2 fallen. Mehrfache Nullstellen werden so oft gezählt, wie es die Vielfachheit des zugeordneten Schnittpunktes von $u(x,y) = 0$ und $v(x,y) = 0$ angibt. Es gilt der Satz:

„Die ganze rationale Funktion n-ten Grades $w = f_n(z)$ in der pseudoeuklidischen Ebene besitzt n^2 (reelle oder konjugiert komplexe) Nullstellen $z_\nu (\nu = 1, \ldots, n^2)$. Die konjugiert komplexen Nullstellen finden in der pseudoeuklidischen Ebene keine Darstellung. Die Funktion hat die Produktdarstellung

$$(f_n(z))^n = \prod_{\nu=1}^{n^2} (z - z_\nu) .$$

Bei mehrfachen Nullstellen z_ν wird jeder Faktor $z - z_\nu$ so oft gezählt, wie er in der Produktdarstellung (3) vorkommt.

Beispiel:

a) Für die kubische Funktion

$$w = z^3 + z^2 - 2z$$

ist

$$u(x,y) = x^3 + 3xy^2 + x^2 + y^2 - 2x$$
$$v(x,y) = y^3 + 3x^2y + 2xy - 2y.$$

Die neun Schnittpunkte von $u = 0$, $v = 0$ sind:

$z_1: x=1 , y=0$
$z_2: x=-2, y=0$
$z_3: x=0 , y=0$
$z_4: x=-1, y=1$
$z_5: x=-1, y=-1$
$z_6: x=\frac{1}{2} , y=\frac{1}{2}$
$z_7: x=\frac{1}{2} , y=-\frac{1}{2}$
$z_8: x=-\frac{1}{2} , y=\frac{3}{2}$
$z_9: x=-\frac{1}{2} , y=-\frac{3}{2}.$

Dabei lässt sich $f_3(z)$ insgesamt auf vier verschiedene Arten in Linearfaktoren zerlegen:

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=(z-z_1)(z-z_4)(z-z_5)=$$
$$=(z-z_2)(z-z_6)(z-z_7)=(z-z_3)(z-z_8)(z-z_9).$$

b) Für die biquadratische Funktion

$$w=f_4(z)=z^4+2z^2-3$$

ist

$$u(x,y)=x^4+6x^2y^2+y^4+2x^2+2y^2-3$$
$$v(x,y)=4x^3y+4xy^3+4xy.$$

Die 16 Schnittpunkte dieser beiden Kurven sind:

$z_1: x=0 , y=1$
$z_2: x=0 , y=-1$
$z_3: x=0 , y=i\sqrt{3}$
$z_4: x=0 , y=-i\sqrt{3}$
$z_5: x=1 , y=0$
$z_6: x=-1 , y=0$
$z_7: x=i\sqrt{3} , y=0$
$z_8: x=-i\sqrt{3} , y=0$
$z_9: x=1 , y=\sqrt{2}\,i$
$z_{10}: x=1 , y=-\sqrt{2}\,i$
$z_{11}: x=-1 , y=\sqrt{2}\,i$
$z_{12}: x=-1 , y=-\sqrt{2}\,i$
$z_{13}: x=\sqrt{2}\,i , y=1$
$z_{14}: x=\sqrt{2}\,i , y=-1$
$z_{15}: x=-\sqrt{2}\,i, y=1$
$z_{16}: x=-\sqrt{2}\,i, y=-1.$

$f_4(z)$ kann auf folgende 4 Arten in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$f_4(z)=(z-z_{4s+1})(z-z_{4s+2})(z-z_{4s+3})(z-z_{4s+4})$$
$$s=1, 2, 3, 0.$$

Für a) und b) gilt ausserdem Gleichung (2).

3. In der komplexen Ebene galt der Satz:

Das vollständige Nullstellenpolygon einer ganzen rationalen Function n-ten Grades wird in seinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Seitenmitten von einer algebraischen Kurve $(n-1)$-ter Klasse berührt, die die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion zu (reellen) Brennpunkten hat [4]).

4) Abhandlung II, S. 18.

Unter den pseudoeuklidischen Brennpunkten einer algebraischen Kurve n-ter Klasse verstehen wir die n^2 (reellen oder konjugiert imaginären) Schnittpunkte der von den Fundamentalpunkten $L_1(1:1:0)$, $L_2(1:-1:0)$ ausgehenden Kurventangenten. Der obige Satz bleibt richtig, wenn man ihn jeweils für die n Nullstellen einer jeden Linearfaktorenzerlegung ausspricht und die Forderung, dass die Brennpunkte reell sein müssen, fallen lässt. Also gilt:

„Jedes vollständige n-Eck, gebildet aus je n solchen (reellen oder imaginären) Nullstellen einer dualkomplexen ganzen rationalen Funktion n-ten Grades, die eine Zerlegung der Funktion in n Linearfaktoren ausmachen, wird in seinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Seitenmitten von einer (reellen oder imaginären) algebraischen Kurve $(n-1)$-ter Klasse berührt, die die $(n-1)^2$ Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion zu (reellen oder paarweise konjugiert imaginären) Brennpunkten hat. In diesem Sinne sind alle so erhaltenen Kurven untereinander pseudoeuklidisch konfokal."

Die in Nr. 2 unter a) genannte Funktion hat 4 Nullstellendreiecke, von denen eines in eine Gerade entartet ist. Die drei übrigen werden in ihren drei Seitenmitten je von einer Kurve 2. Klasse berührt.

Die Funktion in Nr. 2 b) besitzt 4 Nullstellenvierecke, die in ihren 6 Seitenmitten je von einer Kurve 3. Klasse berührt werden.

Ebenso gilt entsprechend Abhandlung I [5]), wenn man von den Realitätsverhältnissen absieht:

„Je n solche Stellen $w = a$ einer dualkomplexen ganzen rationalen Funktion n-ten Grades, die eine Zerlegung der Funktion $w_1 = f(z) - a$ in n Linearfaktoren ausmachen, bestimmen ein vollständiges n-Eck, dem in seinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Seitenmitten eine algebraische Kurve $(n-1)$-ter Klasse einbeschrieben ist. Nimmt a alle möglichen dualkomplexen Werte an, so entstehen je ∞^2 a-Stellen-n-Ecke der Funktion, denen insgesamt in ihren Seitenmitten ∞^1 konfokale algebraische Kurven $(n-1)$-ter Klasse einbeschrieben sind. Ihre $(n-1)^2$ pseudoeuklidischen Brennpunkte sind die $(n-1)^2$ Nullstellen von $f'_n(z)$. I. a. liefert jede Nullstellenkonfiguration dieser Art (Nr. 2) eine andere Kurve aus der Schar dieser ∞^1 pseudoeuklidisch konfokalen Kurven".

Die vollständigen n-Ecke können auch imaginäre Eckpunkte besitzen, die algebraischen Kurven z. T. imaginär sein.

---

5) S. 262.

Da die Funktion $w = f_n(z)$ auch eine pseudoeuklidisch konforme Abbildung der z-Ebene auf eine über der w-Ebene zu konstruierende n-blättrige Riemannsche Fläche vermittelt, entsprechen die reellen pseudoeuklidischen Brennpunkte dieser ∞^1 algebraischen Kurven zugleich den endlichen Verzweigungspunkten der zur Funktion gehörenden pseudoeuklidischen Riemannschen Fläche.

II. *Die Kovarianten der ganzen rationalen Funktion* ($\varepsilon^2 = +1$).

4. Die Kovarianten ganzer rationaler dualkomplexer Funktionen unterliegen denselben Bildungsgesetzen wie diejenigen der ganzen rationalen komplexen Funktionen. Sie bleiben gegenüber den linearen Substitutionen einer dualkomplexen Veränderlichen bis auf ganzzahlige Potenzen der Substitutionsdeterminante invariant. Einige Ausnahmen werden durch das Auftreten der Nullteiler bedingt.

Es sei

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\ ,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

dualkomplexe Zahlen mit $\varepsilon^2 = +1$, keine Nullteiler,

eine lineare Substitution der dualkomplexen Ebene. Dann vermittelt diese eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der z- und denen der w-Ebene mit Ausnahme der Punkte z, für die $\gamma z + \delta$ ein Nullteiler wird (und der Punkte w, für die $z = \infty$).

Für diese Punkte z gilt:

$$\gamma z + \delta = t(1 \pm \varepsilon) \quad , \quad t \text{ reell},$$

also

$$z = \frac{t(1 \pm \varepsilon) - \delta}{\gamma}.$$

Dies sind die Punkte der beiden (reellen) isotropen Geraden der z-Ebene durch $z = -\frac{\delta}{\gamma}$, den Pol der Substitution. Sie werden auf den Punkt $w = \infty$ abgebildet. Ebenso entspricht der Punkt $z = \infty$ den beiden isotropen Geraden durch $w = \frac{\alpha}{\gamma}$, den Fluchtpunkt der Transformation. Eine lineare Transformation der pseudoeuklidischen Ebene besitzt i. a. zwei Paare von Fixpunkten.

5. Die kubische dualkomplexe Funktion

$$f_3(z) = a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3$$

besitzt eine Jakobische Kovariante $J(z)$ von dritten und eine Hessesche

Kovariante $H(z)$ vom zweiten Grade. Bringt man $H(z)$ durch lineare Substitution auf die Form:

$$H(z) = z^2 - 1$$

so nimmt $f_3(z)$ die „Normalform"

$$f_3(z) = z^3 + 3(p + \varepsilon q)\, z^2 + 3z + (p + \varepsilon q)$$

an und es wird

$$J(z) = (p + \varepsilon q)\, z^3 + 3z^2 + 3(p + \varepsilon q)\, z + 1.$$

Die Verbindungsstrecke der beiden Nullstellen $+1, -1$ von $H(z)$ bestimmt die gleichseitige Hyperbel h^2 durch $L_1\,(1:1:0)$ und $L_2\,(1:-1:0)$ mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

und es gilt:

„Durch Inversion an der gleichseitigen Hyperbel h^2 und Spiegelung an ihrer reellen Hauptachse werden die Nullstellen der dualkomplexen kubischen Funktion mit denen ihrer Jakobischen Kovariante vertauscht".

Nun wird mit Hilfe eines dualkomplexen Parameters $\lambda = \lambda_1 + \varepsilon\lambda_2$ durch

$$F_\lambda(z) = f_3(z) + \lambda J(z)$$

ein Büschel von Funktionen 3. Grades bestimmt. Alle Funktionen dieses Büschels besitzen ein und dieselbe Hessesche Kovariante $H(z)$. Die Nullstellen aller Funktionen $F_\lambda(z)$ mit variablem λ und festem Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = b$ liegen auf einer algebraischen Kurve sechster Ordnung, die durch Inversion und Spiegelung an der Hyperbel h^2 in die zu $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{b}$ gehörige Kurve übergeht. Die zu variablem Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = b$ gehörigen Kurven bilden einen Büschel B_6 dessen Gleichung mit $x = \varrho\cosh t$ $y = \varrho \sinh t$ in der Form

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} q\varrho^6 + 3(p^2 - q^2 - 1)(\varrho^4 + 1)\varrho\sinh t - (9q\varrho^2 - 6q\varrho^2\cosh 2t)\times \\ \times(\varrho^2 - 1) + (p^2 - q^2 - 1)\varrho^3 \sinh t\,(6 - 4\sinh^2 t) - q + b[p\varrho^6 + \\ + 3(p^2 - q^2 + 1)(\varrho^4 + 1)\varrho\cosh t + (9p\varrho^2 + 6p\varrho^2\cosh 2t)(\varrho^2 + 1) + \\ + (p^2 - q^2 + 1)\varrho^3 \cosh t\,(6 + 4\cosh^2 t) + p] = 0 \end{array}\right.$$

geschrieben werden kann. Einen zweiten Büschel B'_6 von ∞^1 Kurven sechster Ordnung erhält man für variables λ bei festem $\tau = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$. Er hat die Gleichung:

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varrho^6+6\varrho\,(\varrho^4+1)\,(p\cosh t-q\sinh t)+6\varrho^2\,(\varrho^2+p^2-q^2)\cosh 2t+\\
+9\varrho^4(p^2-q^2)+12\,\varrho^3(p\cosh t+q\sinh t)+8\,\varrho^3\,(p\cosh^3 t-\\
-q\sinh^3 t)+9\varrho^2+p^2-q^2+b[(p^2-q^2)\,\varrho^6+6\varrho\,(\varrho^4+1)\times\\
\times(p\cosh t+q\sinh t)+6\varrho^2\,(p^2\varrho^2-q^2\varrho^2+1)\cosh 2t+9\varrho^4+\\
+12\,\varrho\,(p\cosh t-q\sinh t)+8\varrho^3\,(p\cosh^3 t+q\sinh^3 t)+\\
+9\,(p^2-q^2)\,\varrho^2+1]=0.
\end{array}\right.
$$

Die beiden Büschel B_6 nnd B'_6 sind zueinander pseudoeuklidisch orthogonal. Sie sind die Bilder der Netzes der pseudoeuklidischen Kreise, d. h. der mit L_1, L_2 inzidenten gleichseitigen Hyperbeln mit dem Mittelpunkte O, und der Halbgeraden durch O in einer λ-Ebene. Hieraus und aus den geometrischen Eigenschaften der Kurvenbüschel B_6, B'_6 folgt insgesamt:

Die kubische Funktion $f_3(z)$ und ihre Jakobische Kovariante $J(z)$ bestimmen vermöge eines dualkomplexen Parameters $\lambda=\lambda_1+\varepsilon\lambda_2$ ∞^2 kubische Funktionen mit gemeinsamer Hesseschen Kovariante $H(z)$. Die Nullstellen all dieser kubischen Funktionen lassen sich bei festgehaltenem $b=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ auf ∞^1 algebraische Kurven sechster Ordnung verteilen. Sie bilden einen Büschel B_6 (Gleichung 3). Die zum Parameterwert b gehörige Kurve des Büschels B_6 geht durch Inversion an der Hyperbel h^2 und Spiegelung an ihrer reellen Hauptachse in die zum Parameter $\frac{1}{b}$ gehörige Kurve über. Ebenso lassen sich die Nullstellen der Funktion $F_\lambda(z)$ bei festgehaltenem $b=\lambda_1{}^2-\lambda_2{}^2$ auf ∞^1 algebraische Kurven sechster Ordnung eines zweiten Büschels B'_6 (Gleichung 4) verteilen. Die beiden Büschel B_6 und B'_6 sind zueinander pseudoeuklidisch orthogonal. Die Kurven beider Büschel sind dreifach zirkular, d. h. sie gehen je dreimal durch die Fundamentalpunkte L_1, L_2. Jede Kurve besitzt 2 Tripel von je 3 einander parallelen Asymptoten mit den Gleichung $y=\pm x+\mu_i$ $(i=1, 2, 3)$. In jedem Tripel ist mindestens eine Asymptote reell. Jeder der beiden Fundamentalpunkte L_1 $(1:1:0)$ und L_2 $(1:-1:0)$ ist neunfacher Knotenpunkt des Büschels B_6. Die übrigen Knotenpunkte dieses Büschels sind die neun Nullstellen von $f_3(z)$ und die neun Nullstellen von $J(z)$, ihre Realitätsverhältnisse hängen von den Koeffizienten p, q von $f_3(z)$ ab. Der Büschel B'_6 hat ausser den beiden je neunfach zählenden Fundamentalpunkten L_1, L_2 keine reellen Knotenpunkte. Die Inversion an der gleichseitigen Hyperbel h^2 nebst der Spiegelung an ihrer

Hauptachse führt jeden der beiden Büschel B_6, B'_6 in sich über. Dabei werden die einzelnen Kurven eines jeden Büschels untereinander vertauscht".

Endlich gilt:

„*Der Wertevorrat der Funktion* $w = -\frac{f_3(z)}{J(z)}$ *verteilt sich auf die* ∞^1 *algebraischen Kurven sechster Ordnung des Büschels* B_6. *Die Kurven dieses Büschels sind den Geraden durch* $w = 0$ *umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die neun Stellen* $w = a = a_1 + \varepsilon a_2$ *und die neun Stellen* $w = -a = -a_1 - \varepsilon a_2$ *sind die 18 Schnittpunkte, die die durch* $b = \frac{a_2}{a_1}$ *gekennzeichnete Kurve des Büschels* B_6 *mit der durch* $\tau = a_1^2 - a_2^2$ *gekennzeichneten Kurve des Büschels* B'_6 *(ausser den Fundamentalpunkten* L_1, L_2*) gemeinsam hat. Der Wert* $w = \infty$ *wird in den Punkten* z *angenommen, für die* $J(z)$ *ein Nullteiler ist. Sie erfüllen zwei algebraische Kurven dritter Ordnung der z-Ebene*".

6. Die biquadratische Funktion

$$w = f_4(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4$$

hat die Hessesche Kovariante $H(z)$ vom vierten und die Jakobische Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade sowie die zwei Invarianten i, k. Mit Hilfe der Lösungen m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente $m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$ zerfällt $J(z)$ in drei quadratische Faktoren φ, χ, ψ, sodass

$$H(z) + m_1 f_4(z) = -2\varphi^2$$
$$H(z) + m_2 f_4(z) = -2\chi^2$$
$$H(z) + m_3 f_4(z) = -2\psi^2;$$

dann ist

$$J(z) = 2\varphi\chi\psi.$$

Man beweist jetzt leicht den Satz:

„*Es gibt drei Nullstellenpaare* $z_1 z_2$, $z_3 z_4$; $z_5 z_6$ *von* $J(z)$, *die zu drei verschiedenen quadratischen Faktoren von* $J(z)$ *gehören. Stets ist eines von ihnen imaginär, die beiden anderen reell. Die drei Verbindungsstrecken dieser drei Punktepaare bestimmen drei mit* L_1, L_2 *inzidente gleichseitige Hyperbeln nebst den Spiegelungen an ihren zugehörigen Hauptachsen stellen drei involutorische Transformationen* J_1, J_2, J_3 *der dualkomplexen Ebene dar. Sie bilden mit der Identität eine Vierergruppe. Jede der drei*

Transformationen J_1, J_2, J_3 führt sowohl $f_4(z)$ wie auch $H(z)$ je durch Vertauschung ihrer Nullstellen untereinander in sich über und verwandelt die Jakobische Kovariante $J(z)$ in sich, indem sie die vier Nullstellen eines der quadratischen Faktoren von $J(z)$ festhält und die der anderen vertauscht".

Die eben beschriebene Konfiguration ist wegen $f_4(z) = \prod_1^4 (z - z_\nu)$ durch vier Punkte der dualkomplexen Ebene bestimmt.

Zum Beweis wird durch eine lineare Substitution, die bekanntlich den Zusammenhang zwischen $f_4(z)$, $H(z)$, $J(z)$ bestehen lässt, $f_4(z)$ auf die „kanonische Form"

$$f_4^0(z) = z^4 + 6(\alpha + \varepsilon\beta) z^2 + 1$$

gebracht mit

$$H(z) = z^4 + \frac{1 - (\alpha + \varepsilon\beta)^2}{\alpha + \varepsilon\beta} z^2 + 1 ; \qquad J(z) = z^5 - z.$$

Die Bildung von $H(z)$ versagt, wenn $\alpha + \varepsilon\beta$ ein Nullteiler ist.

Die drei involutorischen Transformationen J_1, J_2, J_3 erhalten dann die Form

J_1: $z' = \frac{1}{z}$, zwei Fixpunkte in $+1$, -1

J_2: $z' = -\frac{1}{z}$, „ „ „ $i\varepsilon$, $-i\varepsilon$

J_3: $z' = -z$, „ „ „ 0, ∞.

Die Transformation $w = \frac{1}{z}$ hat z. B. die (reellen) Fixpunkte

$$z = +1, -1, +\varepsilon, -\varepsilon.$$

Die Jakobische Kovariante $J(z) = z^5 - z$ dagegen hat die Faktoren

$$z^2 - 1 , \quad z^2 + 1 , \quad z.$$

Die Fixpunkte von $w = \frac{1}{z}$ sind also die Nullstellen des quadratischen Faktors $z^2 - 1$ usw. Die isotropen Geraden $y = \pm x$ werden auf den Punkt $z' = \infty$ abgebildet.

7. Es werde nun der Funktionenbüschel

$$F_\lambda(z) = f_4(z) + \lambda H(z)$$

mit beliebigem komplexen Parameter λ betrachtet[6]). Alle Funktionen

6) S. auch Abhandlung I, S. 276/77.

MÉRNÖKI KÖNYVTÁR MŰEGYETEM

dieses Büschels besitzen ein- und dieselbe Jakobische Kovariante $J(z)$. Die Nullstellen aller Funktionen $F_\lambda(z)$ mit variablem λ, aber festem Verhältnis $b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ liegen je auf einer algebraischen Kurve achter Ordnung, die durch Inversion und Spiegelung an jeder der 3 Hyperbeln h_1^2, h_2^2, h_3^2 und ihren drei Hauptachsen (Nr. 6) in sich übergeht. Die zu variablem Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = b$ gehörigen Kurven bilden einen Büschel B_8 mit dem Büschelparameter b, dessen Gleichung mit $x = \varrho \cosh t$, $y = \varrho \sinh t$ in der Form:

$$(5)\quad \begin{cases} a(\varrho^4+1)\varrho^2\cosh 2t + b(\varrho^4-1)\varrho^2\sinh 2t + c\varrho^4 + b[d((\varrho^4+1)^2 + \\ +4\varrho^4\sinh^2 2t) + e(\varrho^4+1)\varrho^2\cosh 2t + f(\varrho^4-1)\varrho^2\sinh 2t + g\varrho^4] = 0 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \beta(9\alpha^2 - 9\beta^2 + 1) & d &= \alpha^2 - \beta^2 \\ b &= -\alpha(9\alpha^2 - 9\beta^2 - 1) & e &= \alpha(1 + 3\alpha^2 - 3\beta^2) \\ c &= 12\alpha\beta & f &= -\beta(3\alpha^2 - 3\beta^2 - 1) \end{aligned}$$

$$g = 6(\alpha^2 + \beta^2 - 3(\alpha^2 - \beta^2)^2)$$

geschrieben werden kann oder abgekürzt

$$R_0(x,y) + b\,J_0(x,y) = 0 \quad , \quad b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Die Kurve R_0 trägt die Nullstellen aller $F_\lambda(z)$ mit reellem λ und ist nach Abspaltung der uneigentlichen Geraden von sechster Ordnung, die Kurve J_0 trägt die Nullstellen aller $F_\lambda(z)$ mit rein dualkomplexem λ.

Im Falle $B = 0$ zerfällt R_0 in 2 Hyperbeln durch die Fundamentalpunkte L_1, L_2 und die reelle und duale Achse.

Zu den ∞^1 Kurven des Büschels B_8 sind die ∞^1 Kurven eines zweiten Büschels B'_8 pseudoeuklidisch orthogonal. Sie haben die Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \varrho^8 + A\,\varrho^2\cosh 2t + B(\varrho^4-1)\varrho^2\sinh 2t + C\,\varrho^4 + 4\varrho^4\sinh^2 2t + \\ +1 + b[\varrho^8 + D\varrho^4 + E\varrho^2(\varrho^4+1)\cosh 2t + F(\varrho^4-1)\varrho^2\sinh 2t + \\ +4\varrho^4\sinh^2 2t + 1] = 0 \end{cases}$$

mit $A = 12\alpha$ $\quad B = -12\beta$ $\quad C = 2(1 + 18\alpha^2 - 18\beta^2)$

$$D = \frac{2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left(18 - 107\alpha^2 - 109\beta^2 + 162(\alpha^2-\beta^2)^2\right)$$

$$E = \frac{12\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(1 - 3\alpha^2 + 3\beta^2) \qquad F = \frac{12\beta}{\alpha^2-\beta^2}(1 + 3\alpha^2 - 3\beta^2).$$

Man erkennt wiederum, dass die Zuordnung versagt, wenn $\alpha + \varepsilon\beta$ ein Nullteiler ist. Insgesamt ist daher bewiesen:

„*Die biquadratische Funktion $f_4(z)$ und ihre Hessesche Kovariante $H(z)$ bestimmen vermöge eines dualkomplexen Parameters $\lambda = \lambda_1 + \varepsilon\lambda_2$ ∞^2 biquadratische Funktionen $F_\lambda(z) = f_4(z) + \lambda H(z)$ mit gemeinsamer Jakobischer Kovariante $J(z)$. Ihre Nullstellen verteilen sich bei variablem λ, aber festgehaltenem Verhältnis $b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ auf ∞^1 algebraische Kurven achter Ordnung. Sie bilden einen Büschel B_8 (Gleichung 5). Ebenso lassen sich die Nullstellen der Funktionen $F_\lambda(z)$ bei festgehaltenem $\tau = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ auf ∞^1 algebraische Kurven achter Ordnung eines zweiten Büschels B'_8 (Gleichung 6) verteilen. Die beiden Büschel sind zueinander pseudoeuklidisch orthogonal und gehen je viermal durch jeden der beiden Fundamentalpunkte L_1, L_2. Der Büschel B_8 hat ausserdem die 16 Nullstellen von $f_4(z)$ und die 16 Nullstellen von $H(z)$ zu Knotenpunkten. Jede Kurve beider Büschel besitzt zwei Quadrupel untereinander je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Deren Realität hängt von den Koeffizienten von $f_4(z)$ und vom Büschelparameter b bzw. τ ab. Durch jede der drei Inversionen und Spiegelungen J_1, J_2, J_3 geht jede der Kurven achter Ordnung beider Büschel je in sich über*".

Die beiden Büschel B_8, B'_8 sind die Bilder der Geraden durch O und der mit L_1, L_2 inzidenten gleichseitigen Hyperbeln mit dem Mittelpunkt O in der λ-Ebene.

Daher gilt auch:

„*Der Wertevorrat der Funktion $w = -\frac{f_4(z)}{H(z)}$ verteilt sich auf die ∞^1 algebraischen Kurven achter Ordnung des Büschels B_8. Die Kurven dieses Büschels sind den Geraden durch $w = 0$ umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die 16 a-Stellen $w = a_1 + \varepsilon a_2$ und die 16 Stellen $w = -a_1 - \varepsilon a_2$ sind 32 Schnittpunkte, die die durch $b = \frac{a_1}{a_2}$ gekennzeichnete Kurve des Büschels B_8 mit der durch $\tau = a_1^2 - a_2^2$ gekennzeichneten Kurve des Büschels B'_8 ausser den Fundametalpunkten L_1, L_2 gemeinsam hat. An den Stellen z, für die $H(z)$ ein Nullteiler ist, gilt $w = \infty$. Sie erfüllen zwei algebraische Kurven vierter Ordnung der z-Ebene*".

8. In der komplexen Zahlenebene ist der Begriff der Kreiskette bekannt. Eine Kette von n Kreisen k_1^2, k_2^2, . . . berühre einen festen

Kreis K_1^2 bzw. in den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ von innen, jeder Kreis der Kette schneide den vorhergehenden und den nachfolgenden unter konstantem Winkel α [7]).

Die Punkte $z_1, \ldots, z_n$ sind die Wurzeln einer speziellen Klasse Abelscher Gleichungen n-ten Grades. Jede derartige Gleichung lässt sich durch lineare Transformation in die Form.

$$(7) \qquad a_0 z^n + a_n = 0 \quad \text{oder} \quad z^n + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

bringen mit $r_{K^2_1} = \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}$. Die Auflösung einer solchen Gleichung in der gewöhnlichen komplexen Ebene kann auf trigonometrischem Wege mitttels des Moivreschen Satzes erfolgen.

In der dualkomplexen Ebene lautet dagegen die (trigonometrische) Lösung einer Gleichung.

$$(8) \qquad z^n + \frac{a_n}{a_0} = 0:$$

$$(9) \qquad z_k = \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|} \left\{ \cosh \frac{t + 2k\pi i}{n} + \varepsilon \sinh \frac{t + 2k\pi i}{n} \right\}$$

mit $\varrho = \left|\frac{a_n}{a_0}\right| = \left(R\left(\frac{a_n}{a_0}\right)\right)^2 - \left(\theta\left(\frac{a_n}{a_0}\right)\right)^2$ $\quad R =$ Realteil, $\theta =$ Dualteil

und $\cosh t = \frac{R}{\varrho}$ $\qquad \sinh t = \frac{\theta}{\varrho}$.

Auf diesem Wege werden aber nur n Nullstellen gewonnen, die zusammen gerade eine Zerlegung der Gleichung in n Linearfaktoren ausmachen. Die übrigen $n^2 - n$ lassen sich wiederum nur gemäss Nr. 2 ermitteln (Schnittpunkte von $u(x,y) = 0$ und $v(x,y) = 0$). Unter den n Nullstellen (9) sind im Falle eines ungeraden n nur eine mit reellem Real- und Dualteil, im Falle eines geraden n genau zwei.

Es gibt Gleichungen, die sich durch lineare Transformation in die Form (8) bringen lassen. Darüber entscheidet das Verhalten gewisser Kovarianten der Funktion $f_n(z)$. Was für die Nullstellen einer Funktion $w = f_n(z)$ gilt, lässt sich mit entsprechender Modifikation auf die a-Stellen von $w = f_n(z)$ übertragen.[8])

---

7) Abhandlung I, S. 279. S. a. Haenzel: *Über eine Klasse von Abelschen Gleichungen*, Jahresbericht d. d. M. V. (1931) S. 73.

8) Abhandlung I, S. 280.

Zum vollständigen Kovariantensystem der ganzen rationalen Funktion fünften Grades

$$f_5(z) = a_0 z^5 + 5a_1 z^4 + 10a_2 z^3 + 10a_3 z^2 + 5a_4 z + a_5$$

gehört auch in der dualkomplexen Ebene die quadratische Kovariante [9])

$$C_{2,2}(z) = (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) z^2 + (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3) z + \\ + (a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2)$$

und eine kubische Kovariante $C_{3,3}$, die auch in den Koeffizienten a_ν vom dritten Grade ist. Setzt man noch

$$(10) \qquad a = \frac{c_0}{a_0 a_2 - a_1^2} = \frac{c_1}{a_0 a_3 - a_1 a_2} = \frac{c_2}{a_1 a_3 - a_2^2}$$

und $C_{2,2}{}^a = C_{2,2}(z) - a_0 az - a_1 a$, so zeigt man auf Grund der bisherigen Ausfürungen dieser Nr. 8 in Verbindung mit früheren Ergebnissen [10]) – mit entsprechenden Ausnahmen für Nullteiler in den Nennern von (10) – u.a. leicht:

Reduziert sich die kubische Kovariante einer ganzen rationalen Funktion fünften Grades $f_5(z)$ auf die quadratische Form

$$c_0 z^2 + c_1 z + c_2$$

mit $c_0 : c_1 : c_2 = (a_0 a_2 - a_1^2) : (a_0 a_3 - a_1 a_2) : (a_1 a_3 - a_2^2)$, *während $C_{2,2}{}^a$ weder verschwindet noch ein vollständiges Quadrat darstellt, besitzt $f_5(z)$ einen bestimmten charakteristischen Wert a (Gleichung (10)). Dann gehört zur Funktion $w_1 = f_5(z) - a$ immer eine Zerlegung in fünf Linearfaktoren, so dass von den zugehörigen fünf a-Stellen eine und nur eine einem reellen Punkte der dualkomplexen Ebene entspricht*".

Diese fünf a-Stellen können als die Berührungspunkte einer Kette von einer reelen und vier imaginären [11]) mit L_1, L_2 inzidenten gleichseitigen Hyperbeln $h_1^2 \ldots h_5^2$ mit einer weiteren derartigen reellen Hyperbel angesehen werden, so dass jede der fünf Hyperbeln $h_1^2 \ldots h_5^2$ die vorhergehende und die nachfolgende unter pseudoeuklidisch konstantem Winkel schneidet.

9. Eine Kette von ∞^1 reellen mit L_1, L_2 inzidenten gleichseitigen Hyperbeln h^2, von denen jede die vorhergehende und die nachfolgende unter pseudoeuklidisch konstantem Winkel schneidet, berühre zwei

---

9) Faà di Bruno: *Einleitung in die Theorie der linearen Formen*. Deutsch von Dr. Walther, Leipzig 1881, S. 378.

10) Abhandlung I, S. 280.

11) d. h. Hyperbeln mit imaginärem Mittelpunkt.

feste mit L_1, L_2 inzidente gleichseitige Hyperbeln H_1^2, H_2^2 in den abzählbar unendlich vielen Punkten z_1, $z_2 \ldots z_n \ldots$ Haben die Hyperbeln H_1^2, H_2^2 die Gleichung

$$x^2 - y^2 = r_\mu^2 \qquad \mu = 1, 2,$$

so lassen sich die ∞^1 Berührpunkte der Hyperbeln h^2 mit H_1^2, H_2^2 in der Form

$$z_\nu = r_\mu (\cosh \nu\alpha + \varepsilon \sinh \nu\alpha) \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

schreiben. Der pseudoeuklidische Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgende Hyperbeln ist α; dann ist durch

$$(11) \qquad w(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (z - z_\nu)\, e^{\frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2}$$

eine ganze transzendente Fuktion gegeben, die sich im Innern der Hyperbel H_1^2 regulär verhält, sie besitzt abzählbar viele Nullstellen mit den Häufungspunkten L_1, L_2. Alle diese Nullstellen werden durch reelle Punkte der dualkomplexen Ebene dargestellt. Die Hyperbel H_1^2 ist die natürliche Grenze der Funktion.

III. Die ganze rationale Funktion und ihre Nullstellen im Falle $\varepsilon^2 = 0$

10. Es sei jetzt $z = x + \varepsilon y$ mit $\varepsilon^2 = 0$. Die ∞^2 Punkte z werden umkehrbar eindeutig den ∞^2 Punkten $z = x + \varepsilon y$ einer Ebene mit einem doppelzählenden reellen Fundamentalpunkt $L(0:1:0)$ zugeordnet, die Nullteiler insbesondere den Punkten der Geraden $x = 0$ (duale Achse).

Wiederum habe die ganze rationale Funktion n-ten Grades die Form

$$w = f(z) = a_n + \binom{n}{1} a_{n-1} z + \binom{n}{2} a_{n-2} z^2 + \cdots + a_0 z^n = u + \varepsilon v$$

mit $a_\nu = a_\nu' + \varepsilon a_\nu''$, a_ν', a_ν'' reell, $u = u(x, y)$ (Realteil) $v = v(x, y)$ (Dualteil). Die a_ν dürfen nich alle einen Nullteiler als Faktor enthalten. Die Nullstellen der Funktion lassen sich auch jetzt nicht unmittelbar, sondern nur mit Hilfe der Gleichungen $u(x, y) = 0$ und $v(x, y) = 0$ bestimmen. Wegen $\varepsilon^2 = 0$ hängt aber u nur von x ab und v ist nur eine lineare Funktion von y. Es gibt also im Gegensatz zum Falle $\varepsilon^2 = 1$ genau n Nullstellen. Daher gilt in Verbindung mit bekannten Sätzen der gewöhnlichen komplexen Algebra:

„Eine ganze rationale Funktion der dualkomplexen Veränderlichen $z = x + \varepsilon y$ $(\varepsilon^2 = 0)$ hat n Nullstellen. Ihre Realteile sind die n

Wurzeln der algebraischen Gleichung $u(x)=0$, *ihre Dualteile bestimmen sich dann aus der in* y *linearen Gleichung* $v(x,y)=0$. *Real- und Dualteil einer jeden Nullstelle sind entweder gleichzeitig gewöhnliche reelle oder gewöhnliche komplexe Zahlen. Nur die Nullstellen der ersten Art finden ihre geometrische Darstellung in der z-Ebene*".

Von der (teilweise möglichen) Uebertragung der Sätze aus Abschnitt I und II sei abschliessend nur die folgende angeführt:

Die ganze rationale Funktion dritten Grades hat eine Jakobische Kovariante $J(z)$ vom dritten und eine Hessesche Kovariante $H(z)$ vom zweiten Grade. Erhält $H(z)$ die Form

$$H(z)=z^2-1,$$

so lässt sich $f_3(z)$ wiederum auf die Normalform

$$f_3(z)=z^3+3(p+\varepsilon q)\,z^2+3z+(p+\varepsilon q),$$

$J(z)$ auf die Form

$$J(z)=(p+\varepsilon q)\,z^3+3z^2+3(p+\varepsilon q)\,z+1$$

bringen. Die beiden Nullstellen von $H(z)$ bestimmen die „zerfallene Parabel" $x^2=+1$ durch den Fundamentalpunkt $L(0:1:0)$ und es gilt:

„*Durch Inversion an der in zwei mit* L *inzidente Gerade durch die Nullstellen von* $H(z)$ *zerfallenen Parabel und Spiegelung an der Verbindungslinie der Nullstellen von* $H(z)$ *werden die Nullstellen der dualkomplexen Funktion* $w=f_3(z)$ $(\varepsilon^2=0)$ *mit denen ihrer Jakobischen Kovariante* $J(z)$ *vertauscht.*"

Technische Hochschule Karlsruhe

(Reçu le 15 Mai 1947).

SUR LES ÉLÉMENTS SINGULIERS ET SUR LA GÉOMÉTRISATION DES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DE PFAFF À HUIT VARIABLES

par

ŞT. PETRESCU

On sait que l'étude des systèmes de Pfaff a été beaucoup développée, à partir notemment des travaux de Mr. E. Cartan[1]) et Ed. Goursat[2]), qui ont montré comment ces systèmes se lient à de très importantes problèmes de géométrie et d'analyse mathématique (spécialement dans l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre).

Plus recemment, Mr. G. Vrânceanu[3]), en se servant aussi des systèmes de Pfaff, a donné sa belle théorie des „Espaces non holonomes" et étudie de même, dans diverses Mémoires, la géométrisation des systèmes de Pfaff et des équations aux dérivées partielles du second ordre, en employant une méthode et une définition de la géométrisation qui lui est personnelle [4]).

Ed. Goursat, dans son grand Mémoire cité plus haut, étudie d'une façon approfondie, les systèmes de deux équations à six variables, en considérant leurs éléments singuliers. A l'aide des congruences et complexes linéaires de droites de l'espace à trois dimensions, il démontre d'une manière fort élégante, des importantes propriétés,

---

Voir spécialement:

1) *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentieles totales*, Annales de l'Ec. N. S. t. 18, 1901, pp. 241–311 et t. 27, 1910, pp. 109–192.

2) *Sur le problème de Bäcklund et les systèmes de deux équations de Pfaff*, Ann. de la Faculté des Sci. de Toulouse, t. X, 1918, pp. 65–173.

3) *Les espaces non holonomes*, Mémorial des Sci. Mathém., Fasc. LXXVI, Paris, 1936.

4) *Sur la géométrisation des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Jour. de Math. T. 6, 1937 et Mathematica, T. 13, 1937.

Sur la géométrisation des certains systèmes de Pfaff, Bul. Fac. de Ştiinţe Cernăuţi, vol. VII, 1933–1934, pp. 163.

concernant les systèmes de deux équations de classe six et met aussi en évidence comment l'étude de ces systèmes se rattache à l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre, en faisant ensuite l'application des résultats obtenus, au problème de Bäcklund. Il retrouve ainsi les résultats connus sur les transformations de Bäcklund, en donnant encore beaucoup d'autres résultats nouveaux.

En nous appuyant sur les recherches de Ed. Goursat, nous nous sommes proposé l'étude des éléments singuliers des systèmes de deux équations de Pfaff à huit variables, de classe huit. Certains des résultat qu'on a obtenu sont, naturellement, des généralisations des résultats de Goursat, mais les choses ne se présentent pas toujours, comme pour les systèmes à six variables, dans les diverses questions qui interviennent.

Les systèmes S de deux équations à huit variables ont trois familles, en général distinctes, d'éléments singuliers, une telle famille étant définie par un système de six équations différentielles ordinaires, admettant au plus quatre combinaisons intégrables distinctes. Par la considération des complexes linéaires de droites dans un espace à cinq dimensions, on peut mettre facilement en évidence l'existence des trois familles d'éléments singuliers et interpréter certains des résultats qui s'obtient par voie analytique.

Après avoir montré les formes réduites et canoniques auxquelles peut être réduit un système S de classe huit, en nous servant aussi des formes canoniques auxquelles se ramènent les covariants bilinéaires d'un tel système, nous avons considéré le problème de la géométrisation des systèmes de Pfaff de deux équations à huit variables, dans le sens que Mr. G. Vrânceanu a donné à cette notion.

Si nous avons crû utile l'étude, un peu plus detaillé, des systèmes de deux équations de classe huit, à huit variables, c'est parce-qu'ils sont la généralisation immédiate des systèmes de classe six et puisque nous espérons pouvoir montrer, dans un autre travail, leurs liaison avec les équations (ou systèmes d'équations) aux dérivées partielles d'un certain ordre, supérieur au premier.

D'ailleur, il est bien connu que, tout système d'équations aux dérivées partielles, peut être ramené à un système d'équations aux différentielles totales, en prenant, s'il est nécéssaire, certaines des dérivées partielles des fonctions inconnues, comme de nouvelles variables dépendantes.

2.- Considérons un système S de deux équations de Pfaff à huit variables $x^1, x^2, \ldots, x^8$

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET * MŰEGYETEM *

$$(S) \qquad \begin{cases} ds^1 = A_i\, dx^i = 0 \\ ds^2 = B_i\, dx^i = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8),$$

les coefficients A_i, B_i, étant des fonctions quelconques des variables x^i.

En supposant que les deux équations de S, sont distinctes, nous pouvons les résoudre par rapport à deux des différentielles, par ex. dx^7, dx^8 et nous avons

$$(S) \qquad \begin{cases} ds^1 = dx^7 + a_k\, dx^k = 0 \\ ds^2 = dx^8 + b_k\, dx^k = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6).$$

Les covariants bilinéaires Δs^1, Δs^2 seront, en général, de rang six, en tenant compte des équations de S, étant des formes bilinéaires dans les différentielles des variables x^1, $x^2, \ldots, x^8$ et si l'on remplace, dans ces covariants, dx^7, dx^8, δx^7, δx^8 par les expressions qu'on tire de S, en fonctions des différentielles $dx^1, \ldots, dx^6$; $\delta x^1, \ldots, \delta x^6$, ils prennent la forme

$$\begin{aligned} \Delta s^1 &= a_{jk}\,(dx^j \delta x^k - dx^k \delta x^j) \\ \Delta s^2 &= b_{jk}\,(dx^j \delta x^k - dx^k \delta x^j) \quad (\text{mod. } ds^1, ds^2), \\ &\qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 6) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où les coefficients a_{jk}, b_{jk} s'expriment en fonction des a_k, b_k et de leurs dérivées partielles.

Tout système de valeurs de dx^1, $dx^2, \ldots, dx^6$, non toutes nulles, définit un *élément linéaire intégral* (e)[5]) ou (dx^k), issu d'un point déterminé $(x^1, x^2, \ldots, x^8)$ de l'espace à huit dimensions S_8. Si l'on regarde ce point comme fixe et non assujeti à aucune condition, on voit que les éléments linéaires intégraux forment une multiplicité à cinq dimensions. En considérant les différentielles $dx^1, \ldots, dx^6$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à cinq dimensions S_5, nous pouvons donc dire qu'à un point quelconque P de cet espace, correspond un élément linéaire intégral à une dimension (e) de S et réciproquement.

On dit que deux éléments linéaires intégraux sont en *involution* [5]). par rapport à S, lorsque leurs coordonnées satisfont aux deux équations

$$\Delta s^1 = 0, \quad \Delta s^2 = 0 \qquad (\text{mod. } ds^1, ds^2),$$

c'est-à-dire s'ils annulent les covariant bilinéaires des équations de S. Ces deux éléments sont en involution relativement à l'équation $ds^1 = 0$ par ex., s'ils annulent le covariant bilinéaire Δs^1 (mod. ds^1, ds^2).

Le système S est, en général, de *classe huit*. Mais, il peut arriver qu'en choisissant convenablement les variables, c'est-à-dire en rem-

5) Pour tous les renseignements concernant les systèmes de Pfaff, voir Ed. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Hermann, Paris, 1922.

plaçant les variables x^i par de novelles variables y^i, qui soient des fonctions distinctes des x^i, le système S puisse s'écrire sous une forme contenant un nombre plus petit de variables. Ce nombre de variables (qui peut être sept, six, cinq, quatre ou deux), nous donne *la classe du systeme* [1]). Déterminer la classe d'un système S, revient à rechercher ses *éléments caractéristiques* [5]). Ce sont les éléments linéaires intégraux (dx^i), en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux (δx^i). Pour qu'un élément (dx^i) soit caractéristique, il est nécessaire et suffisant que les deux équations $\Delta s^1 = 0$, $\Delta s^2 = 0$ soient vérifiées par tous les éléments intégraux (δx^i). Quand on écrit ces conditions, nous obtenons un certain nombre de relations linéaires en dx^i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ et qui ensemble avec les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ nous donnent les éléments caractéristiques. En général, ce système d'équations n'admet que la solution $dx^i = 0$ et il n'y a pas d'éléments caractéristique pour le système; *S est alors de classe huit.* Si les équations qui nous donnent les éléments caractéristiques ont d'autres solutions que la solution nulle, elles se réduisent à un nombre $s < 8$ d'équations distinctes, qui forment un système complètement intégrabie, pouvant être réduit à la forme

$$df^\sigma = 0, \quad (\sigma = 1, 2 \ldots, s < 8)$$

En prenant un autre système de huit variables, y^σ, telles que

$$y^\sigma = f^\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

dans les équations de S figurerons seulement ces variables y^1, y^2, $\ldots$, y^s et leurs différentielles; *S est alors de classe s.*

Ces notions étant rappellées, soient P, P' deux points de l'espace S_5, qui représentent les images de deux éléments linéaires intégraux e, e' du système S, en involution, c'est-à-dire dont les coordonnées $dx^1, \ldots, dx^6$; $\delta x^1, \ldots, \delta x^5$ satisfont aux équations $\Delta s^1 = 0$, $\Delta s^2 = 0$ (mod. ds^1, ds^2). Nous dirons encore que les points P, P' sont en involution, quand il s'agit des deux éléments linéaires intégraux en involution, qu'ils représentent.

Les équations $\Delta s^1 = 0$, $\Delta s^2 = 0$ ou bien

$$a_{ik}\,(dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i) = 0,$$

$$b_{ik}\,(dx^i\ \delta x^k - dx^k\ \delta x^i) = 0, \quad (\text{mod. } ds^1, ds^2) \tag{2. 2}$$

$$(j, k = 1, 2, \ldots, 6)$$

sont des équations linéaires en dx ou δx, de sorte que, si l'on se donne

le point P, les coordonnées du point P', en involution avec P, doivent satisfaire aux deux équations qu'on vient d'écrire-et qui sont en général distinctes, de même qu'aux équations de S, où d est remplacé par δ.

Ainsi, un élément linéaire intégral quelconque (dx^k) de S est en involution avec une infinité d'autres éléments linéaires intégraux (δx^k), du même système, satisfaisant aux deux équations (2. 2) et qui sont figurés par les points d'une variété linéaire S_3 à trois dimensions. Deux points quelconques de cette variété seront-ayant en vue la forme bilinéaire des équations (2. 2) - aussi en involution et les éléments linéaires intégraux correspondants aux différents points de la S_3, forment un élément linéaire intégral (E), ayant comme immage la S_3, même dans l'espace à cinq dimensions S_5.

Il peut arriver que, par un choix convenable des coordonnées $d_A{}^k$, les quatre équations linéaires qui déterminent les éléments pour lesquels cette chose se passe, les *éléments singuliers de S.*

On peut montrer facilement qu'il y a *trois familles distinctes d'éléments singuliers, pour un système S de classe huit.*

En effet, les parenthèses

$$dx^i\ \delta x^k - d_A{}^k\ \delta x^i_A = p^{ik}$$

constituent, dans notre interprétation, les $\frac{n(n+1)}{2} = 15$, $(n = 5)$, coordonnées homogènes de la droite PP', de sorte que les équations (2.2) diviennent

$$(2.2') \qquad \begin{aligned} a_{jk}\ p^{ik} &= 0 \\ b_{jk}\ p^{ik} &= 0 \end{aligned} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 6)$$

et elles représentent *deux complexes linéaires de droites* C_1, C_2 dans l'espace à cinq dimensions S_5, en appelant complexe linéaire de droites d'un espace S_n, la totalité ∞^{2n-3} de droites, dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire. [6])

Cela étant, pour que l'élément linéaire intégral (dx^k) soit un élément singulier de S, il est nécéssaire et suffisant que les deux équations (2. 2), ou (2. 2'), définissant $\delta x^1, \ldots, \delta x^6$ ne soient pas distinctes, ou bien que, pour un système de valeurs non nulles des coefficients α, β, on ait identiquement la relation

6) On sait qu'un tel complexe est constitué par la totalité des droites joignant les paires de points conjugués dans un système nul, c'est-à-dire joignant les poins de l'espace avec les points des hyperplans qui leurs correspondent dans ce système nul. Voir, E. Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, Ed. 2-a, Cap. V. p. 115.

(2. 3) $\alpha\ \Delta s^1 + \beta\ \Delta s^2 = 0 \qquad (\text{mod. } ds^1,\ ds^2)$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

(2. 3') $(\alpha\ a_{jk} + \beta\ b_{jk})\ p^{ik} = 0,\ (j, k = 1, 2, \ldots, 6)$

sous laquelle on reconnait, quand le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ varie, un faisceau linéaire de complexes de droites dans l'espace S_5. En général, un complexe de ce faisceau (2. 3'), à savoir ceux qui correspondent aux valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$ qui annulent le déterminant symétrique gauche $\delta = |\ \alpha\ a_{jk} + + \beta\ b_{jk}\ |$, d'ordre six. Ces valeurs $\frac{\beta}{\alpha}$ sont dont racines d'une équations en $\frac{\beta}{\alpha}$ de degré trois, dont le discriminant sera différent de zéro, parceque le faisceau (2. 3') est général. On aura donc trois valeurs distinctes de $\frac{\beta}{\alpha}$, chacune d'entre elles étant racine double pour l'équation $\alpha\ a_{jk} + + \beta\ b_{jk} = 0$ et donc, entre autre, annulent le déterminant δ et ses mineurs d'ordre cinq, mais qui n'annulent pas les mineurs d'ordre quatre ; c'est-à-dire, pour chacune de ces valeurs, le déterminant δ est de caractéristique quatre. Il s'en suit que, le faisceau considéré a *trois* complexes singuliers, qui sont de seconde espèce, c'est-à-dire que chacun d'entre eux a une S_1, fondamentale. Il y a donc, pour le système S, trois familles distinctes d'éléments singuliers, représentés par les points des trois variétés linéaires S_1 fondamentales.

3. — Les deux équations

(3.1) $\Delta s^1 = 0\ ,\ \Delta s^2 = 0 \quad (\text{mod. } ds^1\ ,\ ds^2)$

sont, en général, distinctes. Mais, pour certains systèmes S, il peut se faire que les équations (3.1) se réduisent à une seule. Dans ce cas, on peut déterminer deux coefficients α, β de façon que l'équation

$$\alpha\Delta s^1 + \beta\Delta s^2 = 0 \ (\text{mod. } ds^1\ ,\ ds^2)$$

soit une identité, ce qu'on peut encore écrire, en posant $d\sigma \equiv \alpha\, ds_1 + + \beta\, ds^2 = 0$,

(3.2) $$\Delta\sigma = 0\ ,\ (\text{mod. } ds^1\ ,\ ds^2).$$

Ainsi, deux éléments linéaires intégraux (e), (e'), quelconques, du système S, sont toujours en involution relativement à l'équation $d\sigma = 0$.

En prenat $d\sigma = 0$ comme l'une des équations du système S, par ex. comme équation $ds^1 = 0$, on aura

$$\Delta s^1 = 0 \ (\text{mod. } ds^1\ ,\ ds^2).$$

Nous voyons maintenant que, pour que deux éléments linéaires

intégraux (dx^k) et (δx^k) soient en involution relativement au système S, il suffit qu'on ait

$$\Delta s^2 = 0 \text{ (mod. } ds^1 , ds^2). \tag{3.3}$$

Or, d'après (2.1), c'est une équation bilinéaire d'expression

$$b_{ik}(dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i) = 0 , \ (j, k = 1, 2, \ldots, 6) \tag{3.3'}$$

et elle donne la condition pour que la droite joignant les points représentant les deux éléments (dx^k) et (δx^k), appartient à un complexe linéaire de droites de $l' S_5$.

Nous aurons deux cas à considérer, suivant que le complexe (3.3') est un complexe singulier ou non singulier.

a) *Si ce complexe n'est pas singulier*, il n'existe pour le système S, ni éléments caractéristiques, ni éléments singuliers et on peut montrer facilement que dans ce cas, *l'équation* $ds_1 = 0$ *est complètement intégrable.* Supposons, en effet, que cette équation $ds_1 = 0$ est de classe sept, ce qui est le cas général, et qu'on l'ait réduit à une forme canonique

$$ds^1 = dx^7 + x^2 dx^1 + x^4 dx^3 + x^6 dx^5 = 0. \tag{3.4}$$

La seconde équation, $ds^2 = 0$, de S, peut être supposée ne renfermant pas la différentielle dx^7. Par contre, elle doit contenir nécéssairement l'une des différentielles $dx^1, \ldots, dx^6$, dx^8. Si elle contient, par ex. dx^2, on peut l'écrire

$$ds^2 = dx^2 + A_1 dx^1 + \cdots + A_6 dx^6 + A_8 dx^8 = 0, \tag{3.5}$$

les coefficients A_i étant des fonctions des huit variables du système.

Le covariant bilinéaire de l'équation $ds^1 = 0$, qui est

$$\Delta s^1 = dx^2 \delta x^1 - dx^1 \delta x^2 + dx^4 \delta x^3 - dx^3 \delta x^4 + dx^6 \delta x^5 - dx^5 \delta x^6,$$

ne peut être nul identiquement, quand on y remplace dx^2 et δx^2 par les expressions données par (3.5), car les deux derniers termes de Δs^1 ne peuvent se réduire avec aucun autre terme. Donc, l'équation $ds^1 = 0$ ne peut pas être de classe sept.

De même, cette équation ne peut pas être de classe cinq, car en la supposant comme telle et en l'écrivant sous la forme canonique

$$ds^1 = dx^7 + x^2 dx^1 + x^4 dx^3 = 0, \tag{3.6}$$

on aura

$$\Delta s^2 = dx^2 \delta x^1 - dx^1 \delta x^2 + dx^4 \delta x^3 - dx^3 x^4.$$

Quant à l'équation $ds^2 = 0$, on peut la supposer de la forme (3.5). Or, le covariant Δs^1 ne peut pas être une identité en zéro, car le terme

$dx^4\,\delta x^3 - dx^3\,\delta x^4$ ne peut pas se réduire, quand on remplace dx^2 et δx^2 à l'aide de (3.5).

Donc, l'équation $ds^1 = 0$ ne peut être que de classe *trois* ou *un*. Dans le premier cas on a

$$ds^1 = dx^7 + x^2\,dx^1 = 0 \tag{3.7}$$

et $ds^2 = 0$ a la même expression que tout-à-l'heure. On peut alors écrire le covariant

$$\Delta s^1 = dx^2\,\delta x^1 - dx^1\,\delta x^2 =$$

$$= (A_1\,\delta x^1 + A_3\,\delta x^3 + \cdots + A_6\,\delta x^6 + A_8\,\delta x^8)\,dx^1 -$$

$$- (A_1\,dx^1 + A_3\,dx^3 + \cdots + A_6\,dx^6 + A_8\,dx^8)\,\delta x^1 \text{ (mod. } ds^1\,,\ ds^2).$$

Or, pour que ce covariant soit nul identiquement, il faut et il suffit qu'on ait

$$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_8 = 0,$$

ce qui nous montre que l'équation $ds^2 = 0$ est de la forme

$$ds^2 = dx^2 + A_1 dx^1 = 0,$$

et par conséquent le système S *est de classe quatre*. Ce fait est contraire à l'hypothèse, car il n'y a pas, dans ce cas, d'éléments caractéristiques.

Il nous reste seulement l'hypothèse où $ds_1 = 0$ serait de classe *un* et quand elle peut être écrite sous la forme canonique

$$ds^1 = dx^1 = 0. \tag{3.7'}$$

L'équation $ds^2 = 0$ est forcémment de classe sept (pour que S soit de classe huit) et on peut la ramener à la forme

$$ds^2 = dx^2 + x^3\,dx^4 + x^5\,dx^5 + x^7\,dx^8 = 0. \tag{3.7''}$$

Sous cette forme canonique de S, on peut s'en rendre compte immédiatement, qu'il n'admet pas d'éléments singuliers.

b) *Si le complexe (ou bien le système nul) (3.3') est singulier*, il peut être singulier *d'espèce deux* ou *quatre*. S'il est d'espèce deux (c'est-à-dire que le déterminant $|b_{ik}|$ est de rang quatre), il possède, par l'effet de l'*involutoriété*, une seule variété linéaire fondamentale S_1, à une dimension, dont les points ont comme hyperplans polaires, toutes les hyperplans de l'espace S_5. Le complexe est constitué alors par toutes les droites de l'espace S_5, qui rencontrent cette S_1, qu'on appelle aussi *centre*. Tous les points de la S_1, représentent des éléments caractéristiques de S. On a donc ∞^1 éléments de cette espèce, issus de tout point de l'espace à huit dimensions S_8. Le système est donc de classe inférieure à huit.

Lorsque le système (3.3') est singulier et d'espèce quatre (c'est-à-dire que le déterminant $|b_{ik}|$ est de rang deux) il y a une variété S_3 comme variété fondamentale. On a alors un complexe linéaire formé par toutes les droites de l'espace S_5, rencontrant le centre S_3 et on peut affirmer que ce sont les seules droites appartenant au complexe [7]). Tous les points de cette S_3 en sont des éléments caractéristiques de S, qui aussi dans ce cas est de classe inférieure à huit.

Remarquons enfin que, si l'on a identiquement $\Delta s^1 = 0$, $\Delta s^2 = 0$ (mod. ds^1, ds^2), notre système de Pfaff S est complètement intégrable.

4. — Nous allons maintenant montrer comment s'obtient les trois familles d'éléments singuliers de S. Comme d'habitude, nous supposerons les deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, résolues par rapport aux différentielles dx^7 , dx^8. Ainsi, les covariants bilinéaires Δs^1 , Δs^2, auront les expressions (2.1). Nous supposerons, de même, que les équations Δs^1 , $\Delta s^2 = 0$ (mod. ds^1 , ds^2) sont linéairement distinctes, ce qui signifie que le système S n'a pas de système dérivé.

Comme nous l'avons déjà dit, pour qu'un élément intégral $(dx^1, \ldots, dx^6)$ soit un élément singulier, il est nécéssaire que les deux équations $\Delta s^1 = 0$, $\Delta s^2 = 0$, qui nous définissent $\delta x^1, \ldots, \delta x^6$ ne soient pas distinctes et cette condition est aussi suffisante. En d'autres paroles, cella signifie qu'on peut trouver deux quantités α , β non nulles, de façon que la relation

$$\alpha \Delta s^1 + \beta \Delta s^2 = 0 \ , \ (\text{mod. } ds^1 \ , \ ds^2)$$

soit vérifiée identiquement, quels que soient $\delta x^1, \ldots, \delta x^6$. Donc, les coordonnées homogènes $(dx^1, \ldots, dx^6)$ d'un P de l'espace S_5, correspondant à un élément singulier, doivent satisfaire aux six relations suivantes

$$(4.1) \qquad (\alpha a_{j1} + \beta b_{j1})\, dx^1 + \ldots + (\alpha a_{j6} + \beta b_{j6})\, dx^6 = 0, \quad (j = 1,2, \ldots, 6)$$

les coefficients a_{jk} , b_{jk} vérifiant les conditions

$$a_{jk} + a_{kj} = 0, \quad b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad a_{jj} = b_{jj} = 0.$$

Pour que les équations homogènes (4. 1) n'ayent pas de solutions toutes nulles en $dx^1, \ldots, dx^6$ il est nécéssaire que le déterminant du système soit nul, c'est-à-dire on doit avoir

$$(4.2) \qquad D(\alpha, \beta) = |\alpha a_{ik} + \beta b_{ik}| = 0.$$

Mais, $D(\alpha, \beta)$ étant symétrique gauche d'ordre six, on sait qu'il est le

7) En effet, en désignant par r la dimension de l'espace S_r et par h l'espace du système nul singulier, on a ici $h - 1 = r - 2$ et on sait que le complexe linéaire est constitué par toutes et seules les droites qui rencontrent le centre S_{r-2}. Voir, E. Bertini, *loc. cit.*

carré d'une forme homogène du troisième degré en α β, soit $f(\alpha, \beta)$ et par conséquent le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ doit être racine de l'équation du troisième degré

$$f(\alpha, \beta) = 0. \tag{4. 2)'}$$

Donc, *il y a en général, pour le système S, trois familles distinctes d'éléments singuliers,* comme nous l'avons déjà annoncé au commencement.

Désignons par (α, β) une solution de l'équation (4. 2'), les quantités α, β étant différentes de zéro. Les six équations (4. 1) se réduisent alors, en général, à quatre équations distinctes et les coordonnées de l'élément singulier $(dx^1, \ldots, dx^6)$ dépendent linéairement et homogène, de deux paramètres arbitraires. Donc, le point P, dont les coordonnées sont $(dx^1, \ldots, dx^6)$, décrit une variété linéaire S_1, à une dimension, dans l'espace S_5. Ainsi nous voyons que :

Tout système S de deux équations de Pfaff à huit variables, de classe huit, admet trois familles, en général distinctes, d'éléments singuliers, les éléments d'une même famille corespondant aux points d'une variété linéaire à une dimension.

L'une de ces familles est déterminée par les quatre équations auxquelles se réduisent les (4. 1), ensemble avec les deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ *du système S.*

Examinons, en passant, le cas où les six équations (4. 1) pourraient être vérifiées identiquement, par une certaine valeur du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$. S'il en serait ainsi tous les rapports $\frac{b_{ik}}{a_{ik}}$ seraient égaux entre eux. Mais alors, les deux équations $\Delta s^1 = 0$ et $\Delta s^2 = 0$ se reduiraient à une seule. On doit remarquer que, dans ce cas, l'équation (4. 2') a une racine double, car tous les éléments du déterminant $D(\alpha, \beta)$ sont divisibles par un même facteur linéaire en α, β.

Cela étant dit, si (α, β) est un système de solutions non nulles de l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$, les éléments singuliers de la famille, qui corresponde à ce couple, satisfont à l'équation

$$(\alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2)' = 0 \pmod{ds^1, ds^2},$$

quel que soit l'élément intégral $(\delta x^1, \ldots, \delta x^6)$, ce qu'on peut encore écrire

$$\alpha\, \Delta s^1 + \beta\, \Delta s^2 = 0, \pmod{ds^1, ds^2}.$$

En d'autres termes, cela signifie que tous les éléments singuliers qui correspondent au système de solutions (α, β) de l'équation (4. 2'), sont

MÉRÉSZKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

en involution avec tous les autres éléments intégraux du système S, relativement à l'équation

$$(4.3) \qquad d\sigma \equiv \alpha\ ds^1 + \beta\ ds^2 = 0.$$

On dit que cette équation $d\sigma = 0$ est *une équation singulière* et donc, *à toute famille d'éléments singuliers, corresponde une équation singulière de S.*

Supposons tout d'abord, que cette équation singulière est *de classe sept,* ce qui est le cas général et qu'on l'a pris pour l'une des équations de S, par ex. comme équation $ds^1 = 0$, ce qui revient à supposer que l'équation (4. 2′) admet la solution $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Imaginons ensuite qu'on l'ait rammenée, par un changement de variables à la forme canonique

$$(4.3') \qquad ds^1 = dy^7 + y^2\ dy^1 + y^4\ dy^3 + y^6\ dy^5 = 0.$$

La seconde équation du système S peut être supposée ne renfermant pas dy^7, mais elle renferme nécessairement l'une au moins des des différentielles $dy^1, \ldots, dy^6, dy^8$. Supposons, par ex. qu'elle renferme dy^2. On peut alors l'écrire

$$ds^2 = dx^2 + B_1\ dy^1 + B_3\ dy^3 + \ldots + B_6\ dy^5 + B^8\ dy_8 = 0.$$

Le covariant bilinéaire Δs^1 sera

$$\Delta s^1 = dy^1\ dy^2 + dy^3\ dy^4 + dy^5\ dy^6 = \quad (dy^a\ dy^b = dy^a \delta y^b - dy^b\ \delta y^a)$$

$$= (B_3\ dy^3\ B_4\ dy^4 + B_5\ dy^5 + B_6\ dy^6 + B_8\ dy^8)\ \delta y^1 - (B_3\ \delta y^3 + \ldots. +$$

$$+ B_6\ \delta y^6 + B_8\ \delta y^8)\ dy^1 + dy^3\ \delta y^4 - dy^4\ \delta y^3 + dy^5\ \delta y^5 - dy^6\ \delta y^5 =$$

$$= B_3\ dy^3 + B_4\ dy^4 + B_5\ dy^5 + B_6\ dy^5 + B_8\ dy^8)\ \delta y^1 - (B_3\ dy^1 +$$

$$+ dy^4)\ \delta y^3 - (B_4\ dy^1 - dy^3)\ \delta y^4 - (B_5\ dy^1 + dy^6)\ \delta y^5 -$$

$$- (B_6\ dy^1 - dy^5)\ \delta y^6 - B_8\ dy^1\ \delta y^8 \quad (\text{mod. } ds^1,\ ds^2).$$

Or, les équations

$$(4.3'') \qquad \begin{array}{l} B_3\ dy^3 + B_4\ dy^4 + B_5\ dy^5 + B_6\ dy^6 + B_8\ dy^8 = 0, \\ B_3\ dy^1 + dy^4 = 0, \quad B_4\ dy^1 - dy^3 = 0, \quad B_5\ dy^1 + dy^6 = 0, \\ B_6\ dy^1 - dy^5 = 0, \qquad B_8\ dy^1 = 0, \end{array}$$

doivent définir, dans nos hypothèses, un système d'éléments singuliers. Pour qu'elles admettent de solutions non nulles, il faut et il suffit qu'on ait $B_8 = 0$. Les six équations précédentes se réduisent alors aux quatre distinctes suivantes

$$(4.3''') \qquad dy^6 = -B_5\,dy^1,\quad dy^5 = B_6\,dy^1,\quad dy^4 = -B_3\,dy^1,$$
$$dy^3 = B_4\,dy^1,$$

de sorte que le système d'éléments singuliers correspondant, est défini par le système différentiel ordinaire

$$(4.4) \qquad \frac{dy^1}{1} = \frac{dy^3}{B_4} = \frac{dy^4}{-B_3} = \frac{dy^5}{B_6} = \frac{dy^6}{-B_5} = \frac{dy^2}{-B_1} = \frac{dy^7}{-(y^2 + y^4 B_4 + y^6 B_6)}.$$

On peut interpréter, la condition d'avoir $B_8 = 0$, par le fait qu'elle exprime que les éléments linéaires caractéristiques de l'équations $ds^1 = 0$, données par les équations

$$dy^i = 0,\ (i = 1,2,\ldots,\ 7)$$

vérifient, de même, l'autre équation $ds^2 = 0$, du système S.

Comme cette propriété est indépendante du choix des variables, nous voyons que *à un système de solutions* (α, β) *de l'équation* $f(\alpha, \beta) = 0$, *corresponde, en général, une équation de classe sept,*

$$(4.5) \qquad \alpha\,ds^1 + \beta\,ds^2 = 0,$$

dont les éléments caractéristiques satisfont aux deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ *du système de Pfaff S, considéré.*

Inversement, on peut s'en assurer par le même calcul que, si l'équation (4. 5) est de classe sept et telle que ses éléments caractéristiques satisfont, tous, les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, nous avons $f(\alpha, \beta) = 0$ et à cette équation corresponde une famille d'éléments singuliers du système S.

Comme nous l'avons déjà dit, l'équation $ds^1 = 0$ est, en général, de classe sept. Mais, *il peut arriver que, pour un certain système de solutions* (α, β) *de l'équation* (4. 2'), *l'équation* $ds^1 = 0$ *correspondante soit de classe cinq, trois ou un.* Si elle est de *classe cinq,* en la supposant réduite à une forme canonique, elle s'écrira

$$(4.6) \qquad ds^1 = dy^7 - y^4\,dy^1 - y^5\,dy^2 = 0$$

et son covariant bilinéaire est

$$\Delta s^1 = dy^4\,dy^1 - dy^5\,dy^2.$$

Avant de tirer profit, on doit remarquer que, si l'on peut trouver, parmis les équations $\alpha\,ds^1 + \beta\,ds^2 = 0$ du système S, une équation de classe inférieure à sept, le couple (α, β) est une solution de l'équation (4.2'). En effet, une telle équation corresponde toujours, quel que soit l'autre équation de S, à une famille d'éléments singuliers et par suite à une racine de l'équation (4.2'). Pour démontrer cela, il suffit d'observer que, si l'équation trouvée est de classe cinq, en la supposant

réduite à la forme canonique (4.6), les éléments linéaires, définis par les six relations

$$(4.6') \qquad dy^1 = dy^2 = dy^4 = dy^5 = dy^7 = 0, \quad ds^2 = 0,$$

sont des éléments singuliers de S, car elles sont en involution, relativement à l'équation $ds^1 = 0$, avec tous les autres éléments linéaires intégraux du système.

La même chose se passe si l'équation $ds^1 = 0$ est de *classe trois*, car alors, en l'écrivant sous la forme canonique

$$(4.7) \qquad ds^1 = dy^2 - y^3 dy^1 = 0,$$

nous aurons

$$\Delta s^1 = dy^3 \delta y^1 - dy^1 \delta y^3$$

et tous les éléments linéaires intégraux définis par les équations

$$(4.7') \qquad dy^1 = dy^2 = dy^3 = 0, \quad ds^2 = 0,$$

sont des éléments singuliers et l'équation $ds^1 = 0$ est, en ce cas aussi, une équation singulière du système de Pfaff S.

Quand l'équation $ds^1 = 0$ est de classe un, il n'y a pas d'éléments singuliers pour S.

Par suite, *dans un système S de classe huit, il y a au plus trois équations singulières de classe inférieure à sept.*

Nous pouvons donc énoncer les résultats précédents, comme il suit.

Si (α, β) *est un système de solutions de l'équation* (4.2'), *à ce système corresponde toujours une équation* $d\sigma \equiv \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = 0$, *telle que tous ses éléments caractéristiques satisfont aux deux équations* $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ *du système S, si elle est de classe sept. Mais cette équation peut être aussi de classe cinq, trois ou un.*

Inversement, lorsque l'équation $d\sigma \equiv \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = 0$ *est de classe sept et ses éléments caractéristiques satisfont, tous, les deux équations du système de Pfaff S, ou si* $d\sigma = 0$ *est de classe cinq, trois ou un, le couple* (α, β) *constitue une solution de l'équation* $f(\alpha, \beta) = 0$.

Obs. Retournons-nous, pour un instant, à l'équation (4.3') et regardons les différentielles dy^1, dy^2, dy^4, dy^5, dy^6, dy^8 comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace S_5. Alors, les quatre équations (4.3'') représentent une variété linéaire à une dimension et la relation

$$\Delta s^1 = B_3\, dy^3\, dy^1 + B_4\, dy^4\, dy^1 + B_5\, dy^5\, dy^1 + B_6\, dy^6 dy^1 + \\ + dy^3\, dy^4 + dy^5\, dy^5 = 0, \text{ (mod. } ds^1, ds^2)$$

est la condition pour que cette variété rencontre la droite définie par les deux points de coordonnées $(dy^1, dy^3, dy^4, dy^5, dy^6, dy^8)$ et $(\delta y^1, \delta y^3, \delta y^4, \delta y^5, \delta y^6, \delta y^8)$.

D'une façon générale, on peut dire ce qui suit :

L'équation

$$\Delta\sigma = \alpha\,\Delta s_1 + \beta\,\Delta s^2 = 0 \text{ (mod. } ds^1, ds^2), \tag{4. 8}$$

représente, quels que soient les coefficients α, β et dans l'inteprétation géométrique adoptée dès le debut, un faisceau de complexes linéaires de l'espace S_5, dont les complexes de base sont $\Delta s^1 = 0$, $\Delta s^2 = 0$. Un de ces complexes n'est pas, en général, singulier. Toute fois, il y a dans le faisceau de tels complexes et précisement ce qui correspondent aux valeurs de α, β annulant le déterminant

$$D(\alpha, \beta) = |\,\alpha\, a_{jk} + \beta\, b_{jk}\,|$$

symétrique gauche d'ordre six. Ces valeurs de α, β sont donc les racines d'une équation en $\frac{\beta}{\alpha}$ du troisième degré $f(\alpha, \beta) = 0$ et par suite on aura trois valeurs, en général destinctes, de $\frac{\beta}{\alpha}$, constituant des racines doubles pour cette équation. Ces valeurs annulent le déterminant $D(\alpha, \beta)$ et ses mineurs d'ordre cinq mais n'annulent pas les mineurs d'ordre quatre, c'est-à-dire, que pour l'une de ces valeurs de (α, β) le déterminant $D(\alpha, \beta)$ est de rang quatre. Il s'en suit que, *dans le faisceau (4.8), il y a trois complexes singuliers, qui sont de seconde espèce, chacun d'entre eux ayant une S_1 fondamentale (variété linéaire à une dimension), appartenant toutes à l'espace S_5 donc étant indépendantes*, résultat qui s'accorde avec celui obtenu au commencement de ce paragraphe.

Dans les considérations précédentes, nous avons laissé de coté, le cas où l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$ pourrait se réduire à une indentité, c'est-à-dire le cas où le déterminant $D(\alpha, \beta)$ serait nul identiquement. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$|\,a_{jk}\,| = 0\,,\ |\,b_{jk}\,| = 0. \tag{4. 9}$$

Mais, la première relation (4. 9) représente la condition nécessaire et suffisante pour que le complexe défini par l'équation $\Delta s^1 = 0$ (mod. ds^1, ds^2), soit un complexe singulier et donc que toutes ses droites rencontrent une variété linéaire S_1 de l'espace S_5. En effet, cette condition exprime qu'ils existent des points $(dx^1, \ldots, dx^6)$, tels qu'une droite quelconque qui passe par eux, appartient au complexe.

Donc, si le déterminant $D(\alpha, \beta)$ est identiquement nul, il en résulte, compte tenant des équations (4. 9), que les deux complexes de base du faisceau $\Delta\sigma = 0$ (mod. ds^1, ds^2) sont, tous les deux, des com-

plexes singuliers et qu'il en est de même avec tous les complexes du faisceau. Cela aura lieu seulement si les variétés fondamentales S_1^1, S_1^2 des deux complexes de base se coupent et donc sont situées dans une même S_2. Le point d'intersection P représente alors un élément caractéristique de S. En effet, l'équation $ds_1 = 0$, que l'on obtient de $d\sigma \equiv \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = 0$ en faisant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, correspond à une famille d'éléments singuliers, qui sont représentés par les points de S_1^1. De même, en prenant $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on voit aussi que l'équation $ds^2 = 0$ correspond à une seconde famille d'éléments singuliers, figurés par les points de la S_1^2. L'équation $d\sigma = 0$ ne peut correspondre à une famille d'éléments singuliers, quels que soient α, β, que si les deux variétés linéaires S_1^1, S_1^2 sont dans une même variété linéaire S_2, ayant donc un point commun P, car nous n'avons que les deux familles précédentes d'éléments singuliers. Le point P correspond ainsi à un élément caractéristique, c'est-à-dire un élément linéaire intégral en involution avec tous les autres élément linéairs intégraux de S, et le système S est alors de classe sept. Une droite quelconque, qui passe par le point P, représente une famille d'éléments singuliers du système S, correspondante à une équation de la forme $d\sigma = 0$.

D'ailleurs, l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$ se réduit à une identité toutes les fois que le système S est de classe inférieure à huit. Il en est de même si le système admet des éléments caractéristiques. En effet, dans ce cas, les éléments intégraux (dx^k) doivent être en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux (δx^k) de S, relativement aux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ et alors, les douze équations

$$a_{jk}\, dx^k = 0,\quad b_{jk}\, dx^k = 0 \quad (jk = 1, 2, \ldots, 6) \tag{4.10}$$

admettent des solutions non toutes nulles en $dx^1, \ldots, dx_6$. Par suite, tous les déterminants à six lignes, qu'on peut déduire du tableau des coefficients a_{jk}, b_{jk}, sont nuls et donc, pour α, β quelconques, le déterminant $D(\alpha, \beta)$ sera nul lui aussi.

Lorsque les équations (4. 10) se réduisent à quatre équations distinctes seulement, la famille d'éléments singuliers qui corresponde à l'équation $d\sigma = 0$ est constituée par une variété linéaire S_1, les points de laquelle représentent tous des éléments caractéristiques de S. Notre système de Pfaff est, dans ce cas aussi, de classe inférieure à huit.

Enfin, si le système de Pfaff S est complètement intégrable, l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$ se réduit, évidemment, aussi à une identité.

5.— Un système S de deux équations à huit variables, est certainement de classe huit, si les coefficients de ses équations ne sont pas

assujettis à certaines conditions d'égalité. L'équation $t(\alpha, \beta) = 0$ a alors trois racines distinctes $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ et à chacune d'elles correspond une famille d'élément singuliers de même qu'une équation de classe sept, de la forme $d\sigma = \alpha ds^1 + \beta ds^2 = 0$, ayant la propriété que ses éléments caractéristiques satisfont, tous, les deux équations du système S. Par conséquent nous pouvons dire que :

Tout système S de deux équations de Pfaff à huit variables, de classe huit, peut, en général, être ramené par un changement de variables, seulement de trois façons différents, à la forme

$$(5.1) \quad \begin{cases} ds^1 = dy^7 + y^2\, dy^1 + y^4\, dy^3 + y^6\, dy^5 = 0 \\ ds^2 = a_1\, dy^1 + a_2\, dy^2 + a_3\, dy^3 + a_4\, dy^4 + a_5\, dy^5 + a_6\, dy^6 = 0, \end{cases}$$

où les coefficients a_i sont des fonctions quelconques des huit variables $y^1, \ldots, y^8$ indépendantes.

Il faut obsérver que toutes les opérations qui sont nécessaires pour obtenir cette forme (5. 1), sont des opérations linéaires. En effet, on doit d'abord résoudre l'équation de degré trois $t(\alpha, \beta) = 0$ et ensuite de réduire une forme de Pfaff à la forme canonique. Quant aux huit variables $y^1, \ldots, y^8$, elles sont déterminées seulement abstraction faite d'une transformation de contact. D'autre part, puisque y^8 n'entre pas dans l'équation $ds^1 = 0$, on peut même remplacer cette variable, par une fonction arbitraire des variables restantes et d'une nouvelle variable u.

Nous avons appellée équation singulière de S, une équation $d\sigma = 0$ qui corresponde à un système de solutions (α, β) de l'équation $t(\alpha, \beta) = 0$, non toutes nulles, à chaque famille d'éléments singuliers de ce système correspondant une telle équation et une seule. Un système de classe huit possède — généralement — *trois* équations singulières de classe sept. Mais il peut arriver qu'une des équations singulières ou même toutes les trois, soient de classe inférieure à classe sept et aussi qu'il n'y ait que deux ou une seule équation singulière pour le système S, comme nous verrons dans la suite.

6.—La forme réduite (5. 1), à laquelle peut être ramené en général le système S, peut aussi s'obtenir directement, en conservant les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ sous la forme non résolue par rapport à dx^7, dx^8, donc sous la forme

$$(6.1) \quad \begin{aligned} ds^1 &= A_i\, dx^i = 0, \\ ds^2 &= B_i\, dx^i = 0, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8).$$

Pour cela il sera suffisant de montrer que le système (6. 1) peut être réduit de trois façons différents, à avoir la forme

$$(6.2)\qquad \begin{aligned} d\sigma^1 &= \alpha_k\, dy^k = 0, \\ d\sigma^2 &= \beta_k\, dy^k = 0, \end{aligned} \qquad (k = 1,2, \ldots, 7),$$

où les coefficients α_k, β_k sont fonctions seulement des sept variables y^k.

Dans l'espace des variables $y^1, \ldots, y^8$, les équations

$$(6.3)\qquad y^k = c^k, \qquad (k = 1,2, \ldots, 7),$$

définissent une famille de caractéristiques de l'équation $d\sigma^1 = 0$, à une dimension, dont tous les éléments linéaires vérifient aussi l'autre équation, $d\sigma^2 = 0$.

Supposons maintenant que, inversement, une équation telle que $d\sigma^1 = \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = 0$, admette une famille de caractéristiques à une dimension et que ses éléments linéaires vérifient les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$. Les fonctions $y^1, \ldots, y^8$ étant distinctes des variables x^i, on peut faire, par un changement convenable de variables, tel que les relations (6.3) représentent cette famille d'éléments linéaires caractéristiques. Par suite, dans les nouvelles variables, l'équation $d\sigma = 0$ pourra s'écrire sous la forme

$$(6.4)\qquad d\sigma^1 = \alpha_k\, dy^k = 0, \qquad (k = 1,2, \ldots, 7).$$

En prenant une autre équation du système (6.1), $d\sigma^2 = 0$, qui soit distincte de $d\sigma^1 = 0$, elle ne pourra non plus contenir la différentielle dy^8 car, par hypothèse, si l'on fait $dy^k = 0$ $(k = 1,2, \ldots, 7)$, les deux équations doivent être satisfaites; donc, elle aura l'expression suivante

$$(6.4')\qquad d\sigma^2 = \beta_k\, dy^k = 0, \qquad (k = 1, \ldots, 7).$$

Les éléments linéaires précédents doivent satisfaire, de plus, au système différentiel qui définit les caractéristiques de l'équation $d\sigma^1 = 0$ et qui s'écrit

$$(6.5)\qquad \alpha_{ij}\, dy^i = \alpha_i\, dt, \qquad (i, j = 1,2, \ldots, 8),$$

où l'on à posé $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} - \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela arrive, sont

$$(6.6)\qquad \frac{\alpha_{18}}{\alpha_1} = \frac{\alpha_{28}}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\alpha_{78}}{\alpha_7}$$

ou bien, en tenant compte des expressions des α_{ij},

$$(6.6')\qquad \frac{\partial \log \alpha_1}{\partial y^8} = \frac{\partial \log \alpha_2}{\partial y^8} = \ldots = \frac{\partial \log \alpha_7}{\partial y^8}.$$

De ces relations (6.6') on en déduit facilement que le rapport de deux quelconques des coefficients α_i, ne dépend pas de variable y^8 et on peut donc supposer que les α_i eux-mêmes ne contiennent pas cette

variable. Par cela nous sommes arrivés à donner au système S, la forme (6.2) annoncée.

Nous voyons ainsi qu'il suffit de déterminer une combinaison linéaire $d\sigma = 0$ $(\alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = C)$, telle qu'elle admette une famille d'éléments linéaires caractéristiques, satisfaisant en même temps aux deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, pour qu'on puisse réduire le système S à la forme (6.2) et par suite à la forme réduite (5.1).

On peut trouver facilement les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A_i , B_i du système (6.1), pour que ce soit l'équation $ds^1 = 0$ ayant la propriété de $d\sigma = 0$. Ecrivons, pour cela, le système correspondant à (6.5), auquel on adjoint les deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$. Il sera

$$(6.7)\qquad \begin{cases} A_{ij}\, dx^j = A_i\, dt \\ A_i\, dx^i = 0 \\ B_i\, dx^i = 0 \end{cases} \qquad \left(A_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i},\ i, j = 1, 2, \ldots, 8\right).$$

Ces équations doivent avoir un système de solutions en dx^i , dt, tel que les dx^i ne soient pas tous nuls. Or, pour qu'il ne soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que dans le tableau des coefficients du système (6.7), c'est-à-dire

$$(6.7')\qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & A_2 & \ldots\ldots & A_{12}\ A_1 \\ A_{21} & 0 & \ldots\ldots & A_{28}\ A_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{81} & A_{82} & \ldots\ldots & 0\ \ A_8 \\ A_1 & A_2 & \ldots\ldots & A_8\ 0 \\ B_1 & B_2 & \ldots\ldots & B_8\ 0 \end{array} \right\|$$

tous les déterminants à neuf lignes, soient nuls, Mais, les conditions qu'on obtient ainsi, se réduisent à une seule. En effet, si l'on ajoute au tableau (6.7′) une dernière colonne, dont les éléments soient identiques à ceux de sa dernière ligne, on obtient un déterminant D, lequel devient si l'on change les signes des deux dernières lignes (ou colonnes), symétrique gauche d'ordre dix. En développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière colonne, on s'en rende compte immédiatement que, si tous les mineurs d'ordre neuf, qu'on peut déduire de (6.7′) sont nuls, D s'annule lui-aussi.

Inversement, lorsque $D = 0$, ses mineurs du premier ordre sont aussi tous nuls, car D est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair. Ils seront donc nuls, en particulier, tous les mineurs qui corres-

pondent aux éléments de la dernière colonne de (6.7'). Donc, tous les déterminants à neuf lignes, qu'on déduit de (6.7'), sont nuls et par suite, *pour que l'equation* $ds^1 = 0$ *ait une famille de caractéristiques dont tous les éléments linéaires satisfassent aux équations* $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, *il est nécessaire et suffisant que le déterminant* D *soit nul.*

Nous nous proposons maintenant de voir quelle est la condition pour que la propriété précédente soit valable pour l'équation

$$d\sigma \equiv \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = 0,$$

les coefficients α, β n'étant pas nuls à la fois. Soit par ex. $\alpha \neq 0$. Le covariant bilinéaire $\Delta\sigma$ aura l'expression

$$\Delta\sigma = \omega_{ij}\, dx^i\, dx^j \ , \quad (i, j = 1, 2, \ldots, 8) \tag{6.8}$$

et les coefficients ω_{ij} ont les valeurs

$$\omega_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta B_{ij} + A_i \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - A_j \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} + B_i \frac{\partial \beta}{\partial x^j} - B_j \frac{\partial \beta}{\partial x^i}. \tag{6.8'}$$

Pour arriver à la condition cherchée, on devra remplacer, dans le déterminant D de tout-à-l'heure, les coefficients A_i et A_{ij}, par $\alpha A_i + \beta B_i$ et ω_{ij} respectivement.

Multiplions. dans le déterminant ainsi obtenu, les éléments de la dernière ligne (colonne) par β et retranchons-les des éléments de la ligne (colonne) précédente ; faisons ensuite la même opération sur les deux dernières colonnes après quoi divisons tout par α^2. Multiplions encore les élément de la neuvième ligne par $\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}$ et ceux de la dernière ligne, par $\frac{\partial \beta}{\partial x^i}$ et ajoutons-lès aux éléments de la i-ème ligne. De même, retranchons les éléments correspondants, de la neuvième colonne multipliés par $\frac{\partial \alpha}{\partial x^j}$ et ceux de la dernière colonne multipliés par $\frac{\partial \beta}{\partial x^j}$, des éléments de la j-ième colonne. Nous arrivons, après tous ces opérations, à la condition suivante

$$D(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha A_{12} + \beta B_{12} & \cdots & \alpha A_{18} + \beta B_{18} & A_1 & B_1 \\ \alpha A_{21} + \beta B_{21} & 0 & \cdots & \alpha A_{28} + \beta B_{28} & A_2 & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha A_{81} + \beta B_{81} & \cdots & \cdots & 0 & A_8 & B_8 \\ A_1 & \cdots & \cdots & A_8 & 0 & 0 \\ B_1 & \cdots & \cdots & B_8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $d\sigma = 0$ *ait une famille d'éléments caractéristiques satisfaisant*

tous aux deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$. Cette équation $D(\alpha, \beta) = 0$ est la correspondante de $f(\alpha, \beta) = 0$.

Il va sans dire, qu'on aurait obtenu la même condition, si l'on avait supposé le coefficient $\beta \neq 0$, au lieu de α.

On peut obtenir directement l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$ qui nous détermine les trois familles d'éléments singuliers, en conservant les deux équations de S sous la forme générale (6.1). Le covariant bilinéaire de l'équation $d\sigma = 0$ a alors l'expression (6.8), avec les valeurs (6.8') pour les coefficients ω_{ij}.

Si l'on veut qu'on ait $\Delta\sigma = 0$, pour un élément intégral (dx^i), quel que soit l'autre élément intégral (δx^i), on doit avoir identiquement, quels que soient les δx^i et λ, μ étant deux paramètres arbitraires,

$$\Delta\sigma + \lambda A_i \, \delta x^i + \mu B_i \, \delta x_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 8). \tag{6.9}$$

Il s'en suit alors que, les coordonnées (dx_i), d'un élément singulier, de même que λ, μ, doivent satisfaire aux équations

$$\begin{cases} \omega_{ij} \, dx_i + \lambda A_j + \mu B_j = 0 \\ A_i \, dx_i = 0 \\ B_i \, dx_i = 0 \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 8). \tag{6.9'}$$

Pour que ces équations admettent des solutions non toutes nulles en dx^i, λ, μ, le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{18} & A_1 & B_1 \\ \omega_{21} & 0 & \cdots & & A_2 & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{81} & \omega_{82} & \cdots & 0 & A_8 & B_8 \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_8 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_8 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{6.10}$$

doit être nul. Par quelques opérations simples effectuées sur les lignes et les colonnes de ce déterminant, on arrive facilement à l'équation $D(\alpha, \beta) = 0$ obtenue précédemment.

7.—Revenons maintenant au système (5.1) et écrivons-le sous la forme

$$\begin{cases} ds^1 = dz - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 = 0, \\ ds^2 = a_1 \, dp^1 - a_2 \, dp^2 - a_3 \, dp^3 - b_1 \, dx^1 - b_2 \, dx^2 - b_3 \, dx^3 = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

l'une au moins des fonctions a_i, b_i, contenant la huitième variable u, car si le rapport de deux de ces coefficients ne dépendrait pas de cette variable u, le système serait de classe inférieure à huit.

Tout d'abord, en effectuant éventuellement un changement de va-

riables, on peut supposer que le coefficient a, est différent de zéro et donc on peut le prendre égal à l'unité. Si a_2 contient u, on peut le prendre pour variable u même. Si a_2 ne dépend pas de u, mais u figure dans b_2, on peut écrire l'équation $ds^1 = 0$ sous la forme

$$(7.2) \qquad ds^1 = d(z - p^2 x^2) - p^1 dx^1 + x^2 dp^2 - x^3 dp^3 = 0$$

et par la transformation

$$(7.2') \qquad z = z - p^2 x^2,\ \bar{x}^2 = p^2,\ \bar{p}^2 = -x^2,\ \bar{x}^k = x^k,\ \bar{p}^k = p^k\ (k = 1,3)$$

qui change le rôle des variables x^2 et p^2, nous sommes dans le premier cas. Si $a_2 \neq 0$ et $b_2 = 0$, une transformation convenable nous ramène aussi au premier cas. Si $a_2 = b_2 = 0$, la variable u se trouve nécessairement dans l'une des fonction b_1, a_3, b_3. Si a_3 dépend de u, on peut prendre $a_3 = u$. S'il est indépendant de u, cette variable se trouvera forcément dans b_1 ou b_3. Si elle figure dans b_3, en écrivant l'équation $ds^1 = 0$

$$ds^1 = d(z - p^3 x^3) - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 + x^3 dp^3 = 0$$

on peut, par une transformation simple, analogue à (7.2'), permuter les variables x^3 et p^3, ce qui nous conduit au cas précédent. Si b_3 ne dépend lui-aussi de u, sans qu'il soit nul, u se trouve sûrement dans b_1, mais on peut se ramener à un cas déjà discuté, par une transformation de variables. Si $a_3 \neq 0$ et $b_3 = 0$, nous obtenons par une transformation convenable, le cas précédent. Nous avons donc encore la possibilité $a_3 = b_3 = 0$, $b_1 \neq 0$ et quand, en prenant $b_1 = u$, notre système devient

$$(7.3) \qquad \begin{aligned} ds^1 &= dz - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 = 0, \\ ds^2 &= dp^1 - u\, dx^1 = 0. \end{aligned}$$

Mais, en effectuant la transformation de variables

$$(7.3') \qquad \begin{aligned} &x^1 = \bar{p}^2 + \bar{p}^3 \ ,\ x^2 = \bar{p}^3 + \bar{p}^1 \ ,\ x^3 = \bar{p}^1 + \bar{p}^2, \\ &p^1 = \bar{p}^1 - \bar{x}^2 \ ,\ p^2 = \bar{p}^2 - \bar{x}^1 \ ,\ x^3 = \bar{p}^3, \\ &z = \bar{z} + \bar{p}^1 \bar{p}^2 + \bar{p}^1 \bar{p}^3 + \bar{p}^2 \bar{p}^3 - \bar{p}^1 \bar{x}^1 - \bar{p}^2 \bar{x}^2 - \bar{p}^3 \bar{x}^3, \end{aligned}$$

sur les équations (7.3), le système devient

$$(7.3'') \qquad \begin{aligned} ds^1 &= d\bar{z} - \bar{p}^1 d\bar{x}^1 - \bar{p}^2 d\bar{x}^2 - \bar{p}^3 d\bar{x}^3 = 0, \\ ds^2 &= d\bar{p}^1 - d\bar{x}^2 - u(d\bar{p}^2 + d\bar{p}^3) = 0. \end{aligned}$$

Cela nous montre que le système de Pfaff (7.1) peut toujours être écrit sous la forme réduite suivante

$$(I) \qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 = 0 \\ ds^2 = dp^1 - u\, dp^2 - a_3 dp^3 - b_1 dx^1 - b_2 dx^2 - b_3 dx^3 = 0, \end{cases}$$

où les coefficients a_3, b_i sont des fonctions des variables x^i, p^i, z et u.

Obs. I. Nous avons vu que pour arriver au système (7.1), on doit d'abord résoudre l'équation $f(\alpha,\beta)=0$ et ensuite ramener l'équation singulière $\alpha\, ds^1+\beta\, ds^2=0$ à une forme canonique. Dans cette forme canonique, les variables x^i, p^i, z qui y figurent, sont déteminées seulement abstraction faite d'une transformation de contact. En ce qui concerne la dernière variable u, elle peut être choisie à volonté, seulement avec la condition qu'elle soit distincte des autres sept variables du système.

La seconde équation du système (7.1) peut encore être simplifiée, en nous servant de cette indétermination de la variable u. En effet, en effectuant si c'est nécessaire, une transformation de variables, nous pouvons supposer que le rapport $\frac{a_2}{a_1}$ dépend de u. En prenant alors $\frac{a_2}{a_1}=-u$, le système (7.1) reçoit la forme (I), les coefficients a_i et b_i étant supposés divisés par a_1).

Si le système (7.1) est un système quelconque à huit variables, il n'est pas possible de lui trouver une forme réduite contenant moins de *quatre* coefficients arbitraires, car, en supposant les équations $ds^1=0$, $ds^2=0$ résolues par rapport à deux des différentielles, elles comprennent douze coefficients arbitraires. Quand on fait un changement de variables, nous disposons donc de huit fonctions arbitraires, qui pourront être choisies de manière que huit des coefficients du système, qu'on obtient après ce changement de variables, aient des expressions choisies à volonté. Par conséquent, il reste dans le système transformé, seulement *quatre* coefficients indéterminés.

Obs. II. On peut écrire facilement les équations différentielles qui déterminent la famille d'éléments singuliers correspondant à l'équation $ds^1=0$. En effet, on a

$$\Delta s^1=dx^1\,dp^1+dx^2\,dp^2+dx^3\,dp^3=$$

$$=-(u\,dp^2+a_3\,dp^3+b_2\,dx^2+b_3\,dx^3)\,\delta x^1+(b_2\,dx^1-dp^2)\,\delta x^2+$$

$$+(b_3\,dx^1-dp^3)\,\delta x^3+(u\,dx^1+dx^2)\,\delta p^2+(a_3\,dx^1+dx^3)\,\delta p^3\ (\mathrm{mod}.ds^1,ds^2) \tag{7.5}$$

de sorte que, si $\Delta s^1=0$, les coefficients de δx^1, δx^2, δx^3, δp^2, δp^3 égalés à zero, nous donnent les équations cherchées, qui peuvent s'écrire

$$\frac{dx^1}{1}=\frac{dx^2}{-u}=\frac{dx^3}{-a_3}=\frac{dp^1}{b_1}=\frac{dp^2}{b_2}=\frac{dp^3}{b_3}=\frac{dz}{p^1-up^2-a_3p^3}. \tag{7.5'}$$

8. — Dans la recherche des éléments singuliers d'un système de Pfaff S, à huit variables, on peut aussi s'en servir des formes canoniques auxquelles peuvent être réduits les covariants bilinéaires Δs^1, Δs^2

des équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ de S. De cette façon on peut mettre facilement en évidence, le cas où l'une des équations de S ou les deux en même temps, sont des équations singulières. Quant au système d'équations qui definissent les familles d'éléments singuliers correspondantes, ils seront donnés par certains systèmes de Pfaff.

Considérons, en effet, le système S sous la forme générale du n°. 2. Les covariants bilinéaires Δs^1, Δs^2 seront en général du *rang six* (mod. ds^1, ds^2). Mais, on peut toujours supposer qu'une des équations de S a son covariant de *rang quatre*. En effet, Δs^1 (mod. ds^1, ds^2) étant de rang six, nous pouvons le réduire à la forme canonique

$$\Delta s^1 = ds^3\, ds^4 + ds^5\, ds^6 + ds^7\, ds^8 \qquad (\text{mod. } ds^1, ds^2) \tag{8.1}$$

et le covariant Δs^2 est de la forme

$$\Delta s^2 = A_{kl}\, ds^k\, ds^l \ (k, l = 1,2, \ldots, 8), \qquad (ds^a\, ds^b = ds^a\, \delta s^b - ds^b\, \delta s^a) \tag{8.2}$$

où $ds^3, \ldots, ds^8$ sont certaines formes de Pfaff (combinaisons linéaires des différentielles $dx^1, \ldots, dx^6$).

En prenant maintenant au lieu de $ds^2 = 0$, l'équation

$$d\bar{s}^2 \equiv ds^2 - \lambda\, ds^1 = 0$$

(avec λ arbitraire), on peut déterminer λ de façon que le rang du covariant $\Delta\bar{s}^2$ (mod. ds^1, ds^2) qui est en général six, soit égal à quatre, car, cela revient à prendre pour λ, l'une des racines de l'équation caractéristique qui s'obtient en égalant à zéro le déterminant d'ordre six, symétrique gauche, des équations provenues par l'annulation des dérivées partielles de $\Delta\bar{s}^2$, par rapport à $ds^3, \ldots, ds^8$. Cette équation caractéristique étant du troisième degré en λ, il s'en suit qu'on peut faire cette opération de réduction, de trois façons différents.

On peut donc supposer d'avance, qu'un des deux covariants Δs^1, Δs^2 – par ex. Δs^1 – est de rang quatre (mod. ds^1, ds^2), de sorte qu'on peut l'écrire

$$\Delta s^1 = ds^3\, ds^4 + ds^5\, ds^6 \ (\text{mod. } ds^1, ds^2), \tag{8.3}$$

les formes $ds^3, \ldots, ds^5$ étant choisies convenablement. Dans ce cas, l'équation $ds^1 = 0$, réduite à la forme canonique, s'écrira

$$ds^1 = dz - p^1\, dx^1 - p^2\, dx^2 - p^3\, dx^3 = 0, \tag{8.3'}$$

en désignant par $x^1, x^2, x^3, p^1, p^2, p^3, z, u$ les huit variables du système S. On dit encore que, *l'équation $ds^1 = 0$ est une équation singulière de S.*

En ce qui concerne l'équation $ds^2 = 0$, on doit tenir compte du fait que le cov. Δs^1 (mod. ds^1, ds^2) est de rang quatre; cela signifie

qu'elle ne peut plus contenir la différentielle de la variable u, de sorte qu'on peut l'écrire sous la forme

$$(8.4)\quad ds^2 = dp^1 - a_2\,dp^2 - a_3\,dp^3 - b_1\,dx^1 - b_2\,dx^2 - b_3\,dx^3 = 0,$$

l'une au moins des fonctions a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 contenant la variable u.

Ainsi nous sommes arrivés à la forme réduite (5.1) du système S, donnée auparavant.

En partant de cette forme réduite de S, nous avons montré, dans un autre travail [1]), comment s'obtiennent toutes les formes canoniques auxquelles peuvent être réduits les covariants Δs^1, Δs^2 (mod. ds^1, ds^2).

Nous avons mis alors en relief le rôle que joue, dans ce problème de réduction à des formes canoniques de Δs^1, Δs^2, la quantité

$$(8.5)\quad m = a_2\frac{\partial b_2}{\partial u} + a_3\frac{\partial b_3}{\partial u} - b_2\frac{\partial a_2}{\partial u} - b_3\frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial b_1}{\partial u},$$

qui a été trouvée d'ailleurs, dans le cas général d'un système de deux équations de Pfaff à $2p+2$ variables, par Mr. G. Vrânceanu, et qui a lui montré aussi l'importance [2]).

Ainsi, si $m \neq 0$ et le terme en $ds^3\,ds^4$ du covariant Δs^1 (mod. ds^1, ds^2) n'est pas nul, ce qui arrive seulement si une certaine équation caractéristique, de degré deux, a des racines simples, les covariants Δs^1, Δs^2 peuvent être réduits à la forme canonique suivante:

$$(I')\quad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\,ds^4 + ds^5\,ds^6 \\ \Delta s^2 = ds^7\,ds^8 + ds^5\,ds^6 \end{cases} (\text{mod. } ds^1, ds^2),$$

$ds^3, \ldots, ds^8$ étant certaines formes de Pfaff, indépendantes.

C'est la forme canonique à laquelle se réduisent, en général, les covariants bilinéaires d'un système de deux équations de Pfaff de classe huit, à 8 variables. Les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ sont, toutes le deux, des équations singulières de S.

Les deux familles d'éléments singuliers, correspondant aux èquations singulières $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, sont données par les équations

$$(S_1)\quad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^5 = ds^6 = 0,$$

$$(S_2)\quad ds^1 = ds^2 = ds^5 = ds^6 = ds^7 = ds^8 = 0,$$

respectivement.

Le système S admet, dans ce cas, ce que Mr. G. Vranceanu appelle *une décomposition minimale unique* [3]).

1) St. Petrescu, *Sur les systèmes de deux équations de Pfaff à huit variables, de classe huit*, Bul. Fac. de Ştiinţe Cernăuţi, Vol. X, 1936, p. 38–56.

2) G. Vrânceanu, *La décomposition minimale d'un système de Pfaff*, Id. Vol. VIII, 1934, p. 97–112.

3) G. Vrânceanu, *Idem.*

Lorsque le terme en $ds^3\,ds^4$ du covariant Δs^1 (mod. ds^1, ds^2) est nul, ce qui se passe toujours, si l'équation caractéristique dont on vient de parler a une racine double, on peut ramener les covariants de S à la forme canonique

$$(II') \qquad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\,ds^5 + ds^4\,ds^7 \\ \Delta s^2 = ds^7\,ds^8 + ds^5\,ds^6 \end{cases} \text{(mod. } ds^1,\ ds^2)$$

et *le système S possède, dans ce cas aussi, une décomposition minimale unique.*

Supposons maintenant que *la quantité m soit nulle.* Alors, le covariant Δs^2 n'a plus de terme en $ds^7\,ds^8$ et si dans le covariant Δs^1, le terme $ds^5\,ds^6$ n'est pas nul, on obtient la forme canonique (II'), pour nos covariants. Par contre, si le terme en ds^5, ds^6 manque dans le covariant Δs^1, on obtient une autre forme canonique, distincte des deux premières, à savoir

$$(III') \qquad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\,ds^5 + ds^4\,ds^6 \\ \Delta s^2 = ds^3\,ds^7 + ds^4\,ds^8 + ds^5\,ds^6 \end{cases} \text{(mod. } ds^1,\ ds^2).$$

Dans ce cas, *la décomposition minimale du système S n'est pas unique* et il possède *une seule équation singulière*, $ds^1 = 0$, l'autre équation, $ds^2 = 0$, pouvant se transformer en $ds^2 \equiv ds^2 + \lambda\,ds^1 = 0$, sans que le rang de son covariant bilinéaire soit modifié.

La famille d'éléments singuliers, correspondante à l'équation $ds^1 = 0$, est donnée par le système de Pfaff suivant

$$(S_1') \qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^5 = ds^6 = 0.$$

Un dernier cas de réduction à la forme canonique, s'obtient en supposant (la quantité m étant toujours nulle), que le terme en $ds^5\,ds^6$ du covariant Δs^2 (mod. ds^1, ds^2) est nul. On a alors la forme canonique

$$(IV') \qquad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\,ds^5 + ds^4\,ds^6 \\ \Delta s^2 = ds^3\,ds^7 + ds^4\,ds^8 \end{cases} \text{(mod. } ds^1,\ ds^2).$$

Le système S n'admet pas, aussi dans ce cas, une décomposition minimale unique et aucune des deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, n'est une équation singulière de S.

En conclusion, *les covariants bilinéaires d'un système de Pfaff S, de deux équations de classe inférieure à sept, peuvent être ramenés à l'une des quatre formes canoniques I', II', III', IV'. Si l'on a les formes canoniques I', II', les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ de S en sont des équations singulières, toutes les deux. Dans le cas de la forme canonique III', seulement l'équation $ds^1 = 0$ est une équa-*

tion singulière de S. Enfin, il n'y a pas d'équation singulière pour le système, si les covariants bilinéaires de S ont la forme canonique IV'.

9.— Dans toutes les considérations précédentes, nous avons supposé que l'équation singulière $d\sigma \equiv \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2 = 0$, corresdondant à un système de solutions (α, β) de l'équation (4.2'), est de classe sept. Considérons maintenant le cas où cette équation serait de *classe cinq, trois* ou *un.*

Supposons d'abord, que *le système S comprend une équation de classe cinq.* On doit distinguer deux cas, suivant que le covariant bilinéaire de cette équation est de *rang deux* ou *quatre* (mod. ds^1, ds^2).

Dans le premier cas, en supposant que $ds^1 = 0$ est de classe cinq (et en la réduisant à une forme canonique, nous pouvons l'écrire

$$ds^1 = dz - p^1\, dx^1 - p^2\, dx^2 = 0. \tag{9.1}$$

En ce qui concerne l'équation $ds^2 = 0$, elle ne peut plus contenir les différentielles des variables x^3, p^3, u, de sorte qu'on a

$$ds^2 = a_1\, dp^1 + a_2\, dp^2 + b_1\, dx^1 + b_2\, dx^2 = 0, \tag{9.1'}$$

les coefficients a, b dépendant des huit variables x^i, p^i, z et u.

Si le coefficient a_1 est différent de zéro, nous pouvons le prendre égal à l'unité. Ensuite, si les trois fonctions a_2, b_1, b_2 forment avec x^1, x^2, p^1, p^2, z, un système de huit fonctions indépendantes (autrement le système S ne serait pas de classe huit), nous pouvons prendre $a_2 = -u$, $b_1 = -x^3$, $b_2 = -p^3$ et notre système de Pfaff est ramené à la forme canonique simple

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1\, dx^1 - p^2\, dx = 0 \\ ds^2 = dp^1 - u dp^2 - x^3\, dx^1 - p^3\, dx^2 = 0. \end{cases}$$

Mais, avant de faire la réduction de l'équation $ds^2 = 0$ à une forme canonique, nous allons montrer que *le système S est, dans ce cas, intégrable explicitement.* En effet, à l'équation singulière $ds^1 = 0$, correspond une famille d'éléments singuliers, définie par les équations suivantes

$$\frac{dx^1}{a_1} = \frac{dx^2}{a_2} = \frac{-dp^1}{b_1} = \frac{-dp^2}{b_2}, \quad dz = p^1\, dx^1 + p^2\, dx^2. \tag{9.2}$$

Le système S considéré est de *genre trois,* puisqu'il admet des intégrales à trois dimensions. Soit M_3 l'intégrale générale de ce système. Elle sera définie par les relations

$$z = f(x^1, x^2),\ p^1 = \frac{\partial f}{\partial x^1},\ p^2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} \tag{9.3}$$

et

MÉRNÖKI TOVÁBBK... INTÉZET MŰEGYETEM

$$(9.3') \quad b_1 + a_1 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = 0, \quad b_2 + a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} = 0,$$

qui s'obtiennent de l'équation $ds^2 = 0$, en tenant compte de (9.2). Ces relations (9.3) et (9.3') nous donnent la possibilité d'exprimer toutes les variables p^1, p^2, p^3, x^3 et z au moyen de trois variables indépendantes x^1, x^2, u par exemple. Sur chaque intégrale M_3, il y a une infinité de multiplicités à une dimension M_1, dépendant d'une fonction arbitraire, dont tous les éléments singuliers, c'est-à-dire d'*une infinité de caractéristiques de Monge, à une dimension.*

Supposons, en effet, qu'on à exprimé les coordonnées d'un point quelconque de l'intégrale M_3, au moyen des trois variables indépendentes x^1, x^2, u. En se déplaçant sur M_3 de façon que les différentielles dx^1, dx^2 satisfassent à la relation

$$(9.4) \quad \frac{dx^1}{a_1} = \frac{dx^2}{a_2},$$

on aura aussi, pour ce déplacement, les relations

$$dp^1 = \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} dx^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} dx^2 = \frac{dx^1}{a_1} \left[a_1 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right] = -\frac{b_1}{a_1} dx^1,$$

en vertu de (9.4) et de la première des (9.3') et par conséquent

$$(9.5) \quad -\frac{dp^1}{b_1} = \frac{dx^1}{a_1}.$$

De même, on a

$$dp^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} dx^1 + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} dx^2 = \frac{dx^1}{a_1} \left[a_2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} + a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right] = -\frac{b_2}{a_1} dx^1$$

et par suite aussi

$$(9.5') \quad -\frac{dp^2}{b_2} = \frac{dx^1}{a_1},$$

d'où la conclusion, ayant en vue (9.4), (9.5) et (9.5').

Si l'on prend le système sous la forme canonique II, les éléments singuliers qui correspondent à l'équation $ds^1 = 0$, sont donnés par les équations

$$(9.6) \quad dx^2 + u\,dx^1 = 0, \quad dp^1 - x^3\,dx^1 = 0, \quad dp^2 + p^3\,dx^1 = 0$$
$$dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 = 0,$$

et l'intégrale générale M_3 de S, peut être donnée par les formules explicites

$$\begin{cases} z = f(x^1, x^2),\ p^1 = \dfrac{\partial f}{\partial x^1},\ p^2 = \dfrac{\partial f}{\partial x^2} \\ x^3 = u\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2},\ p^3 = u\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \end{cases}$$

avec les paramètres x^1, x^2, u, le dernier étant contenu linéairement.

Supposons maintenant que le covariant bilinéaire de l'équation $ds^1 = 0$ *est de rang quatre* (mod. ds^1, ds^2.) Alors le système S est de la forme

$$(9.7)\quad \begin{aligned} ds^1 &= dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 = 0, \\ ds^2 &= a_1\,pd^1 + a_2\,dp^2 + a_3\,dp^3 + b_1\,dx^1 + b_2\,dx^2 + b_3\,dx^3 + c\,du = 0, \end{aligned}$$

les coefficients a, b, c étant des fonctions des huit variables x^i, p^i, z et u.

On ne peut pas avoir en même temps $a_3 = b_3 = c = 0$, puisqu'alors on serait réduits au cas précédent. Nous aurons à considérer aussi deux cas, suivant que la forme auxiliaire (dans laquelle les variables x^1, x^2, z, p^1, p^2 sont regardées comme constantes)

$$\varphi = a_3\,dp^3 + b_3\,dx^3 + c\,du,$$

est *de classe trois* ou *un*.

Si *la forme* φ *est de classe trois*, nous pouvons la réduire, par un changement de variables, à la forme canonique

$$\varphi = du - p^3\,dx^3,$$

et notre système peut être écrit (en changeant légèrement la notation) sous la forme réduite

$$(III)\quad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 = 0 \\ ds^2 = du - p^3\,dx^3 - a_1\,dp^1 - a_2\,dp^2 - b_1\,dx^1 - b_2\,dx^2 = 0 \end{cases}$$

avec a_1, a_2, b_1, b_2 fonctions de x^i, p^i, z et u.

Lorsque *la forme* φ *est de classe un*, elle peut être ramenée à la forme canonique

$$\varphi = du,$$

de sorte qu'on a pour le système S la forme réduite

$$(IV)\quad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 = 0 \\ ds^2 = du - a_1\,dp^1 - a_2\,dp^2 - b_1\,dx^1 - b_2\,dx^2 = 0 \end{cases}$$

contenant, aussi comme la forme réduite III, quatre coefficients arbitraires.

Passons maintenant au cas où *l'une des équations du système S est de classe trois* et soit $ds^1 = 0$ cette équation. Elle pourra être réduite à la forme canonique

$$(9.8)\qquad ds^1 = dz - p^1\,dx^1 = 0$$

et la seconde équation de S s'écrit

(9.8') $ds^2 = a_1 dp^1 + a_2 dp^2 + a_3 dp^3 + b_1 dx^1 + b_2 dx^2 + b_3 dx^3 + c du = 0,$

les coefficients a_i, b_i, c étant toujours fonctions des huit variables du système.

Tout comme dans le cas précédent, nous devons y considérer deux cas, suivant que la forme auxiliaire

$$\varphi_1 = a_2 dp^2 + a_3 dp^3 + b_2 dx^2 + b_3 dx^3 + c du,$$

où l'on regarde les variables x^1, p^1, z comme des constantes, *est de classe cinq* ou *trois.*

Le cas où cette forme φ_1 serait de classe un ou identiquement nulle, conduit à des systèmes S de classe inférieure à huit.

Si *la forme* φ_1 *est de classe cinq*, on peut lui donner la forme canonique

$$\varphi_1 = du - p^2 dx^2 - p^3 dx^3$$

et alors, notre système de Pfaff peut être écrit sous la forme réduite

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1 dx^1 = 0 \\ ds^2 = du - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 - a dx^1 - b dp^1 = 0, \end{cases}$$

qui contient seulement deux coefficients arbitraires, des variables x^1, p^1, z, u.

De même, *si la forme* φ_1 *est de classe trois*, elle aura la forme canonique

$$\varphi_1 = du - p^2 dx^2,$$

de façon qu'on peut donner au système S la forme réduite suivante

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1 dx^1 = 0 \\ ds^2 = du - p^2 dx^2 - a\, dp^1 - b dp^3 - c dx^1 - d dx^3 = 0 \end{cases}$$

où apparaissent *quatre* coefficients arbitraires.

Enfin, il nous reste encore à examiner le cas où *l'équation* $ds^1 = 0$ *est de classe un*, c'est-à-dire le cas où le système S admet une combinaison intégrable. Dans cette hypothèse, en désignant par $du = 0$ cette combinaison intégrable, le système S pourra être écrit sous la forme canonique

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} ds^1 = du = 0 \\ ds^2 = dz - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 = 0 \end{cases}$$

10.—D'après ce qu'on vient de dire, nous voyons que, lorsque le système de Pfaff S est de classe huit, on peut toujours le ramener, par un changement de variales, à l'une des formes suivantes :

1°. L'équation $f(\alpha, \beta) = 0$ a trois racines distinctes, à chacune

desquelles corresponde une équation $d\sigma \equiv \alpha ds^1 + \beta ds^2 = 0$ de classe sept. Le système S peut être écrit de trois façons différents, sous la forme réduite

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 = 0 \\ ds^2 = dp^1 - u dp^2 - a_3 dp^3 - b_1 dx^1 - b_2 dx^2 - b_3 dx^3 = 0, \end{cases}$$

les quatre coefficients de $ds^2 = 0$ étant fonctions de x^i, p^i, z, u $(i = 1,2,3)$. Les équations différentielles qui définissent les éléments singuliers de chaque système, admettent au plus quatre combinaisons intégrables.

2^0. L'équation $f = 0$ a une racine double et une simple, auxquelles correspondent deux équations de classe sept. Le système S peut être ramené de deux façons seulement, à la forme I. Il n'y a que deux familles distinctes d'éléments singuliers pour S et on peut prendre, comme équations singulières, les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ elles-mêmes.

3^0. L'équation $f = 0$ a une racine triple, qui donne une équation $d\sigma = 0$ de classe sept. Le système S peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme I. Il y a une seule équation singulière et les trois familles d'éléments singuliers sont confondues.

4^0. L'équation $f = 0$ a trois racines simples, dont deux correspondent à des équations $d\sigma = 0$ de classe sept et la troisième à une équation de classe cinq. Notre système S peut être ramené de deux façons à la forme I et aussi à l'une des formes suivantes

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} ds^1 = dy^5 - y^3 dy^1 - y^4 dy^2 = 0, \\ ds^2 = dy^3 - y^8 dy^4 - y^6 dy^1 - y^7 dy^2 = 0 ; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} ds^1 = dy^5 - y^3 dy^1 - y^4 dy^2 = 0, \\ ds^2 = dy^3 - y^7 dy^6 - a dy^3 - b dy^4 - c dy^1 - d dy^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} ds^1 = dy^5 - y^3 dy^1 - y^4 dy^2 = 0, \\ ds^2 = dy^8 - a dy^1 - b dy^2 - c dy^3 - d dy^4 = 0, \end{cases}$$

(où a, b, c, d, sont des fonctions des variables y^i $(i = 1, \ldots, 8)$), suivant que le covariant bilinéaire Δs_1 (mod. ds^1, ds^2) est de rang deux (forme canonique II), ou de rang quatre (formes III, IV).

5^0. L'équation $f = 0$ a une racine double, à laquelle correspond une équation $d\sigma = 0$ de classe cinq. Le système pourra être réduit à la forme I et à l'une des formes II, III, IV.

6^0. L'équation $f = 0$ a trois racines simples, deux qui correspondent à des équations $d\sigma = 0$ de classe sept et l'une donnant une équation de classe trois. On peut ramener S à la forme I et aussi à l'une des deux formes

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} ds^1 = dy^5 - y^3 dy^1 = 0, \\ ds^2 = dy^8 - y^4 dy^2 - y^7 dy^6 - a dy^1 - b dy^3 = 0 ; \end{cases}$$

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} ds^1 = dy^5 - y^3\,dy^1 = 0 \\ ds^2 = dy^8 - y^4 dy^2 - a dy^1 - b dy^3 - c dy^6 - d dy^7 = 0 \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients a, b, c, d sont des fonctions des huit variables y^i.

7⁰. L'équation $f=0$ a une racine double donnant une équation de classe sept et une racine simple qui donne une équation $d\sigma = 0$ de classe trois. Le système S peut être ramené à la forme I et à l'une des formes V, VI.

8⁰. L'équation $f=0$ a trois racines simples, correspondant à deux équations $d\sigma=0$ de classe sept et à une de classe un. On peut ramener S à la forme I et à la forme canonique

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} ds^1 = du = 0 \\ ds^2 = dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 - p^3\,dx^3 = 0. \end{cases}$$

Il n'y a pas d'éléments singuliers pour S.

9⁰. L'équation $f=0$ a une racine double et une racine simple, auxquelles correspondent deux équations $d\sigma=0$ de classe sept et un, respectivement. Le système S pourra être réduit à la forme I et à la forme canonique VII.

10⁰. L'équation $f=0$ a trois racines simples, qui donnent une équation $d\sigma=0$ de classe sept et les deux autres de classe cinq. Le système S pourra être ramené à la forme I et à l'une des formes II, III, IV. A la forme canonique II, si le covariant de l'une des équations de classe cinq est de rang deux (mod. S), dans les autres cas aux formes III, IV.

11⁰. L'équation $f=0$ a une racine double et une simple, auxquelles correspondent deux équations $d\sigma=0$ de classe cinq. On peut écrire S sous la forme canonque II, si c'est l'équation correspondante à la racine double qui a son covariant de rang deux (mod. S) et aux deux formes III, IV, si les équations précédentes ont leurs covariants de rang quatre dans S.

12⁰. L'équation $f=0$ a trois racines simples, qui donnent des équations $d\sigma=0$ de classe sept, cinq et trois, respectivement. S aura la forme I et l'une des formes II, III, IV, V ou VI, suivant le cas.

13⁰. L'équation $f=0$ a une racine double, qui correspond à une équation $d\sigma=0$ de classe cinq et une racine simple, donnant une équation de classe trois. Le système S aura l'une des formes II, III, IV ou V, VI, respectivement.

14⁰. L'équation $f=0$ a trois racines simples, donnant des équations $d\sigma=0$ de clase sept, cinq et un. On aura pour S la forme réduite I, l'une des formes II, III, IV et l'une des formes V, VI.

15°. L'équation $f = 0$ a trois racines simples, auxquelles correspondent une équation $d\sigma = 0$ de classe sept et les deux autres de classe trois. Le système S peut être ramené à la forme I et à l'une des formes V, VI.

16°. L'équation $f = 0$ a une racine double et une simple, les équations $d\sigma = 0$ qui leurs correspondent étant toutes les deux de classe trois. Le système S pourra avoir la forme V ou VI.

17°. L'équation $f = 0$ a trois racines simples, qui donnent des équations $d\sigma = 0$ de classe sept, trois et un, respectivement. On pourra écrire S sous la forme réduite I, sous l'une des formes V, VI ou sous la forme canonique VII. Dans ce dernier cas, il n'y a pas d'éléments singuliers pour le système.

18°. L'équation $f = 0$ a une racine double qui donne une équation de classe trois et une simple, à laquelle corresponde une équation de classe un. S aura l'une des formes V, VI et aussi la forme canonique VII, quand il n'y a pas d'éléments singuliers pour notre système de Pfaff.

Nous n'y insistons plus sur les autres cas qui peuvent se présenter, en terminant cette classification avec la remarque que, si l'équation $f = 0$ a trois racines simples et les équations $d\sigma = 0$ sont de classe cinq toutes les trois, le système S peut être ramené à la forme canonique II ou aux formes réduites III, IV suivant que le rang du covariant de l'équation considérée est de rang deux ou quatre (mod. S).

11.—Reprenons de nouveau le système de Pfaff S, sous la forme générale

$$\begin{cases} ds^1 = dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 - p^3\,dx^3 = 0 \\ ds^2 = a_1\,dp^1 + a_2\,dp^2 + a_3\,dp^3 + b_1\,dx^1 + b_2\,dx^2 + b_3\,dx^3 = 0. \end{cases}$$

Quelles que soient les fonctions a_i, b_i, l'équation $ds^1 = 0$ est une équation singulière du système et les éléments singuliers qui lui correspondent, sont donnés par les équations différentielles

$$(11.1)\qquad \frac{dx^1}{a_1} = \frac{dx^2}{a_2} = \frac{dx^3}{a_3} = \frac{-dp^1}{b_1} = \frac{-dp^2}{b_2} = \frac{-dp^3}{b_3} = \frac{dz}{a_1 p^1 + a_2 p^2 + a_3 p^3}.$$

On voit que, *pour un système de Pfaff de classe huit, les équations différentielles qui définissent les éléments singuliers, correspondant à une équation singulière de classe sept, admettent au plus quatre combinaisons intégrables distinctes.*

Supposons que $df = 0$ soit une combinaison intégrable pour le système (11.1). En vertu de ce système lui-même, la fonction f doit

vérifier, en même temps, les deux équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre

$$(11.2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x^1}a_1+\dfrac{\partial f}{\partial x^2}a_2+\dfrac{\partial f}{\partial x^3}a_3-\dfrac{\partial f}{\partial p^1}b_1-\dfrac{\partial f}{\partial p^2}b_2-\dfrac{\partial f}{\partial p^3}b_3+ \\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial f}{\partial z}(a_1p^1+a_2p^2+a_3p^3)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial u}=0. \end{cases}$$

La dernière équation nous montre que f dépend seulement des variables caractéristiques de l'équation singulière $ds^1=0$ de S.

Si le système (11.2) a une solution, nous pouvons, éventuellement en effectuant une transformation de contact sur les variables x^i, p^i, z, faire tel que $x^3=$ct soit cette solution. Cela revient à dire qu'on peut réduire le coefficient a_3 à zéro et alors, en prenant $a_1=1$ (s'il est différent de zéro) et un des autres coefficients a_2, b_i comme variable $-u$, par ex. a_2 (ou bien, celui des coefficients qui contient cette variable), le système S prend la forme

$$(11.3)\quad \begin{cases} ds^1=dz-p^1dx^1-p^2dx^2-p^3dx^3=0, \\ ds^2=dp^1-udp^2-adx^1-bdx^2-cdx^3=0, \end{cases}$$

et contient ainsi seulement trois coefficients arbitraires, qui ne peuvent pas être nuls en même temps, sans que le système S soit de classe inférieure à huit. En effet, si $a=b=c=0$, on peut écrire l'équation $ds^1=0$

$$ds^1=d(z-p^1x^1-p^2x^2)+(x^1u+x^2)dp^2-p^3dx^3=0,$$

ou bien

$$ds^1=dZ-\mathcal{X}dp^2-p^3dx^3=0$$

et le système est de classe sept, car il a seulement les variables Z, $\mathcal{X}$, x^3, p^i et u.

Les équations différentielles qui donnent la famille d'éléments singuliers correspondante à l'équation $ds^1=0$, du système (11.3), s'écrivent alors

$$(11.3')\quad \frac{dx^1}{1}=\frac{dx^2}{-u}=\frac{dx^3}{0}=\frac{dp^1}{a}=\frac{dp^2}{b}=\frac{dp^3}{c}=\frac{dz}{p^1-up^2}.$$

Pour que $df=0$ soit une combinaison intégrable de ces équations, la fonction f devra satisfaire, en vertu de (11.3'), au système du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}-\frac{\partial f}{\partial x^2}u+\frac{\partial f}{\partial x}(p^1-up^2)+\frac{\partial f}{\partial p^1}a+\frac{\partial f}{\partial p^2}b+\frac{\partial f}{\partial p^3}c=0,\ \frac{\partial f}{\partial u}=0.$$

La première de ses équations, dérivée par rapport à u, donne

$$-\frac{\partial f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial z}p^2+\frac{\partial f}{\partial p^1}\frac{\partial a}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial b}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial c}{\partial u}=0;$$

dérivons trois fois encore par rapport à u; on obtiendra le système

$$\frac{\partial f}{\partial p^1}\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial^2 b}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial^2 c}{\partial u^2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^1}\frac{\partial^4 a}{\partial u^4}+\frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial^4 b}{\partial u^4}+\frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial^4 c}{\partial u^4}=0,$$

duquel on en déduit que, si le déterminant fonctionnel

$$\delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 c}{\partial u^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^4 a}{\partial u^4} & \frac{\partial^4 b}{\partial u^4} & \frac{\partial^4 c}{\partial u^4} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on a

$$\frac{\partial f}{\partial p^1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial p^2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial p^3}=0.$$

De ces équations on tire ensuite

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x^1}=0;$$

la fonction f se réduit donc à une constante et par suite il n'existe d'autre intégrale première que $dx^3=0$.

Si l'on connaît deux intégrales premières, $df_1=0$, $df_2=0$ pour les équations (11.1), on peut réduire a_2, a_3 par ex. à zéro et en prenant $b_1=u$, $a_1=1$, le système S prend la forme

$$(11.4)\qquad \begin{cases} ds^1=dz-p^1dx^1-p^2dx^2-p^3dx^3=0, \\ ds^2=dp^1-udx^1-adx^2-bdx^3=0, \end{cases}$$

les fonctions a, b dépendant des huit variables x^i, p^i, z, u et n'étant pas nulles à la fois.

La famille d'éléments singuliers, qui correspond à l'équation $ds^1=0$, est donnée par les six équations suivantes

$$(11.4')\qquad dx^2=0,\quad dx^3=0,\quad dp^1=udx^1,\quad dp^2=adx^1,$$
$$dp^3=bdx^1,\quad dz=p^1dx^1.$$

Si $df=0$ est une combinaison intégrable de ces équations, f doit vérifier les deux équations simultanées

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET * MŰEGYETEM *

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}+\frac{\partial f}{\partial z}p^1+\frac{\partial f}{\partial p^1}u+\frac{\partial f}{\partial p^2}a+\frac{\partial f}{\partial p^3}b=0,\ \frac{\partial f}{\partial u}=0.$$

Dérivons la première par rapport à u; on aura l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial p^1}+\frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial a}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial b}{\partial u}=0,$$

qui. étant dérivée deux fois de nouveau, aussi par rapport à u, donne le système

$$(11.5)\qquad \frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial^2 b}{\partial u^2}=0,\ \frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial^3 a}{\partial u^3}+\frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial^3 b}{\partial u^3}=0,$$

lequel nous montre que, si le déterminant fonctionnel

$$\delta=\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}\frac{\partial^3 b}{\partial u^3}-\frac{\partial^2 b}{\partial u^2}\frac{\partial^3 a}{\partial u^3},$$

est différent de zéro, ce qui se passe en général, on a $\frac{\partial f}{\partial p^2}=0, \frac{\partial f}{\partial p^3}=0$ et par suite aussi

$$\frac{\partial f}{\partial p^1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0,\ \frac{\partial f}{\partial x^1}=0.$$

Donc, notre système n'admet d'autres combinaisons intégrables, que $dx^2=0$ et $dx^3=0$.

Supposons maintenant que les équations (11.1) admettrait trois combinaisons intégrables distinctes, $df_i=0$ $(i=1, 2, 3)$. En les prenant comme nouvelles variables x^2, x^3, p^3 on peut réduire à zéro les coefficients a_2, a_3 et b_3 du système, qui prend alors la forme

$$(1.16)\qquad \begin{cases} ds^1=dz-p^1dx^1-p^2dx^2-p^3dx^3=0,\\ ds^2=a_1\,dp^1+b_1\,dx^1+b_2\,dx^2=0. \end{cases}$$

On peut prendre $a_1=1$, car il ne peut pas être nul, sans que le système soit de classe sept. De même, b_1 et b_2 ne peuvent pas s'annuler les deux en même temps et pour que le système soit de la huitième classe, l'un d'entre eux doit nécessairement contenir la variable u elle-même. Le système (11.6) devient ainsi

$$(11.6')\qquad \begin{cases} ds^1=dz-p^1dx^1-p^2dx^2-p^3dx^3=0,\\ ds^2=dp^1-u\,dx^1-a\,dx^2=0, \end{cases}$$

avec $a=a\ (x^i, p^i, z, u)$.

Les équations différentielles qui déterminent la famille d'éléments singuliers correspondante à l'équation $ds^1=0$ sont, dans ce cas,

$dx^2 = 0,\ dx^3 = 0,\ dp^3 = 0,\ dp^1 = u dx^1,\ dp^2 = a dx^1,\ dz = p^1 dx^1$

et pour que $df = 0$ soit une combinaison intégrable de ce système, il faut que f satisfasse aux deux équations linéaires du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial p^1} u + \frac{\partial f}{\partial p^2} a + \frac{\partial f}{\partial z} p^1 = 0, \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Si l'on dérive la première deux fois par rapport à u, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial p^1} + \frac{\partial f}{\partial p^2} \frac{\partial a}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} = 0,$$

de sorte que, si $\frac{\partial^2 a}{\partial u^2} \neq 0$, c'est-à-dire si a n'est pas un polynome du premier degre en u, ce qui est le cas général, on en déduit, successivement,

$$\frac{\partial f}{\partial p^2} = 0, \frac{\partial f}{\partial p^1} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \frac{\partial f}{\partial x^1} = 0$$

et par conséquent, le système n'admet que les intégrales premières $dx^2 = 0,\ dx^3 = 0, dp^3 = 0$.

Si la fonction b_1 est indépendante de u, cette variable doit figurer dans b_2, autrement le système S ne serait pas de classe huit. On peut donc écrire notre système sous la forme

$$(11.7) \qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1 dx^1 - p^2 dx^2 - p^3 dx^3 = 0, \\ ds^2 = dp^1 - u dx^2 - b dx^1 = 0, \end{cases}$$

la fonction b dépendant seulement des variables x^i, p^i, z. Les équations différentielles de la famille d'éléments singuliers correspondante à l'équation $ds^1 = 0$, s'écrivent

$$dx^2 = 0,\ dx^3 = 0,\ dp^3 = 0,\ dp^1 = b dx^1,\ dp^2 = u dx^1,\ dz = p^1 dx^1.$$

Soit $df = 0$ une combinaison intégrable pour ces équations. On devra avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial z} p^1 + \frac{\partial f}{\partial p^1} b + \frac{\partial f}{\partial p^2} u = 0, \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

et en dérivant par rapport à u la première de ces équations, on trouve $\frac{\partial f}{\partial p^2} = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial z} p^1 + \frac{\partial f}{\partial p^1} b = 0, \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Dérivons maintenant la première par rapport à p^2. On aura

$$\frac{\partial f}{\partial p^1} \frac{\partial b}{\partial p^2} = 0.$$

Donc, si $\frac{\partial b}{\partial p^2} \neq 0$, nous aurons de même

$$\frac{\partial t}{\partial p^1} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \frac{\partial t}{\partial x^1} = 0$$

et par suite il n'y a pas d'autres intégrales premières, en déhors de $dx^2 = 0$, $dx^3 = 0$, $dp^3 = 0$, pour le système considéré.

Si $\frac{\partial b}{\partial p^2} = 0$, on peut voir facilement que *le système (11.7) est de classe sept*, aussi comme dans le cas $a_1 = 0$ de plus haut. En effet, pour que ce système soit de classe huit. il faut que le rapport $\frac{b_2}{b_1}$ dépend de u, de sorte que l'équation $ds^2 = 0$ peut s'écrire, en prenant ce rapport pour variable $-u$ elle-même,

$$ds^2 = dx^1 - u\, dx^2 = 0,$$

tandisque la première reçoit la forme

$$ds^1 = dz - (p^1 u + p^2)\, dx^2 - p^3\, dx^3 = 0,$$

ce qui fait apparaître seulement les sept variables x^i, z, u, $p^1 u + p^2$ et p^3.

12.—Nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème suivant :

Si l'on connait deux combinaisons intégrables distinctes $df_1 = 0$, $df_2 = 0$, des équations différentielles de l'un des systèmes d'éléments singuliers, correspondant à une équation de classe sept, la classe du système de Pfaff S s'abaisse de quatre unités, quand on y fait $f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$; $df_1 = df_2 = 0$.

Cela veut dire que, si l'on fait un changement de variables de façon à prendre comme nouvelles variables x^2, x^3 par ex., les deux combinaisons intégrables, le système de Pfaff qu'on obtient en faisant $x^2 = \text{ct.}$, $x^3 = \text{ct.}$, $dx^2 = dx^3 = 0$, est de la quatrième classe.

D'ailleurs, il faut observer que, si le système qui détermine la famille d'éléments singuliers, admet une seule combinaison intégrable $df = 0$, en la prenant comme $dx^3 = 0$. le système de Pfaff obtenu en faisant $x^3 = \text{ct.}$, $dx^3 = 0$ est *de classe sept*. En effet on peut alors ramener le système à la forme

$$(12.1) \qquad \begin{aligned} ds^1 &= dz - p^1\, dx^1 - p^2\, dx^2 - p^3\, dx^3 = 0 \\ ds^2 &= a_1\, dp^1 + a_2\, dp^2 + b_1\, dx^1 + b_2\, dx^2 + b_3\, dx^3 = 0 \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on fait $x^3 = \text{ct.}$, $dx^3 = 0$, le système

$$(12.1') \qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1\, dx^1 - p^2\, dx^2 = 0 \\ ds^2 = a_1\, dp^1 + a_2\, dp^2 + b_1\, dx^1 + b_2\, dx^2 = 0, \end{cases}$$

est bien de classe sept.

Pour démontrer le théorème qu'on vient d'énoncer, supposons que $df_1 = 0$, $df_2 = 0$ soient deux intégrales premières pour le système différentiel (11.3'). Comme nous avons vu, on peut alors supposer avoir réduit à zéro les coefficients b_2, b_3 en les prenant comme nouvelles variables p^2, p^3 par ex. et le système reçoit la forme

$$(12.2)\qquad \begin{aligned} ds^1 &= dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 - p^3\,dx^3 = 0,\\ ds^2 &= a_1\,dp^1 + a_2\,dp^2 + a_3\,dp^3 + b_1\,dx^1 = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose ici $p^2 = c_2$, $p^3 = c_3$, $dp^2 = 0$, $dp^3 = 0$, le système ainsi obtenu est de *classe quatre*, car on peut l'écrire comme il suit

$$(12.2')\qquad \begin{aligned} ds^1 &= d(z - c_2 x^2 - c_3 x^3) - p^1\,dx^1 = 0,\\ ds^2 &= dp^1 + \frac{b_1}{a_1}\,dx^1 = 0, \end{aligned}$$

et les seules variables qui y figurent sont $z - c_2 x^2 - c_3 x^3$, x^1, p^1 et $\frac{b_1}{a_1}$.

Réciproquement, supposons que si l'on fait, dans les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ d'un système de Pfaff de classe huit, $f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$, $df_1 = df_2 = 0$, le système qui résulte est de classe quatre. *Alors, $df_1 = 0$, $df_2 = 0$ sont deux combinaisons intégrables des équations qui déterminent l'une des familles d'éléments singuliers du système considéré.*

En effet, on peut supposer avoir fait un changement de variables de façon que f_1, f_2, soient égaux à x^2, x^3 respectivement. Quand on fait, dans les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, $x^2 = c$, $x^3 = c'$, $dx^2 = dx^3 = 0$, le système ainsi obtenu étant de classe quatre, peut être ramené à l'une des deux formes canoniques

$$(12.3)\qquad \begin{cases} ds^1 = dy^2 - y^3\,dy^1 = 0\\ ds^2 = dy^3 - y^4\,dy^1 = 0; \end{cases}$$

$$(12.3')\qquad \begin{cases} ds^1 = dy^1 = 0\\ ds^2 = dy^3 - y^4\,dy^2 = 0, \end{cases}$$

par un changement des variables, autres que x^2, x^3.

Donc, on pourra ramener le système de Pfaff lui-même à l'une des formes suivantes

$$(12.4)\qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1\,dx^1 - f\,dx^2 - \varphi\,dx^3 = 0\\ ds^2 = dp^1 - \alpha\,dx^1 - \beta\,dx^2 - \gamma\,dx^3 = 0; \end{cases}$$

$$(12.4')\qquad \begin{cases} ds^1 = dz - f\,dx^2 - \varphi\,dx^3 = 0\\ ds = dp^1 - \alpha\,dx^1 - \beta\,dx^2 - \gamma\,dx^3 = 0, \end{cases}$$

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

les fonctions f, φ, α, β, γ étant arbitraires.

Supposons que notre système de Pfaff est de la forme (12.4). Alors, si x^1, x^2, x^3, z, p^1, f, φ forment un système de sept variables indépendantes, on peut prendre $p^2 = f$, $p^3 = \varphi$ et on obtient un système ramené à la forme (7.1),

$$(12.4'') \qquad \begin{cases} ds^1 = dz - p^1\,dx^1 - p^2\,dx^2 - p^3\,dx^3 = 0, \\ ds^2 = dp^1 - \alpha\,dx^1 - \beta\,dx^2 - \gamma\,dx^3 = 0, \end{cases}$$

car les coefficients α, β, γ sont des fonctions des variables x^i, p^i, z et u.

On voit immédiatement que les équations (11.1), qui définissent la famille d'éléments singuliers correspondante à l'équation $ds^1 = 0$, admettent les combinaisons intégrables $dx^2 = 0$, $dx^3 = 0$.

Si le système de Pfaff est de forme (12.4'), l'équation $ds^1 = 0$ est de classe cinq. En prenant, comme plus haut, $f = p^2$, $\varphi = p^3$, notre système sera ramené à la forme III (n. 9). La famille d'éléments singuliers qui corresponde à l'équation $ds^1 = 0$ admete encore $dx^2 = 0$, $dx^3 = 0$ parmis ses combinaisons intégrables.

13.— Nous avons vu précédemment (n.8) les diverses formes canoniques auxquelles peuvent être réduits les covariants bilinéaires d'un système de Pfaff S de classe huit. Dans la suite, nous allons nous occuper du *problème de la géométrisation de ces systèmes, dans le sens de M. G. Vrânceanu* [1]). Ce problème revient à chercher dans quel cas de réduction à la forme canonique des covariants Δs^α du système S, on peut s'arranger, par des opérations invariantes, de façon que son groupe de transformations conserve deux ou plusieurs systèmes complémentaires.

Dans ce but, considérons la première forme canonique I', des covariants Δs^1, Δs^2 et quand les équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ sont des équations invariantes toutes les deux. On peut montrer facilement — et la propriété est valable même pour un système de deux équations à un nombre pair de variables [2]) — que le système de Pfaff S est géométrisable. En effet, choisissons les formes ds^3, $ds^4, \ldots, ds^8$ en les variant par des termes en ds^1, ds^2, de façon à donner aux covariants Δs^1 (mod. ds^1) et Δs^2 (mod. ds^2), les formes

$$(13.1) \qquad \begin{aligned} \Delta s^1 &= ds^3\,ds^4 + ds^5\,ds^6 + ds^2\,(a ds^7 + b ds^7) \qquad (\text{mod. } ds^1), \\ \Delta s^2 &= ds^7\,ds^8 + ds^5\,ds^6 + ds^1\,(a_1\,ds^3 + b_1\,ds^4) \qquad (\text{mod. } ds^2), \end{aligned}$$

1) G. Vrânceanu, *La géométrisation de certains systèmes de Pfaff*, Bul. Fac. Şt. Cernăuţi, Vol. VII, 1933-34, p. 163.

2) G. Vrânceanu, *La décomposition minimale d'un système de Pfaff*, Id. Vol. VIII, 1934, p. 97-112,

les coefficients a, b ou a_1, b_1 ne pouvant être nuls en même temps, car autrement la classe des équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ serait inférieure à sept.

Les deux systèmes singuliers de S, qui sont distincts, sont donnés par les équations

$$(S_1) \qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^5 = ds^6 = 0,$$

$$(S_2) \qquad ds^1 = ds^2 = ds^5 = ds^6 = ds^7 = ds^8 = 0.$$

Il est facile de montrer que, le groupe du système S, qui ne change pas les formes canoniques des covariants Δs^1, Δs^2, ainsi normalisés, ne changent pas aussi, les systèmes suivants

$$(G_1) \qquad ds^1 = ds^3 = ds^4 = 0, \qquad (G_2) \qquad ds^2 = ds^7 = ds^8 = 0,$$

$$(G_3) \qquad ds^5 = ds^6 = 0,$$

$G_1 + G_3$ et $G_2 + G_3$ étant, respectivement, les premiers systèmes dérivés de S_1 et S_2. Cela nous dit que, *notre système S est géométrisable si les covariants bilinéaires* Δs^1, Δs^2 ont la forme canonique I'.

Cela étant, passons à la forme canonique II' de ces covariants. Le système S possède aussi, comme nous l'avons déjà dit, une décomposition minimale unique. De la même façon que dans le cas précédent, nous pouvons écrire les covariants Δs^1, Δs^2 comme il suit

$$(13.2) \qquad \begin{aligned} \Delta s^1 &= ds^3\, ds^5 + ds^4\, ds^6 + ds^2 (a\, ds^7 + b\, ds^8) \quad (\text{mod. } ds^1), \\ \Delta s^2 &= ds^7\, ds^8 + ds^5\, ds^6 + ds^1 (c\, ds^3 + d\, ds^4) \quad (\text{mod. } ds^2), \end{aligned}$$

les coefficients a, b, c, d n'étant pas nuls, deux à deux, en même temps, sans abaisser la classe de équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$.

Si a et c sont différents de zéro, nous pouvons les réduire à l'unité, en changeant ds^1, ds^2 en cds^1 et ads^2 respectivement, ce qui ne change pas les covariants Δs^1, Δs^2 car on a (mod. ds^1) et (mod. ds^2) et par cela on a pour nos covariants les formes canoniques normalisées qui suivent

$$(13.2') \qquad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\, ds^5 + ds^4\, ds^6 + ds^2\, ds^7 \quad (\text{mod. } ds^1), \\ \Delta s^2 = ds^7\, ds^8 + ds^5\, ds^6 + ds^1\, ds^4 \quad (\text{mod. } ds^2). \end{cases}$$

Si a est égal à zéro, on peut réduire le coefficient b à l'unité et puis, en changeant les indices 7 et 8, nous retrouvons les mêmes formes (13.2'). Si c est nul, les covariants (13.2) s'écrivent comme il suit, après avoir réduit d à l'unité,

$$(13.2'') \qquad \begin{aligned} \Delta s^1 &= ds^3\, ds^5 + ds^4\, ds^6 + ds^2\, ds^7 \quad (\text{mod. } ds^1), \\ \Delta s^2 &= ds^7\, ds^8 + ds^5\, ds^6 + ds^1\, ds^4 \quad (\text{mod. } ds^2), \end{aligned}$$

mais, il n'y a pas de distinction entre ces formes et les précédentes,

car il suffit de changer les indices 3 avec 4 et 5 avec 6 en (13.2''), pour retrouver (13.2').

Tous les autres cas qui peuvent se présenter, par l'annulation d'un des coefficients a, b de Δs^1, en même temps qu'un des coefficients de Δs^2, se réduisent facilement au même cas (13.2').

Les deux systèmes singuliers, attachés au système S étant

$$(S_1) \qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^5 = ds^6 = 0,$$

$$(S^2) \qquad ds^1 = ds^2 = ds^5 = ds^6 = ds^7 = ds^8 = 0,$$

cherchons quels sont les systèmes dérivés correspondants S'_1 et S'_2. Pour cela écrivons les covariants bilinéaires des équations de S_1. On aura, évidemment

$$(13.3) \qquad \begin{aligned} &\Delta s^1 = 0 \quad , && \Delta s^4 = b\,ds^7\,ds^8 \\ &\Delta s^2 = ds^7\,ds^8 \quad , && \Delta s^5 = c\,ds^7\,ds^8 \quad (\text{mod. } S_1), \\ &\Delta s^3 = a\,ds^7\,ds^8 \quad , && \Delta s^6 = d\,ds^7\,ds^8 \end{aligned}$$

mais, des identités fondamentales [1]) $(1\alpha\ 78)$ $(\alpha = 3, 4, 5, 6)$, on trouve que

$$c = d = a = b = 0,$$

ce qui nous montre que le premier système dérivé de S_1 est

$$(S'_1) \qquad ds^1 = ds^3 = ds^4 = ds^5\,ds^6 = 0.$$

De même, les covariants bilinéaires du système singulier S_2 étant

$$(13.4) \qquad \begin{aligned} &\Delta s^1 = 0, && \Delta s^6 = f\,ds^3\,ds^4 \\ &\Delta s^2 = 0, && \Delta s^7 = g\,ds^3\,ds^4 \quad (\text{mod. } S_2), \\ &\Delta s^5 = e\,ds^3\,ds^4, && \Delta s^8 = h\,ds^3\,ds^4 \end{aligned}$$

si nous calculons les identités fondamentales $(234\,\alpha)$ $(\alpha = 5, 6, 7, 8)$, on trouve aussi les égalités suivantes

$$e = -1, \qquad f = g = h = 0,$$

d'où il en résulte que le premier système dérivé de S_2 est donné par les équations

$$(S') \qquad ds^1 = ds^2 = ds^6 = ds^7 = ds^8 = 0.$$

Nous irons plus loin, en cherchant les secondes systèmes dérivés S''_1 et S''_2 de S_1 et S_2. Ainsi, nous aurons, pour les covariants bilinéaires de S',

---

1. G. Vrânceanu, *Les espaces non holonomes.* Mémorial des Sci. Math. Fasc. 76, 1936. (Paris).

$$
\begin{aligned}
&\Delta s^1 = ds^2\, ds^7 \\
&\Delta s^3 = a ds^2\, ds^7 + b ds^2\, ds^8 \\
&\Delta s^4 = c ds^2\, ds^7 + d ds^2\, ds^8 \qquad (\text{mod. } S'_1), \\
&\Delta s^5 = e ds^2\, ds^7 + f ds^2\, ds^8 \\
&\Delta s^6 = g ds^2\, ds^7 + h ds^2\, ds^8
\end{aligned}
\tag{13.5}
$$

de sorte que, par la combinaison des équations $ds^3 = 0$, $ds^4 = 0$, $ds^5 = 0$ et $ds^6 = 0$ avec $ds^1 = 0$ on peut annuler les coefficients a, c, e, g. Ensuite, par la combinaison des équations $ds^4 = 0$, $ds^5 = 0$ et $ds^6 = 0$ avec $ds^3 = 0$, on peut annuler, de même, les coefficients d, f, h (si le coefficient b n'est pas nul [1]).

De cette façon, nous sommes arrivés à la situation suivante

$$
\begin{aligned}
&\Delta s^1 = ds^2\, ds^7 \\
&\Delta s^3 = b ds^2\, ds^8 \qquad (\text{mod. } S'_1) \\
&\Delta s^4 = 0, \quad \Delta s^5 = 0, \quad \Delta s^6 = 0
\end{aligned}
\tag{13.5'}
$$

et cela nous permet d'affirmer que le second système dérivé S''_1 est donné par les trois équatios

$$
ds^4 = ds^5 = ds^6 = 0. \tag{S''_1}
$$

On voit maintenant que, pour ne pas augmenter le rang des covariants (13.5') on ne peut plus combiner les équations de S''_1 avec les équations $ds^1 = 0$, $ds^3 = 0$. Pour le même motif, l'équation $ds^3 = 0$ ne peut plus être combinée avec $ds^1 = 0$.

D'une manière analogue, on arrive au premier système dérivé de S'_2, ou le second système dérivé de S_1. En effet, les covariants bilinéaires de S'_2 s'écrivent

$$
\begin{aligned}
&\Delta s^1 = ds^3\, ds^5 \\
&\Delta s^2 = 0 \\
&\Delta s^6 = a ds^3\, ds^5 + c ds^4\, ds^5 \qquad (\text{mod. } S'_2), \\
&\Delta s^7 = d ds^3\, ds^5 + e ds^4\, ds^5 \\
&\Delta s^8 = f ds^3\, ds^5 + g\, ds^4\, ds^5,
\end{aligned}
\tag{13.6}
$$

et ou peut, en combinant covenablement les équations de S_2', annuler les coefficients a, d, f. Ensuite, si au lieu de l'équation $ds^7 = 0$ on considère l'équation $d\bar{s}^7 \equiv ds^7 - \lambda\, ds^7 = 0$, et au lieu de $ds^8 = 0$, l'équa-

1) Si b est nul, mais l'un au moins des coefficients d, f, h, ne l'est pas, on peut se ramener au cas précédent. Si aucun de ces coefficients n'est pas différent de zéro, le système dérivé S''_1 est donné par les équations $ds^3 = ds^4 = ds^5 = ds^6 = 0$ et les conclusions ne seront pas modifiées.

tion $d\bar{s}^8 \equiv ds^8 - \mu ds = 0$, on peut annuler aussi les coefficients e et g (si c n'est pas nul). Par les opérations faites ainsi, nous voyons qu'on ne peut plus combiner les équations $ds^7 = 0$, $ds^8 = 0$ avec $ds^1 = 0$ et $ds^6 = 0$. De même, on ne peut pas ajouter à ds^7 un terme en ds^8, à cause du covariant Δs^1 (mod. ds^1). On a donc, comme système dérivé S''_2, le suivant

$$(S''_2) \qquad ds^2 = ds^7 = ds^8 = 0,$$

puisque les covariants Δs^2, Δs^7, Δs^8, sont nuls (mod. S'_2).

Ainsi, on a obtenu pour les covariants bilinénaires Δs^λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, 8$) la composition qui suit

$$\Delta s^1 = ds^3 ds^5 + ds^4 ds^6 + ds^2 ds^7 \ (\text{mod. } ds^1),$$
$$\Delta s^2 = ds^7 ds^8 + ds^5 ds^6 + ds^1 ds^3 \ (\text{mod. } ds^2),$$

$$(13.7) \qquad \begin{cases} \Delta s^3 = b\ ds^2 ds^8 \\ \Delta s^4 = 0 \\ \Delta s^5 = 0 \end{cases} \qquad (\text{mod. } ds^1, ds^3, ds^4, ds^5, ds^6),$$

$$\begin{cases} \Delta s^6 = c\ ds^4 ds^5 \\ \Delta s^7 = 0 \\ \Delta s^8 = 0 \end{cases} \qquad (\text{mod. } ds^1, ds^2, ds^6, ds^7, ds^8),$$

Cherchons maintenant qu'elles sont les transformations des formes ds^λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, 8$) les plus générales, qui conserve la forme canonique normalisée des covariants Δs^1 (mod. ds^1) et Δs^2 (mod. ds^2).

Ayant en vue les observations qu'on vient de faire, de même que les deux systèmes dérivés S''_1, S''_2 et en tenant compte aussi que les deux équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ sont des équations invariantes, nous pouvons écrire les formules suivantes

$$(13.8) \qquad \begin{cases} d\bar{s}^1 = \alpha\, ds^1, & d\bar{s}^5 = \varepsilon\, ds^5 + \sigma\, ds^6 \\ d\bar{s}^2 = \beta\, ds^2, & d\bar{s}^6 = \eta\, ds^6 + \tau\, ds^5 \\ d\bar{s}^3 = \gamma\, ds^3 + \lambda\, ds^5 + \mu\, ds^6, & d\bar{s}^7 = \varkappa\, ds^7 + \zeta\, ds^2 \\ d\bar{s}^4 = \delta\, ds^4 + \nu\, ds^5 + \varrho\, ds^6, & d\bar{s}^8 = \theta\, ds^8 + \xi\, ds^2 + \chi\, ds^7, \end{cases}$$

les fonctions α, β, γ, δ, η, $\varkappa$, θ, étant différentes de zéro.

Si nous faisons ces transformations dans le covariant Δs^1 (mod. ds^1) et Δs^2 (mod. ds^2) on obtient, après les identifications nécessaires, les relations

$$(13.8') \qquad \begin{aligned} &\alpha = \gamma\varepsilon = \delta\eta = \beta\varkappa \ , \quad \beta = \varkappa\theta = \varepsilon\eta = \sigma\tau, \\ &\gamma\sigma = 0 \ , \quad \lambda\sigma - \varepsilon\mu + \nu\eta - \varrho\tau = 0, \\ &\delta\tau = 0 \ , \quad \alpha\lambda = \alpha\mu = 0. \end{aligned}$$

On en tire tout de suite

$$\sigma = \tau = \lambda = \mu = 0, \quad \nu = 0$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \delta = \frac{\alpha^3}{\beta^2}, \quad \theta = \frac{\beta^2}{\alpha}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha^2}{\beta}, \quad \eta = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \varkappa = \frac{\alpha}{\beta}$$

et les formules (13.8) nous donnent le groupe suivant de transformations

$$(13.9)\quad \begin{cases} \bar{ds}^1 = \alpha ds^1, & \bar{ds}^5 = \dfrac{\alpha^2}{\beta} ds^5, \\ \bar{ds}^2 = \beta ds^2, & \bar{ds}^6 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} ds^6, \\ \bar{ds}^3 = \dfrac{\beta}{\alpha} ds^3, & \bar{ds}^7 = \dfrac{\alpha}{\beta} ds^7 + \zeta ds^2, \\ \bar{ds}^4 = \dfrac{\alpha^3}{\beta^2} ds^4 + \varrho ds^6, & \bar{ds}^8 = \dfrac{\beta^2}{\alpha} ds^8 + \xi ds^2 + \chi ds^7, \end{cases}$$

qui, comme on voit, dépend de six fonctions arbitraires: $\alpha, \beta, \varrho, \zeta, \xi, \chi$. Ce groupe (13.9) laisse invariant non seulement le système de Pfaff $ds^1 = ds^2 = 0$, mais aussi les trois systèmes complémentaires (sans équations communes),

$$(13.9')\quad ds^1 = ds^3 = ds^5 = 0, \quad ds^2 = ds^7 = ds^8 = 0, \quad ds^4 = ds^6 = 0,$$

fait qui nous assure que, *notre système de Pfaff* S ($ds^1 = ds^2 = 0$), *est géométrisable, aussi dans le cas où les covariants bilinéaires* Δs^1 *et* Δs^2 *ont la forme canonique II'.*

14.—Supposons maintenant que les covariants Δs^1, Δs^2 du système S peuvent être réduits à la forme canonique

$$(14.1)\quad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3 ds^5 + ds^4 ds^6 \\ \Delta s^2 = ds^3 ds^7 + ds^4 ds^3 \end{cases} \text{(mod. } ds^1, ds^2).$$

Comme on l'a déjà dit, le système n'admet pas, dans ce cas, une décomposition minimale unique et aucune des équations $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$ n'est une équation singulière. On peut attacher à S le système covariant

$$(S_1)\qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = 0,$$

et c'est ce système qu'on étudiera dans la suite. Ainsi, pour trouver son système dérivé S'_1, on doit considérer ses covariants bilinéaires, qui s'écrivent

$$(14.2)\quad \begin{aligned} &\Delta s^1 = 0, \ \Delta s^2 = 0, \\ &\Delta s^3 = w^3_{5\alpha}\, ds^5 ds^\alpha + w^3_{6\beta}\, ds^6 ds^\beta + w^3_{78}\, ds^7 ds^8 \quad (\text{mod. } S_1), \\ &\Delta s^4 = w^4_{5\alpha}\, ds^5 ds^\alpha + w^4_{6\beta}\, ds^6 ds^\beta + w^4_{78}\, ds^7 ds^8 \\ &\qquad (\alpha = 6, 7, 8\,;\ \beta = 5, 7, 8) \end{aligned}$$

mais, en calculant les identités fondamentales (1578), (1678), (2567), (2568), (1568), (2578) et (2678), on trouve les relations suivantes

$$w_{56}^3 = w_{56}^4 = w_{78}^3 = w_{78}^4 = 0\ ,\ w_{58}^3 = w_{67}^3 = w_{57}^4 = a\ ,\ w_{78}^3 = w_{58}^4 = w_{67}^4 = b.$$

Si l'on tient compte de ces relations, les covariants Δs^3, Δs^4 deviennent,

$$(14.3)\quad \begin{aligned} \Delta s^3 &= w_{57}^3\, ds^5\, ds^7 + a\,(ds^5\, ds^8 + ds^6\, ds^7) + b ds^6\, ds^8 \\ \Delta s^4 &= a\, ds^5\, ds^7 + b\,(ds^5\, ds^8 + ds^6\, ds^7) + w_{68}^4\, ds^6\, ds^8 \end{aligned} \quad (\text{mod. } S_1).$$

Faisons maintenant sur les équations du système S, les transformations

$$\overline{ds^1} = \alpha ds^1 + \beta ds^2\ ,\quad \overline{ds^2} = \gamma ds^1 + \delta ds^2,$$

avec le déterminant $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. On trouve immédiatement que les formes ds^5, ds^6, ds^7, ds^8 se transforment d'après les formules

$$\begin{aligned} \overline{ds^5} &= \alpha ds^5 + \beta ds^7\ ,\quad \overline{ds^6} = \alpha ds^6 + \beta ds^8 \\ \overline{ds^7} &= \gamma ds^5 + \delta ds^7\ ,\quad \overline{ds^8} = \gamma ds^6 + \delta ds^8 \end{aligned}$$

et, en introduisant ces valeurs nouvelles dans nos covariants (14.3) on aura

$$a = \overline{a}\,\Delta\ ,\quad b = \overline{b}\,\Delta\ ,\quad w_{57}^3 = \overline{w}_{57}^3\,\Delta\ ,\quad w_{68}^4 = \overline{w}_{68}^4\,\Delta\,.$$

La troisième de ces égalités nous permette de réduire le coefficient $\overline{w}_{57}^3$ à l'unité, s'il est différent de zéro.

Supposons donc avoir fait $w_{57}^3 = 1$ et faisons encore une transformation de la forme

$$\overline{ds^3} = ds^3\ ,\qquad \overline{ds^4} = ds^4 - \lambda\, ds^3.$$

Des covariants Δs^1 et Δs^2 (mod. ds^1, ds^2) on trouve alors

$$\overline{ds^5} = ds^5 + \lambda\, ds^6\ ,\quad \overline{ds^7} = ds^7 + \lambda\, ds^8$$

et si l'on tient compte de ces valeurs dans Δs^3 (mod. S_1), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta s^3 = {} & ds^5 ds^7 + (\lambda + \overline{a})\, ds^5\, ds^8 + (\lambda + \overline{a})\, ds^6\, ds^7 + \\ & + [\lambda^2 + 2\overline{a}\,\lambda + \overline{b}]\, ds^6\, ds^8 \quad (\text{mod. } S_1) \end{aligned}$$

d'où l'on en déduit qu'on peut prendre $\lambda + \overline{a} = a$, c'est-à-dire qu'on peut annuler, de cette façon, le coefficient $\overline{a}$. Nous supposerons donc, dans la suite, que $a = 0$. Dans ce cas, les covariants Δs^3, Δs^4 prendront la forme suivante

$$(14.4)\quad \begin{aligned} \Delta s^3 &= ds^5\, ds^7 + b\, ds^6\, ds^8 \\ \Delta s^4 &= b\, ds^5\, ds^8 + b\, ds^6\, ds^7 + w_{68}^4\, ds^6\, ds^8 \end{aligned} \quad (\text{mod. } S_1).$$

Voyons maintenant si le coefficient $\overline{b}$ ne peut, lui-aussi être réduit à zéro. Pour cela, nous fairons les transformations qui suivent

$$\overline{ds^1} = \alpha_1\, ds^1 + \beta_1\, ds^2 \quad , \qquad \overline{ds^3} = \alpha ds^3 + \beta ds^4$$
$$\overline{ds^2} = \gamma_1\, ds^1 + \delta_1\, ds^2 \quad , \qquad \overline{ds^4} = \gamma\, ds^3 + \delta\, ds^4$$

(les fonctions α, β, γ, δ, n'étant pas les mêmes que tout-à-l'heure). En faisant les identifications nécessaires, on trouve de $\Delta\overline{s^1}$, les relations

$$\alpha\overline{ds^5} + \gamma\,\overline{ds^6} = \alpha_1\, ds^5 + \beta_1\, ds^7,$$
$$\beta\overline{ds^5} + \delta\,\overline{ds^6} = \alpha_1\, ds^6 + \beta_2\, ds^8$$

et en posant $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$ (déterminant qui n'est pas nul), on aura

$$\overline{ds^5} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_1\,\delta\, ds^5 - \alpha_1\,\gamma\, ds^6 + \beta_1\,\delta\, ds^7 - \beta_1\,\gamma\, ds^8),$$

$$\overline{ds^6} = \frac{1}{\Delta}(-\alpha\beta\, ds^5 + \alpha\alpha_1\, ds^6 - \beta\,\beta_1\, ds^7 + \alpha\beta_1\, ds^8).$$

De même, si l'on fait les transformations de plus haut dans le covariant $\Delta\overline{s^2}$ (mod. ds^1, ds^2), on obtient, comme coefficients de ds^3, ds^4, les expressions

$$\alpha\overline{ds^7} + \gamma\,\overline{ds^8} = \gamma_1\, ds^5 + \delta_1\, ds^7,$$
$$\beta\overline{ds^7} + \delta\,\overline{ds^8} = \gamma_1\, ds^6 + \delta_1\, ds^8,$$

d'où il en résulte

$$\overline{ds^7} = \frac{1}{\Delta}\,(\gamma_1\,\delta\, ds^5 - \gamma\gamma_1\, ds^6 + \delta\delta_1\, ds^7 - \gamma\delta_1\, ds^8),$$

$$\overline{ds^8} = \frac{1}{\Delta}\,(-\beta\gamma_1\, ds^5 + \alpha\gamma_1\, ds^6 - \beta\delta_1\, ds^7 + \alpha\delta_1\, ds^8).$$

En faisant aussi ces transformations dans $\Delta\overline{s^3}$ (mod. S_1), nous aurons les relations (après avoir fait $\overline{b} = 0$)

$$\delta^2\,(\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1) = \alpha\,\Delta^2,$$
$$\gamma\delta\,(\beta_1\,\gamma_1 - \alpha_1\,\delta_1) = b\,\beta\,\Delta^2,$$
$$\gamma^2\,(\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1) = (\alpha\,\beta + \beta\omega^4_{68})\,\Delta^2.$$

Si l'on suppose que le rapport $\dfrac{\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1}{\Delta^2} = 1$, ces relations deviennent

$$\delta^2 = \alpha, \qquad \gamma\,\delta = -\,b\,\beta, \qquad \gamma^2 = \alpha\, b - \frac{\gamma\delta}{b}\, w^4_{68}.$$

Comme nous pouvons prendre $b = 1$, la dernière de ces relations est une équation du second degré $\dfrac{\delta}{\gamma}$ par ex. et a des racines réelles, puisque leurs produit est négatif.

Obs. Si nous aurions fait les mêmes transformations, dans l'hypothèse $\bar{b}=0$, sur les formes qui entrent dans la composition du covariant Δs^4 (mod. S_1), nous aurions obtenus les relations

$$\bar{w}^4_{68}\,\beta^2=\gamma\,,\quad \bar{w}^4_{68}\,\alpha\beta=-b\delta\,,\quad \bar{w}^4_{68}\,\alpha^2=b\gamma+\delta\bar{w}^4_{68}$$

et on voit que ces relations sont possibles, car les coefficients qu'elles contiennent, ne sont pas tous nuls.

Cela étant, les covariant Δs^3 et Δs^4 peuvent maintenant s'écrire

(14.5) $\qquad \Delta s^3=ds^5\,ds^7\,,\quad \Delta s^4=w^4_{68}\,ds^6\,ds^8$ (mod. ds^1, ds^2, ds^3, ds^4).

Avant d'aller plus loin, montrons qu'il est possible de réduire encore le coefficient w^4_{68} à l'unité, s'il est différent de zéro, en posant

$$d\bar{s}^\alpha=\varrho^\alpha\,ds^\alpha\,,\qquad (\alpha=1,2,\ldots,7).$$

On trouve, en effet, qu'on a dans ce cas, les relations

$$\varrho^1=\varrho^3\,\varrho^5\,,\quad \varrho^1=\varrho^4\,\varrho^6\,,\quad \varrho^3=\varrho^5\,\varrho^7\,,$$
$$\varrho^2=\varrho^3\,\varrho^7\,,\quad \varrho^2=\varrho^4\,,\quad w^4_{68}\,\varrho^4=\bar{w}^4_{68}\,\varrho^6,$$

d'où, en supposant que $w^4_{68}=1$ (et $w^4_{68}=\lambda$), il en résulte les valeurs

$$\varrho^4=\varrho^2\,,\qquad \varrho^6=\lambda\varrho^2\,,\quad \varrho^1=\lambda\,(\varrho^2)^2\,,\quad \varrho^7=\lambda^{-1/3},$$
$$\varrho^5=\lambda^{2/3}\varrho^2,\quad \varrho^3=\lambda^{1/3}\varrho^2.$$

Nous voyons que, pour le rang de nos covariants ne soit pas modifié, on ne peut plus combiner que les équations suivantes

(14.6) $\qquad ds^1=ds^2=ds^3=0\,,\quad ds^1=ds^2=ds^4=0,$

c'est-à-dire qu'elles forment *deux systèmes invariants du problème.*

En considérant le premier de ces systèmes, les covariants bilinéaires seront de la forme

$$\Delta s^1=ds^4\,ds^6\,,\quad \Delta s^2=ds^4\,ds^8,$$
(14.7) $\quad \Delta s^3=ds^5\,ds^7+\alpha_1\,ds^4\,ds^5+\alpha_2\,ds^4ds^6+\alpha_3\,ds^4ds^7+\alpha_4\,ds^4ds^8$ (mod. ds^1, ds^2, ds^3).

Or, si l'on combine l'équation $ds^3=0$ avec $ds^1=0$ et puis avec $ds^2=0$, nous pouvons supposer $\alpha_2=\alpha_4=0$ et Δs^3 prend la forme simple

(14.8) $\quad \Delta s^3=ds^5\,ds^7+\alpha_1\,ds^4\,ds^5+\alpha_3\,ds^4\,ds^7$ (mod. ds^1, ds^2, ds^3)

et l'on observe que l'équation $ds^3=0$ est maintenant une équation invariante du système invariant considéré, dans le sens qu'elle ne peut plus être combinée avec les équations $ds^1=0$, $ds^2=0$.

De même, les covariants bilinéaires du second système invariant (14.6) sont

$$\Delta s^1 = ds^3\, ds^5, \qquad \Delta s^2 = ds^3\, ds^7,$$

$$(14.9)\quad \Delta s^4 = ds^6\, ds^8 + \beta_1\, ds^3\, ds^5 + \beta_2\, ds^3\, ds^6 + \beta_3\, ds^3\, ds^7 + \beta_4\, ds^3\, ds^8 \qquad (\text{mod. } ds^1, ds^2, ds^4)$$

et on peut réduire à zéro les coefficients β_1, β_3, par la combinaison des équations $ds^4 = 0$, $ds^1 = 0$ et $ds^4 = 0$, $ds^2 = 0$. L'équation $ds^4 = 0$ devient également une équation invariante du système $ds^1 = ds^2 = ds^4 = 0$ et le covariant Δs^4 s'écrit

$$(14.10)\quad \Delta s^4 = ds^6\, ds^8 + \beta_2\, ds^3\, ds^6 + \beta_4\, ds^3\, ds^8 \quad (\text{mod. } ds^1, ds^2, ds^4).$$

Aux systèmes (14.6) on peut attacher les deux systèmes covariants qui suivent

$$(S)_1 \qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^5 = ds^7 = 0,$$

$$(S)_2 \qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^6 = ds^8 = 0.$$

Cherchons d'abord, quels sont les systèmes dérivés $(S)_1'$ et $(S)_2'$. Pour les trouver il faut considérer les covariants bilinéaires de $(S)_1$ et $(S)_2$. Si nous considérons le covarians Δs^5 (mod. $(S)_1$), il s'écrit

$$\Delta s^7 = w_{68}^5\, ds^6\, ds^8 \qquad (\text{mod. } (S)_1)$$

et on a de même

$$\Delta s^7 = w_{68}^7\, ds^6\, ds^8 \qquad (\text{mod. } (S)_1).$$

Des identités fondamentales (3678), (3568), (4567) et (4578) nous obtenons

$$w_{47}^3 = w_{86}^5, \qquad w_{45}^3 = w_{68}^7, \qquad w_{36}^4 = w_{57}^8, \qquad w_{38}^4 = w_{75}^6$$

et puis de (1457), (2457) nous trouvons aussi

$$w_{47}^3 = w_{75}^6, \qquad w_{45}^3 = w_{57}^8.$$

Ces relations nous donnent immédiatement les égalités

$$(14.11)\qquad w_{45}^3 = w_{36}^4, \qquad w_{47}^3 = w_{38}^4,$$

ou bien $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_4$.

On peut annuler, dans le covariant Δs^3 (mod. ds^1, ds^2, ds^3) les coefficients α_1 et α_3. En effet, il suffit de faire les transformations

$$\overline{ds^5} = ds^5 + \alpha_3\, ds^4, \qquad \overline{ds^7} = ds^7 - \alpha_1\, ds^4,$$

pour pouvoir écrire ce covariant sous la forme très simple

$$(14.12)\qquad \Delta s^3 = ds^5\, ds^7 \quad (\text{mod. } ds^1, ds^2, ds^3)$$

en désignant encore les formes $\overline{ds^5}$, $\overline{ds^7}$ par ds^5, ds^7.

Mais, en tenant compte de ces nouvelles valeurs de ds^5 et ds^7 dans les covariants Δs^1, Δs^2 (mod. ds^1, ds^2), nous obtenons pour ds^6, ds^8 les expressions

$$\bar{ds}^6 = ds^6 + \alpha_3\ ds^3\ , \qquad \bar{ds}^8 = ds^8 - \alpha_1\ ds^3,$$

qui sont les mêmes avec

$$\bar{ds}^6 = ds^6 + \beta_4\ ds^3\ , \qquad \bar{ds}^8 = ds^8 - \beta_2 ds^3,$$

en vertu des égalités (14.11) et cette chose nous montre qu'on a aussi

(14.13) $\Delta s^4 = \varepsilon\ ds^6\ ds^8$ (mod. ds^1, ds^2, ds^4) ($\varepsilon = 0$ ou à $+1$).

en posant encore au lieu de $\bar{ds}^6$, $\bar{ds}^8$; ds^6, ds^8.

Comme nous avons trouvé que $w^7_{68} = -\alpha_1$ et $w^8_{65} = -\alpha_3$ et puisque ces relations subsistent encore après qu'on a fait $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, il en résulte de même que $w^7_{68} = w^5_{68} = 0$ et par conséquent, le système dérivé de $(S)_1$ est donné par les cinq équations

$$(S)_1' \qquad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^5 = ds^7 = 0,$$

leurs covariants bilinéaires étant nuls (mod. $(S)_1$).

Pour trouver le système dérivé $(S)_2'$, considérons les covariants Δs^6, Δs^8 (mod. $(S)_2$). On aura

$$(14.14) \qquad \begin{aligned} \Delta s^6 &= w^6_{57}\ ds^5\ ds^7 \\ \Delta s^8 &= w^8_{57}\ ds^5\ ds^7 \end{aligned} \qquad \text{(mod. } ds^1, ds^2\ ds^3, ds^6, ds^8).$$

Pour un motif analogue au celui du cas précédent, des relations $w^8_{57} = -\beta_2$, $w^6_{57} = -\beta_4$ il s'en suit que $w^6_{57} = -\ w^8_{57} = 0$, donc le système dérivé que nous cherchons, est le suivant

$$(S)_2' \qquad ds^1 = ds^2 = ds^4 = ds^6 = ds^8 = 0.$$

Il est facile à voir quels sont les seconds systèmes de $(S)_1''$ et $(S)_2''$. Pour cela obsérvons que les deux covariants Δs^5 et Δs^7 (mod. $(S)_1'$) ne peuvent avoir que des termes de la forme $ds^4\ ds^3$ et $ds^4\ ds^8$. Mais, puisqu'on peut ajouter à ds^5 et ds^7, des termes en ds^1, ds^2, il s'en suit qu'on peut annuler les coefficiens w^5_{46}, w^5_{48}, w^7_{68}, w^7_{48} de façon à avoir

$$\begin{aligned} &\Delta s^1 = ds^4\ ds^6, \quad \Delta s^2 = ds^4\ ds^8, \\ &\Delta s^3 = 0, \quad \Delta s^5 = 0, \quad \Delta s^7 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(mod. } (S)_1')$$

et alors le second système dérivé s'écrit immediatement

$$(S)^{1''} \qquad ds^3 = ds^5 = ds^7 = 0.$$

D'une manière tout-à-fait analogue, en combinant les équations $ds^6 = 0$, $ds^8 = 0$ avec $ds^1 = 0$ et $ds^2 = 0$, nous pouvons annuler les coefficients w^6_{35}, w^6_{37}, w^8_{35}, w^8_{37}, ces coefficients étant les seuls qui peuvent être contenus dans les covariants Δs^6, Δs^8, (mod. $(S)'_2$, de sorte que le système dérivé de $(S)_2'$ est

$(S)_2''$ $$ds^4 = ds^6 = ds^8, = 0.$$

Maintenant on peut passer à la recherche du groupe de transformations des formes ds^α, qui laissent invariantes les expressions des covariants suivants

$$(14.15)\qquad \begin{cases} \Delta s^1 = ds^3\, ds^5 + ds^4\, ds^6 \\ \Delta s^2 = ds^3\, ds^7 + ds^4\, ds^7 \end{cases} \quad (\text{mod. } ds^1,\ ds^2),$$

$$\Delta s^3 = ds^5\, ds^7 \quad (\text{mod. } ds^1,\ ds^2,\ ds^3),$$

$$\Delta s^4 = ds^6\, ds^8 \quad (\text{mod. } ds^1,\ ds^2,\ ds^4).$$

Avant de les écrire, it faut observer que les équations $ds_1 = 0$, $ds^2 = 0$ peuvent se transformer seulement entre elles-mêmes et que les deux équations $ds^3 = 0$, $ds^4 = 0$ sont des équations invariantes des systèmes $ds^1 = ds^2 = ds^3 = 0$, $ds^1 = ds^2 = ds^4 = 0$ respectivement. En tenant encore compte des systèmes dérivés $(S)_1''$, $(S)_2''$, nous pourrons écrire

$$(14.16)\qquad \begin{aligned} \overline{ds^1} &= \alpha\, ds^1 + \delta\, ds^2, & \overline{ds^5} &= c\, ds^5 + c_3\, ds^7 + c_7\, ds^7 \\ \overline{ds^2} &= \gamma\, ds^1 + \beta\, ds^2, & \overline{ds^6} &= d\, ds^6 + d_4\, ds^4 + d_8\, ds^8 \\ \overline{ds^3} &= a\, ds^3 & \overline{ds^7} &= e\, ds^7 + e_3\, ds^3 + e_5\, ds^5 \\ \overline{ds^4} &= b\, ds^4 & \overline{ds^8} &= f\, ds^8 + f_4\, ds^4 + f_6\, ds^6 \end{aligned}$$

les fonctions $\alpha, \beta, a, b, c, d, e, f$, n'étant pas nulles.

Si l'on fait les calculs nécessaires dans les covariants de plus haut, on trouve les égalités suivantes, entre ces fonctions

$$\alpha = ac,\ \alpha = bd,\ \delta = ac_7,\ \delta = bd_8,\ \gamma = ae_5,\ \gamma = bf_6$$

$$\beta = ae,\ \beta = bf,\ a = ce - c_7\, e_5,\ b = df - d_5\, f_6,$$

d'où l'on en déduit

$$\frac{\alpha}{a} = c\,,\ \frac{\alpha}{b} = d\,,\ \frac{\beta}{a} = e\,,\ \frac{\beta}{b} = f\,,\ \frac{\gamma}{a} = e_5\,,\ \frac{\gamma}{b} = f_6\,,\ \frac{\delta}{a} = c_7\,,\ \frac{\delta}{b} = d_8\,.$$

et donc

$$a = b = (\alpha\beta - \gamma\delta)^{1/3}.$$

Il suit maintenant que

$$c = d = \frac{\alpha}{a}\,,\ e = f = \frac{\beta}{a}\,,\ e_5 = f_6 = \frac{\gamma}{a}\,,\ c_7 = d_8 = \frac{\delta}{a}$$

et notre groupe contient huit fonctions arbitraires: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, d_4, c_3, e_3$, et f_4.

Par suite, nous pouvons écrire le groupe cherché, en changeant légèrement la notation, sous la forme suivante

MŰEGYETEM

$$(14.17)\quad \begin{cases} d\bar{s}^1 = \alpha ds^1 + \delta ds^2, & d\bar{s}^5 = \dfrac{\alpha}{a} ds^5 + \lambda ds^3 + \dfrac{\delta}{a} ds^7 \\ d\bar{s}^2 = \gamma ds^1 + \beta ds^2, & d\bar{s}^6 = \dfrac{\alpha}{a} ds^6 + \mu ds^4 + \dfrac{\delta}{a} ds^8 \\ d\bar{s}^3 = a ds^3, & d\bar{s}^7 = \dfrac{\beta}{a} ds^7 + \nu ds^3 + \dfrac{\gamma}{a} ds^5 \\ d\bar{s}^4 = a ds^4, & d\bar{s}^8 = \dfrac{\beta}{a} ds^8 + \varrho ds^4 + \dfrac{\gamma}{a} ds^6, \end{cases} \qquad [a = (\alpha\beta - \gamma\delta)^{1/3}],$$

et on peut énoncer le théorème qui suit:

Etant donné un système de deux équations de Pfaff à huit variables, de classe huit, $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, tel que les covariants bilinéaires Δs^1, Δs^2 aient la forme canonique (IV'), ce système est géométrisable, dans le sens de Mr. Vrânceanu.

En effet, le groupe (14.17) laisse invariant non seulement le système $ds^1 = 0$, $ds^2 = 0$, mais aussi les deux systèmes, sans équations communes,

$$(14.18)\qquad ds^3 = ds^5 = ds^7 = 0, \quad ds^4 = ds^6 = ds^8 = 0,$$

c'est-à-dire les deux systèmes dérivés $(S)''_1$ et $(S)''_2$.

Séminaire Mathématique de l'Université de Bucarest

(Reçu le 31 Décembre 1946).

SUR UNE CORRESPONDANCE ENTRE DEUX SURFACES RÉGLÉES

par

ION CREANGĂ

1. Considérons deux surfaces réglées R_1 et R_2 et soit Γ leur courbe d'intersection. On peut établir entre les points des deux surfaces une correspondance ponctuelle **T**, si bien que les points d'une génératrice g_1 de R_1 correspondent aux points d'une génératrice g_2 de R_2, laquelle coupe g_1 en un point M_0 de Γ ; au point M_1 sur g_1 on fait correspondre un point M_2 sur g_2 à condition que la droite Δ, d'intersection des plans tangents en M_1 à R_1 et en M_2 à R_2, soit située dans le plan osculateur de Γ en M_0.

Cette correspondance appartient à la classe des transformations T [1]) étudiées dans une note précédente, et conduit, dans le cas particulier où la courbe Γ est à l'infini, à une correspondance entre des surfaces à génératrices respectivement parallèles, par plans tangents parallèles [2]).

La transformation ci-dessus, définie entre les points des génératrices g_1 et g_2, est une homologie, ayant le centre sur la droite caractéristique du plan déterminé par g_1 et g_2.

Dans cette note nous nous proposons d'établir les équations analytiques de cette transformation et celles de la courbe décrite par le centre d'homologie. Nous allons en indiquer même, les cas qui présentent des particularités. Nous laisserons de côté le cas où la courbe d'intersection Γ est ligne asymptotique pour l'une on pour les deux surfaces réglées. C'est là le cas singulier où à tous les points de g_1, corresponde un seul point de g_2, qui est le centre d'homologie,

2. Soit :

$$\bar{r} = \bar{r}_0(v) \tag{1}$$

l'équation vectorielle de la courbe Γ, rapportée à un système d'axes, v représentant l'arc de la courbe Γ, et :

$$(2)\qquad \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_0(v) + u_1 \cdot \bar{\alpha}_1(v) \qquad (R_1)\\ \bar{r} &= \bar{r}_0(v) + u_2 \cdot \bar{\alpha}_2(v) \qquad (R_2) \end{aligned}$$

les équations des surfaces R_1 et R_2, où $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ sont les verseurs des génératrices g_1 et g_2 de R_1, R_2 respectivement.

Le plan osculateur de Γ est déterminé par :

$$(3)\qquad \left[\bar{r} - \bar{r}_0(v)\ ,\ \dot{\bar{r}}_0(v)\ ,\ \ddot{\bar{r}}_0(v)\right] = 0$$

où $\dot{\bar{r}}_0(v)$, $\ddot{\bar{r}}_0(v)$ désignent les dérivées par rapport à l'arc v des vecteurs $\bar{r}_0$, $\dot{\bar{r}}_0$ etc.

Les plans tangents en M_1 à la surface R_1 et en M_2 à la surface R_2 sont respectivement :

$$(4)\qquad \left[\bar{r} - \bar{r}_0(v)\ ,\ \bar{\alpha}_1(v)\ ,\ \dot{\bar{r}}_0(v) + u_1 \cdot \dot{\bar{\alpha}}(v)\right] = 0$$

$$(5)\qquad \left[\bar{r} - \bar{r}_0(v)\ ,\ \bar{\alpha}_2(v)\ ,\ \dot{\bar{r}}_0(v) + u_2 \cdot \dot{\bar{\alpha}}(v)\right] = 0.$$

Les plans (3), (4), (5) passent par un même droite Δ, si l'on a :

$$(6)\qquad \lambda\left[\bar{\alpha}_1, \dot{\bar{r}}_0 + u_1\dot{\bar{\alpha}}_1\right] + \mu\left[\bar{\alpha}_2, \dot{\bar{r}}_0 + u_2 \cdot \dot{\bar{\alpha}}_2\right] = \left[\dot{\bar{r}}_0, \ddot{\bar{r}}_0\right].$$

L'élimination λ, μ, conduit à la relation :

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\left\{\left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{\alpha}}_2\right] \cdot \left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{\alpha}}_1\right] - \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{\alpha}}_1\right] \cdot \left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{\alpha}}_2\right]\right\} u_1 \cdot u_2\\ &- \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{\alpha}}_1\right]\left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{r}}_0\right] u_1 + \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{\alpha}}_2\right]\left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{r}}_0\right] u_2 = 0, \end{aligned}$$

qui est la représentation analytique de la correspondance proposée Elle prouve également que la correspondance entre les points de g_1 et g_2 est une homologie.

Désignant par :

$$(8)\qquad \begin{aligned} A &= \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{\alpha}}_2\right]\left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{\alpha}}_1\right] - \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{\alpha}}_1\right]\left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{\alpha}}_2\right]\\ B &= \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_1\right]\left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{r}}_0\right]\\ C &= \left[\dot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_2 \dot{\bar{\alpha}}_2\right]\left[\ddot{\bar{r}}_0 \bar{\alpha}_1 \dot{\bar{r}}_0\right] \end{aligned}$$

les coefficients de l'équation (7), elle prend la forme :

$$(9)\qquad u_2 = \frac{B u_1}{A u_1 + C}.$$

Pour déterminer le centre de l'homologie, on écrit l'équation des droites D, qui unissent deux points correspondants :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + u_1 (1-\lambda) . \bar{\alpha}_1 + \lambda \frac{B u_1}{A u_1 + C} \bar{\alpha}_2 . \tag{10}$$

Lorsque u_1 varie, on obtient un faisceau de droites et, si l'on prend :

$$\lambda = \frac{A u_1 + C}{A u_1},$$

le centre Ω est déterminé alors par :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 - \frac{C}{A} \bar{\alpha}_1 + \frac{B}{A} \bar{\alpha}_2 . \tag{11}$$

Quand v varie, l'équation (11) représente une courbe Γ_1, lieu des centres d'homologie pour les diverses couples des génératrices g_1 , g_2. La tangente de Γ_1 en Ω est située dans le plan π des génératrices g_1 et g_2 ; en effet on peut vérifier de (11), que :

$$\left[\dot{\bar{r}} \, \bar{\alpha}_1 \, \bar{\alpha}_2 \right] \equiv 0 .$$

3. Dans l'hypothèse :

$$\left[\bar{\alpha}_1 \, \bar{\alpha}_2 \, \dot{\bar{r}}_0 \right] \neq 0 ,$$

nons pouvons rapporter le problème au repère mobile formé par les vecteurs $\bar{\alpha}_1 , \bar{\alpha}_2 , \dot{\bar{r}}_0$.

Le cas : $[\bar{\alpha}_1 \, \bar{\alpha}_2 \, \dot{\bar{r}}_0] = 0$, c'est-à-dire celui où les deux surfaces R_1, R_2 sont tangentes le long de Γ, sera étudié à part.

Notons par ω_{ik} les composantes du déplacement infinitésimale du trièdre. On a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}}_1 &= \omega_{11} \bar{\alpha}_1 + \omega_{12} \bar{\alpha}_2 + \omega_{13} \dot{\bar{r}}_0 , \\ \dot{\bar{\alpha}}_2 &= \omega_{21} \bar{\alpha}_1 + \omega_{22} \bar{\alpha}_2 + \omega_{23} \dot{\bar{r}}_0 , \\ \dot{\bar{\alpha}}_3 &= \omega_{31} \bar{\alpha}_1 + \omega_{32} \bar{\alpha}_2 + \omega_{33} \dot{\bar{r}}_0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Les coefficients de l'équation (7), exprimés par ces composantes, sont :

$$\begin{aligned} A &= \omega_{13} . \omega_{21} . \omega_{32} - \omega_{12} . \omega_{23} . \omega_{31} , \\ B &= \omega_{12} . \omega_{31} , \\ C &= \omega_{21} , \omega_{32} . \end{aligned} \tag{13}$$

Considérons la droite caractéristique δ du plan π des génératrices g_1 , g_2 :

$$(14)\quad \begin{cases} [\bar{r}-\bar{r}_0\ ,\ \bar{\alpha}_1\ ,\ \bar{\alpha}_2\ ]=0 \\ -[\dot{\bar{r}}_0\ \bar{\alpha}_1\ \bar{\alpha}_2\ ]+[\bar{r}-\bar{r}_0,\dot{\bar{\alpha}}_1,\bar{\alpha}_2\ ]+[\bar{r}-\bar{r}_0,\bar{\alpha}_1,\dot{\bar{\alpha}}_2\ ]=0 \end{cases}$$

ou :

$$\bar{r}-\bar{r}_0=\lambda\bar{\alpha}_1+\mu\bar{\alpha}_2$$

avec le condition :

$$(15)\qquad \omega_{13}.\lambda+\omega_{23}.\mu+1=0.$$

La droite δ coupe les génératrices g_1, g_2 aux points G_1, G_2 respectivement, qui sont les points de contact de plan π avec les surfaces R_1 et R_2. Le centre Ω se trouve sur la droite caractéristique δ, car les coordonnées du centre, dans le plan π, rapporté aux axes g_1, g_2, étant :

$$-\frac{C}{A}\ ,\ \frac{B}{A},$$

vérifient l'équation (16).

Le point caractéristique du plan π ne coïncide pas, en général, avec le centre d'homologie. Cela arrive quand les équations :

$$\frac{\dot{\omega}_{23}-\omega_{13}\,\omega_{21}-\omega_{23}\,\omega_{22}}{\omega_{13}\,\dot{\omega}_{23}-\dot{\omega}_{13}\,\omega_{23}+\omega_{13}\,\omega_{23}\,(\omega_{11}-\omega_{22})+\omega_{23}^2\,\omega_{12}-\omega_{13}^2\,\omega_{21}}=\frac{C}{A}$$

$$\frac{\dot{\omega}_{13}-\omega_{12}\,\omega_{23}-\omega_{12}\,\omega_{11}}{\omega_{13}.\,\dot{\omega}_{23}-\dot{\omega}_{13}.\omega+\omega_{13}\,\omega_{23}\,(\omega_{11}-\omega_{22})+\omega_{23}^2\,\omega_{12}-\omega_{13}^2\,\omega_{21}}=\frac{B}{A}$$

sont satisfaites.

4. Dans le cas exceptionel où les deux surfaces R_1, R_2 sont tangentes le long de Γ et, par suite, nous avons :

$$(16)\qquad \dot{\bar{r}}_0=\lambda\,\dot{\bar{\alpha}}_1+\mu\bar{\alpha}_2\ ,$$

nous trouvons l'équation le l'homologie (7) sous la forme :

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\left\{(\mu\,\dot{\lambda}-\lambda\,\dot{\mu})\ h_1\,h_2+\lambda\,\mu\ (h_2\,k_1-k_1\,h_2)\right\}u_1.\ u_2 \\ &+\lambda\,\mu\ (h_1.\,\lambda+h_2.\,\mu)\ (-h_1.\,u_1+h_2.\,u_2)=0 \end{aligned}$$

où :

$$(18)\qquad \begin{aligned} h_1&=[\dot{\bar{\alpha}}_1\,\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2]\ ,\quad k_1=[\bar{\alpha}_1\,\dot{\bar{\alpha}}_1\,\dot{\bar{\alpha}}_2\ ] \\ h_2&=[\dot{\bar{\alpha}}_1\,\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2]\ ,\quad k_2=[\bar{\alpha}_2\,\dot{\bar{\alpha}}_1\,\dot{\bar{\alpha}}_1]. \end{aligned}$$

La droite caractéristique δ, du plan π, a l'équation :

$$(19)\qquad h_1\,\xi+h_2\,\eta=0$$

ξ, η étant les coordonnées d'un point, dans le plan π, rapporté aux axes g_1, g_2.

Le centre d'homologie Ω se trouve également sur la droite δ, car

ses coordonnées vérifient l'équation (19). La direction δ est conjuguée à la direction de la tangente en M_0 à Γ.

5. Les cas pour lesquels l'homologie (7) est dégénerée, sont donnés par :

$$B = 0 \quad \text{ou} \quad C = 0.$$

Si l'on suppose $B = 0$, alors on doit avoir :

$$\omega_{12} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_{31} = 0.$$

$\omega_{12} = 0$ indique que la surface R_1 est développable.

$\omega_{31} = 0$ constitue pour Γ la condition d'être une ligne asymptotique de R_2.

Les conditions que l'on obtient de $C = 0$ sont :

$$\omega_{21} = 0 \quad \text{on} \quad \omega_{32} = 0$$

et conduisent au même résultat, en changeant R_1 par R_2.

Le centre d'homologie est à l'infini si l'on a :

$$\omega_{13}\ \omega_{21}\ \omega_{32} - \omega_{12}.\ \omega_{23}\ \omega_{31} = 0.$$

Cela arrive quand les droites D, qui lient les point correspodants, sont parallèles à la droite caractéristique δ, ou quand la droite δ est elle-même à l'infini. La dernière hypothèse est réalisée par :

$$\omega_{13} = \omega_{23} = 0.$$

Dans le cas des surfaces pour lesquelles on a : $[\dot{\bar{r}}\ \bar{\alpha}_1\ \bar{\alpha}_2] = 0$, l'homologie dégénère si :

$$h_1 = 0 \quad \text{ou} \quad h_2 = 0 \ .$$

Ces conditions montrent que l'une ou l'autre des surfaces réglées est développable.

De même la relation :

$$\lambda\ h_1 + \mu\ h_2 = 0$$

exprime que la courbe Γ est une ligne asympotique des deux surfaces.

Dans ce cas, le centre Ω est à infini, quand :

$$(\mu\dot{\lambda} - \lambda\dot{\mu})\ h_1.\ h_2 + \lambda\mu\ (h_2\ k_1 - h_1\ k_2) = 0.$$

On doit adjoindre à cette condition, l'équation :

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\ \lambda\mu\ \bar{\alpha}_1\ \bar{\alpha}_2 = 1.$$

5. Pour étudier d'autre propriétés de cette correspondance, on peut utiliser le repère de Frenet de la courbe Γ en M_0. Les résultats qu'on obtient, seront exposées dans une note ultérieure.

Le problème proposé peut être généralisé, en considérant au lieu du plan osculateur de la courbe Γ, un plan quelconque par M_0.

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 1 Septembre 1947).

Travaux cités.

1. I. Creangă – *Sur une famille de transformations entre deux surfaces réglées.* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy. Vol. 2, fasc. 1. (1947), 35–45.

2. I. Creangă – *Sur la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces réglées, avec correspondance des génératrices*" C. R. des séances de l'Acad. Roumaine des Sciences. Tome I, fasc. 4.

ETUDES SUR LA THÉORIE DES SYSTÈMES MULTIPLICATIFS UNIFORMES

I. L'indice de non-associativité

par

AL. C. CLIMESCU

1. Pendant les vingt dernières années la théorie des systèmes multiplicatifs a attiré de plus en plus l'attention des mathématiciens. Mais l'intérêt pour ces systèmes est venu du côté des algébristes et c'est leur aspect structural qui a été surtout l'objet d'investigations assez poussées Cette préoccupation s'est reflétée dans le choix des axiomes, calqué sur le modèle des groupes, théorie qui a fait depuis longtemps ses preuves en cette matière ; les noms mêmes donnés aux différentes classes de systèmes multiplicatifs par les auteurs qui s'en sont ocuppés (demigroupes quasigroupes, groupoïdes, . . .) constituent une preuve à l'appui de notre affirmation.

Mais si pour obtenir des théorèmes de structure il est peut-être indispensable de se laisser guider par la théorie des groupes, il n'en est plus de même quant aux aspects arithmétiques présentés par les systèmes multiplicatifs d'ordre fini ; ici nous sommes obligés de prendre en considération tous les systèmes multiplicatifs d'un ordre donné et une classification de ces systèmes s'impose d'elle-même.

Nous pensons d'ailleurs qu'au moyen des invariants arithmétiques par rapport aux isomorphismes, l'algèbre elle-même tirera de bénéfices de cette étude.

Nous consacrons cette note à l'étude d'un tel invariant, dont voici la définition :

L'indice de non-associativité d'un système multiplicatif d'ordre fini (système donné par exemple par son tableau de Cayley) *est le nombre i des produits de trois facteurs qui satisfont à l'inégalité*

$$x(yz) \neq (xy)z,$$

x, y, z, parcourrant tous les éléments du système.

MÉRNÖKTOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

Remarques.

1⁰. L'indice i mesure en quelque sorte le degré de multiformité des produits de 3 facteurs d'un système.

2⁰ On a $0 \leq i \leq n^3$ (n étant l'ordre du système).

3⁰. Les systèmes d'un ordre donné n peuvent être partagés en classes selon la valeur de i et ce travail est consacré principalement à la démonstration du fait que pour $n \geqslant 3$ le nombre de ces classes est égal à $n^3 + 1$.

2. Supposons donné un système multiplicatif d'ordre n dont les éléments sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous allons indiquer une règle pratique pour déterminer son indice. Soit

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$$

la k-ième ligne du tableau de Cayley, c'est-à-dire la suite des produits

$$x_k x_1, x_k x_2, \ldots, x_k x_n$$

et formons les produits

$$x_m (x_k x_1), x_m (x_k x_2), \ldots, x_m (x_k x_n)$$

c'est-à-dire

$$x_m x_{k_1}, x_m x_{k_2}, \ldots, x_m x_{k_n};$$

ces produits peuvent être immédiatement remplacés par leurs valeurs, lues sur la même ligne du tableau et soit

$$(1) \qquad x_{(m,k_1)}, x_{(m,k_2)}, \ldots, x_{(m,k_n)},$$

la suite obtenue. Soit encore $x_m x_k = x_j$; on a $(x_m x_k) x_p = x_j x_p$, donc les produits $(x_m x_k) x_1$, $(x_m x_k) x_2, \ldots, (x_m x_k) x_n$ donnent

$$(2) \qquad x_j x_1, x_j x_2, \ldots, x_j x_n,$$

c'est-à-dire la j-ième ligne du tableau. Les coïncidences entre la ligne (1) et la ligne (2) indiquent les produits associatifs, donc le nombre des non-coïncidences est l'indice partiel relatif aux produits de la forme $x_m (x_k x_p)$ où m et k sont fixes et p est variable de 1 à n. En opérant de même avec tous les couples d'entiers m, k ($m, k = 1, 2, \ldots, n$) et en sommant les indices partiels on obtient la valeur de l'indice i. Observons encore qu'en multipliant à la fois tous les éléments du tableau par x_i on prend en considération tous les produits de la forme $x_i (yz)$, d'où la règle pratique suivante :

I. *On multiplie le tableau du système à gauche par x_j et on met en regard le tableau dont les lignes par ordre descendant sont celles des éléments $x_j x_1, x_j x_2, \ldots, x_j x_n$. Si C_j est le nombre des non-coïncidences de ces deux tableaux, c'est-à-dire le nombre des*

produits non-associatifs de la forme $x_i\,(yz)$, *la somme des* C_i *donne l'indice du système.*

Soit par exemple le système

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

et désignons par T son tableau. On a

$$aT = \begin{matrix} aa & ac & ab \\ ac & ab & aa \\ ab & aa & ac \end{matrix} = \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & b & a \end{matrix}$$

et en regard on doit mettre le tableau des lignes a, c, b, c'est-à-dire

$$\begin{matrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{matrix};$$

par comparaison on obtient la valeur 6 comme indice partiel relatif à a. On a de même pour les éléments b et c

$$b)\ \begin{matrix} c & a & b \\ b & c & a \\ b & c & a \end{matrix}, \begin{matrix} b & a & c \\ a & c & b \\ a & c & b \end{matrix};\quad c)\ \begin{matrix} b & c & a \\ a & b & c \\ a & b & c \end{matrix}, \begin{matrix} c & a & b \\ b & a & c \\ b & a & c \end{matrix}$$

d'indices partiels $= 6$, donc $i = 6 + 6 + 6 = 18$.

On peut encore procéder d'une autre manière. Formons le tableau

$$\begin{matrix} x_1\,(x_j\,x_1)\ x_1(x_j\,x_2),\ \ldots,\ x_1(x_j\,x_n) \\ x_2\,(x_j\,x_1)\ x_2(x_j\,x_2),\ \ldots,\ x_2(x_j\,x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n\,(x_j\,x_1)\ x_n(x_j\,x_2),\ \ldots,\ x_n(x_j\,x_n) \end{matrix}$$

qu'on obtient en multipliant successivement à gauche la ligne j du tableau par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou mieux encore, en observant que la k-ième colonne de ce tableau est la colonne correspondant à l'élément $x_j\,x_k$ dans le tableau du système (ou encore la colonne correspondant au k-ième élément de la ligne j). D'autre part la ligne m du tableau

$$\begin{matrix} (x_1\,x_j)x_1\ (x_1\,x_j)x_2,\ \ldots,\ (x_1\,x_j)x_n \\ (x_2\,x_j)x_1\ (x_2\,x_j)x_2,\ \ldots,\ (x_2\,x_j)x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n\,x_j)x_1\ (x_n\,x_j)x_2,\ \ldots,\ (x_n\,x_j)x_n \end{matrix}$$

est la ligne correspondant dans le tableau du système à l'élément $x_m x_j$, c'est-à-dire la ligne correspondant au m-ième élément de la colonne j, et on obtient la règle pratique suivante :

II. *Pour déterminer l'indice relatif à la ligne j on écrit à gauche le tableau des colonnes correspondantes aux éléments de la ligne j dans l'ordre indiqué par la succession de ces éléments, et à droite, en regard le tableau des lignes correspondantes aux éléments de la colonne j, dans l'ordre indiqué par la succession de haut en bas de ces éléments. Le nombre des non-coincidences de ces tableaux donne l'indice partiel relatif à la ligne j et la somme des indices partiels donne l'indice du système.*

En reprenant l'exemple traité et en numérotant par 1, 2, 3, les lignes et par, I, II, III, les colonnes on a par ex. pour la ligne 1 les deux tableaux

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ & & 2 \\ & & 3 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{array}$$

et l'indice partiel relatif à la première ligne est $= 6$, etc.

3. Indiquons encore une règle pour la formation des systèmes isomorphes à un système donné, les éléments étant notés avec les mêmes lettres. Il suffit naturellement d'établir la règle pour une transposition, par ex. entre x_1 et x_2. On peut avoir

$$xy = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ z \neq x_1, x_2. \end{cases}$$

Si $x, y = x_1, x_2$ on aura dans le système isomorphe

$$xy = \begin{cases} x_2 \\ x_1 \\ z. \end{cases}$$

Si $x = x_1, x_2$ et $y \neq x_1, x_2$ on aura

$$x_2(x_1)\, y = \begin{cases} x_2 \\ x_1 \\ z \end{cases}$$

et, de même si $x \neq x_1(x_2)$ et $y = x_1(x_2)$. Enfin si $x = x_1(x_2)$, $y = x_1(x_2)$ on aura

$$x_2(x_1).\ x_2(x_1) = \begin{cases} x_2 \\ x_1 \\ z \end{cases}$$

ce qui montre que pour obtenir le système isomorphe il faut :

1°. échanger respectivement entre elles les lignes x_1, x_2, et les colonnes x_1, x_2.

2°. remplacer ensuite partout dans le tableau, x_1 par x_2 et x_2 par x_1 tout en laissant les autre éléments inchangés.

On peut donc énoncer la règle :

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *les éléments du système et*

$$1\ 2\ \ldots\ n$$
$$i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$$

l'isomorphisme désiré. On permute par la même substitution respectivement les lignes et les colonnes du tableau donné (ces deux opérations sont évidemment permutables) *et ensuite on remplace partout* x_1 *par* x_{i_1}, x_2 *par* x_{i_2}, ..., x_n *par* x_{i_n}. *Le tableau obtenu sera le tableau du système isomorphe.*

Soit par exemple le système

	a	b	c
a	a	a	b
b	b	b	c
c	c	c	c

et soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ la permutation désirée. On a successivement

b	b	c	b	c	b	a	b	a
c	c	c	c	c	c	b	b	b
a	a	b	a	b	a	c	a	c

donc le système

	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	b
c	c	a	c

est isomorphe au système donné par la correspondance $a \longrightarrow c$, $b \longrightarrow a$, $c \longrightarrow b$.

4. Nous précisons maintenant le caractère algébrique de l'indice de non-associativité en démontrant son invariance par rapport aux isomorphismes et à la transposition.

I. *L'indice i est invariant par rapport aux isomorphismes.*

Il suffit de montrer l'invariance par rapport à une transposition ;

mais il résulte immédiatement de l'application de la règle de formation des systèmes isomorphes et de la règle II du § 2 que les valeurs des indices des lignes x_1 et x_2 se permutent entre elles, ce qui démontre l'invariance de leur somme, tandis que les indices des autres lignes demeurent inchangés, ce qui montre l'invariance de i par rapport à une transposition et partant par rapport à tout isomorphisme.

Appelons système transposé d'un système donné celui qu'on obtient en prenant pour son tableau le transposé du premier.

II. *L'indice i est invariant par rapport à la transposition.*

Désignons par D et T respectivement l'opération de la formation des produits binaires dans les deux systèmes. On a

$$xDy = yTx,\ xD(yDz) = (yDz)\,Tx = (zTy)\,Tx,\ (xDy)\,Dz = \\ = zT(xDy) = zT(yTx)$$

ce qui montre qu'on a en même temps

$$xD(yDz) = (xDy)\,Dz \quad \text{et} \quad (zTy)\,Tx = zT(yTx) \text{ et}$$
$$xD(yDz) \neq (xDy)\,Dz \quad \text{et} \quad (zTy)\,Tx \neq zT(yTx)$$

et cela démontre le résultat.

5. Passons maintenant à la détermination des classes pour $n = 2$.

Il est évident que le système

	a	b
a	a	a
b	a	a

est associatif ($i = 0$) et, par isomorphisme la même chose est vraie pour le système

	a	b
a	b	b
b	b	b.

De même l'indice des systèmes isomorphes

	a	b
a	a	a
b	a	b

	a	b
a	a	b
b	b	b

est égal à zéro.

On vérifie sans peine que l'indice des systèmes isomorphes

	a	b
a	a	a
b	b	a

	a	b
a	b	a
b	b	b

et, par conséquent, de leurs transposés

	a	b
a	a	b
b	a	a

	a	b
a	b	b
b	a	b

est égal à 2.

L'indice des systèmes automorphes et transposés

	a	b
a	a	a
b	b	b

	a	b
a	a	b
b	a	b

est égal à 0.

L'indice des systèmes isomorphes

	a	b
a	a	b
b	b	a

	a	b
a	b	a
b	a	b

est égal à 0.

L'indice des systèmes isomorphes

	a	b
a	b	a
b	a	a

	a	b
a	b	b
b	b	a

est égal à 4.

Enfin l'indice des systèmes automorphes et transposés

	a	b
a	b	a
b	b	a

	a	b
a	b	b
b	a	a

est égal à 8.

Ayant ainsi examiné tous les 16 systèmes uniformes possibles d'ordre 2, on peut énoncer le résultat :

Si on classifie les systèmes d'ordre 2 d'après la valeur de i, il y a 4 classes correspondant respectivement aux valeurs $i = 0, 2, 4, 8$.

On peut démontrer ce résultat d'une autre manière, en appliquant le

Lemme. *Il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des systèmes multiplicatifs d'ordre 2 et l'ensemble des polynômes*

$$f(x, y) \equiv a + bx + cy + dxy \qquad (\text{mod. } 2).$$

(a, b, c, d, x, y, étant des entiers mod. 2).

On voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$f(x, y) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

quelques soient x, y, est

$$a \equiv 0,\ b \equiv 0,\ c \equiv 0,\ d \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 2)$$

donc tous les polynomes sont distincts et au nombre de 16. Un polynome étant donné, le tableau

	0	1
0	$f(0,0)$	$f(0,1)$
1	$f(1,0)$	$f(1,1)$

donne, interprété abstraitement, un système multiplicatif d'ordre 2 et puisque le nombre des systèmes abstraits et des polynomes distincts est le même, on les obtient tous.

On a, en tenant compte des relations

$$x^2 \equiv x,\ 2x \equiv 0,\ x - y \equiv x + y, \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$f(x, f(y,z)) = a + bx + c(a + by + cz + dyz) + dx(a + by + cz + dyz) \equiv a + ac + (b + ad)x + bcy + cz + bdxy + cdxz + cdyz + dxyz;$$

$$f(f(x,y), z) = a + b(a + bx + cy + dxy) + cz + d(a + bx + cy + dxy)z \equiv a + ab + bx + bcy + (c + ad)z + bdxy + bdxz + cdyz + dxyz;$$

$$f(x, f(y,z)) - f(f(x,y), z) \equiv a(b + c) + adx + adz + d(b + c)xz = a(b + c) + ad(x + z) + d(b + c)z.$$

On a

$$f(0, f(0,0)) - f(f(0,0), 0) \equiv f(0, f(1,0)) - f(f(0,1), 0) \equiv a(b + c);$$
$$f(0, f(0,1)) - f(f(0,0), 1) \equiv f(0, f(1,1)) - f(f(0,1), 1) \equiv a(b + c + d);$$
$$f(1, f(0,0)) - f(f(1,0), 0) \equiv f(1, f(1,0)) - f(f(1,1), 0) \equiv a(b + c + d);$$
$$f(1, f(0,1)) - f(f(1,0), 1) \equiv f(1, f(1,1)) - f(f(1,1), 1) \equiv (a + d)(b + c)$$

Si

$$f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z), \text{ alors}$$
$$f(x, f(y,z)) - f(f(x,y), z) \equiv 0$$

et si

$$f(x, f(y,z)) \neq f(f(x,y), z), \text{ alors}$$
$$f(x, f(y,z)) - f(f(x,y), z) \equiv 1,$$

donc l'indice sera égal à

$$2a(b + c) + 4a(b + c + d) + 2(a + d)(b + c),$$

les expressions littérales étant calculées séparément.
Les cas suivants seront donc possibles ;

I. $a(b + c) \equiv 0,\ a(b + c + d) \equiv 0,\ (a + d)(b + c) \equiv 0$

ce qui peut se produire si

$1^0.\ a \equiv 0,\ d = 0.$

$2^0.\ a \equiv 0,\ b \equiv c,\ d \equiv 1.$

$3^0.\ a \equiv 1,\ b \equiv c,\ d \neq 0;$

les 8 polynomes suivants seront par conséquent associatifs $(i = 0)$:

$$f(x,y) = 0,\ f(x,y) = x,\ f(x,y) = y,\ f(x,y) = x + y,\ f(x,y) = xy,$$
$$f(x,y) = x + y + xy,\ f(x,y) = 1,\ f(x,y) = 1 + x + y.$$

II. $a(b + c) \equiv 0,\ a(b + c + d) \equiv 1$

ce qui peut se produire si

$1^0.\ a \equiv 1,\ b \equiv 0,\ c \equiv 0,\ d \equiv 1;$

$2^0.\ a \equiv 1,\ b \equiv 1,\ c \equiv 1,\ d \equiv 1,$

et alors

$$(a + d)(b + c) \equiv 0,$$

donc les systèmes

$$f(x,y) = 1 + xy,\ f(x,y) = 1 + x + y + xy,$$

auront l'indice $i = 4$.

III. $a(b + c) \equiv 1,\ a(b + c + d) \equiv 0$, ce qui entraîne

$$a = 1,\ b + c \equiv 1,\ d \equiv 1,\ (a + d)(b + c) \equiv 0,$$

donc les polynomes

$$f(x,y) = 1 + x + xy,\ f(x,y) = 1 + y + xy$$

auront l'indice $i = 2$.

IV. $a(b + c + d) \equiv 0,\ (a + d)(b + c) \equiv 1$, ce qui entraîne

$$a \equiv 0,\ d \equiv 1,\ b + c = 1,\ a(b + c) \equiv 0,$$

donc les polynomes

$$f(x,y) = x + xy,\ f(x,y) = y + xy$$

auront l'indice $i = 2$.

V. $a(b + c) \equiv 1,\ a(b + c + d) \equiv 1$, ce qui entraîne

$$a \equiv 1,\ b + c \equiv 1.\ d \equiv 0,\ (b + c)(a + d) \equiv 1,$$

donc les polynomes

$$f(x,y) = 1 + x,\ f(x,y) = 1 + y$$

auront l'indice $i = 8$.

On peut résumer les résultats de ce § en énonçant le théorème suivant:

Pour les systèmes multiplicatifs d'ordre 2 l'indice i peut avoir l'une des valeurs 0, 2, 4, 8.

Si le système est donné sous la forme concrète

$$a + bx + cy + dxy \qquad (\text{mod. } 2)$$

i aura la valeur

$$i = 2a(b+c) + 4a(b+c+d) + 2(a+d)(b+c).$$

Remarque. La seconde méthode de démonstration du théorème précédent est applicable, en principe, à tous les systèmes multiplicatifs dont l'ordre est un nombre premier, mais déjà pour $n = 3$ elle devient presque impraticable.

6. La démonstration du théorème fondamental se fonde sur 7 lemmes.

Lemme I. *Si un système d'ordre n a l'indice i, on peut construire un système d'ordre $n+1$ à indice égal à i.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments du système ; ajoutons l'élément x_{n+1} avec les conditions

$$x_{n+1}\, x_i = x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1);$$
$$x_j\, x_{n+1} = x_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

et on voit sans peine que tous les produits contenant un facteur $= x_{n+1}$ sont $= x_{n+1}$, donc l'indice du nouveau système sera égal à l'indice de l'ancien.

Lemme II. *Etant donné un système d'ordre n à indice i on peut construire un système d'ordre $n+2$ à* indice $= i + 4n^2 + 4n + 8$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments du système donné ; ajoutons les éléments x_{n+1}, x_{n+2}, avec les conditions

$$x_j\, x_{n+1} = x_{n+2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$x_j\, x_{n+2} = x_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$x_{n+1}\, x_j = x_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$x_{n+2}\, x_j = x_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$x_{n+1}\, x_{n+1} = x_{n+2}$$
$$x_{n+1}\, x_{n+2} = x_{n+2}$$
$$x_{n+2}\, x_{n+1} = x_{n+1}$$
$$x_{n+1}\, x_{n+2} = x_{n+1}.$$

Les $(n+2)^3$ produits de trois facteurs se partagent en les classes suivantes :

1^0. $x_i\,(x_j x_k)$ $\qquad (i, j, k \leq n)$

2^0. $x_i\,(x_j x_{n+1})$ $\qquad (i, j \leq n)$

3^0. $x_i(x_j\, x_{n+2})$ $(i, j \leq n)$

4^0. $x_{n+1}(x_i\, x_{n+i})$ $(i \leq n)$

5^0. $x_{n+1}(x_i\, x_{n+2})$ $(i \leq n)$

6^0. $x_{n+2}(x_i\, x_{n+1})$ $(i \leq n)$

7^0. $x_{n+2}(x_i\, x_{n+2})$ $(i \leq n)$

8^0. $x_i(x_{n+1}\, x_{n+1})$ $(i \leq n)$

9^0. $x_i(x_{n+1}\, x_{n+2})$ $(i \leq n)$

10^0. $x_i(x_{n+2}\, x_{n+1})$ $(i \leq n)$

11^0. $x_i(x_{n+2}\, x_{n+2})$ $(i \leq n)$

12^0. $x_i(x_j\, x_k)$ $(i, j, k > n)$

13^0. $x_{n+1}(x_i\, x_j)$ $(i, j, \leq n)$

14^0. $x_{n+2}(x_i\, x_j)$ $(i, j, \leq n)$

15^0. $x_{n+1}(x_{n+1}\, x_i)$ $(i \leq n)$

16^0. $x_{n+1}(x_{n+2}\, x_i)$ $(i \leq n)$

17^0. $x_{n+2}(x_{n+1}\, x_i)$ $(i \leq n)$

18^0. $x_{n+2}(x_{n+2}\, x_i)$ $(i \leq n)$

19^0. $x_i(x_{n+1}\, x_j)$ $(i, j \leq n)$

20^0. $x_i(x_{n+2}\, x_j)$ $(i, j \leq n)$

Déterminons la contribution de chaque classe à la valeur de l'indice.

1^0. $x_j(x_i\, x_k)$, i, j, k, étant $\leq n$; la contribution de cette classe est évidemment égale à i.

2^0. $x_i(x_j\, x_{n+1}) = x_i\, x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i, j \leq n)$

$(x_i\, x_j)\, x_{n+1} = x_{n+2}$,

donc la contribution de cette classe sera égale à n^2.

3^0. $x_i(x_j\, x_{n+2}) = x_i\, x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i, j \leq n)$

$(x_i\, x_j)\, x_{n+2} = x_{n+1}$,

donc la contribution de cette classe sera égale à n^2.

4^0. $x_{n+1}(x_i\, x_{n+1}) = x_{n+1}\, x_{n+2} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+1}\, x_i)\, x_{n+2} = x_{n+1}\, x_{n+2} = x_{n+2}$

donc la contribution de cette classe est nulle.

5^0. $x_{n+1}(x_i\, x_{n+2}) = x_{n+1}\, x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+1}\, x_i)\, x_{n+2} = x_{n+1}\, x_{n+2} = x_{n+2}$,

donc la contribution de cette classe est $= 0$.

6^0. $x_{n+2}(x_i\, x_{n+1}) = x_{n+2}\, x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+2}\, x_i)\, x_{n+1} = x_{n+1}\, x_{n+1} = x_{n+2}$.

donc la contribution de cette classe est $= n$.

7^0. $x_{n+2}(x_i\, x_{n+2}) = x_{n+2}\, x_{n+1} = x_{n+1}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+2}\, x_i)\, x_{n+2} = x_{n+1}\, x_{n+2} = x_{n+2}$.

donc la contribution de cette classe est $= n$.

8^0. $x_i(x_{n+1}\, x_{n+1}) = x_i\, x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i \leq n)$

$(x_i\, x_{n+1})\, x_{n+1} = x_{n+2}\, x_{n+1} = x_{n+1}$,

donc la contribution de cette classe sera égale à 0.

9^0. $x_i(x_{n+1}\, x_{n+2}) = x_i\, x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i \leq n)$

$(x_i\, x_{n+1})\, x_{n+2} = x_{n+2}\, x_{n+2} = x_{n+1}$,

donc contribution $= 0$.

10^0. $x_i(x_{n+2}\, x_{n+1}) = x_i\, x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_i\, x_{n+2})\, x_{n+1} = x_{n+1}\, x_{n+1} = x_{n+2}$,

donc contribution $= 0$.

11^0. $x_i(x_{n+2}\, x_{n+2}) = x_i\, x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_i\, x_{n+2})\, x_{n+2} = x_{n+1}\, x_{n+} = x_{n+2}$,

donc contribution $= 0$.

12^0. $x_i(x_j\, x_k) \neq (x_i\, x_j)\, x_k$ $(i, j, k > n)$

donc contribution égale à 8.

13^0. $x_{n+1}(x_i\, x_j) = x_{n+1}$ $(i, j, \leq n)$

$(x_{n+1}\, x_j)\, x_j = x_{n+1}\, x_i = x_{n+1}$ $(i, j \leq n)$

donc contribution nulle.

14^0. $x_{n+2}(x_i\, x_j) = x_{n+1}$ $(i, j \leq n)$

$(x_{n+2}\, x_i)\, x_j = x_{n+1}\, x_j = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

15^0. $x_{n+1}(x_{n+1}\, x_i) = x_{n+1}\, x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+1}\, x_{n+1})\, x_i = x_{n+2}\, x_i = x_{n+1}$,

donc contribution $= n$.

16^0. $x_{n+1}(x_{n+2}\, x_i) = x_{n+1}\, x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+1}\, x_{n+2})\, x_i = x_{n+2}\, x_i = x_{n+1}$,

donc contribution $= n$.

17^0. $\quad x_{n+2}(x_{n+1}\,x_i) = x_{n+2}\,x_{n+1} = x_{n+1} \qquad (i \leq n)$

$(x_{n+2}\,x_{n+1})\,x_i = x_{n+1}\,x_i = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

18^0. $\quad x_{n+2}(x_{n+2}\,x_i) = x_{n+2}\,x_{n+1} = x_{n+1} \qquad (i \leq n)$

$(x_{n+2}\,x_{n+2})\,x_i = x_{n+1}\,x_i = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

19^0. $\quad x_i\,(x_{n+1}\,x_j) = x_i\,x_{n+1} = x_{n+2} \qquad (i,j \leq n)$

$(x_i\,x_{n+1})\,x_j = x_{n+2}\,x_j = x_{n+1}$,

donc contribution $= n^2$.

20^0. $\quad x_i\,(x_{n+2}\,x_j) = x_i\,x_{n+1} = x_{n+2} \qquad (i,j \leq n)$

$(x_i\,x_{n+2})\,x_j = x_{n+1}\,x_j = x_{n+1}$,

donc contribution $= n^2$.

L'indice du système construit est bien égal à $i + 4n^2 + 4n + 8$.

Lemme III. *Etant donné un système d'ordre n à indice i on peut construire un système d'ordre* $n+2$ *à indice* $= i + 4n^2 + 8n + 8$.

Formons un système d'ordre $n+2$ en ajoutant les éléments x_{n+1}, x_{n+2}, avec les conditions :

$$x_i\,x_{n+1} = x_{n+2} \qquad (i = 1,2\ ,\ldots,\ n+2)$$
$$x_i\,x_{n+2} = x_{n+1} \qquad (i = 1,2\ ,\ldots,\ n+2)$$
$$x_{n+1}\,x_i = x_{n+2} \qquad (i = 1,2\ ,\ldots,\ n)$$
$$x_{n+2}\,x_i = x_{n+1} \qquad (i = 1,2\ ,\ldots,\ n).$$

Les $(n+2)^3$ produits de trois facteurs du nouveau système se répartissent comme il suit :

1^0.	$x_i\,(x_j\,x_k)$	$(i,j,k \leq n)$
2^0.	$x_i\,(x_j\,x_{n+1})$	$(i,j = 1,2\ ,\ldots,\ n+2)$
3^0.	$x_i\,(x_i\,x_{n+2})$	$(i,j = 1,2\ ,\ldots,\ n+2)$
4^0.	$x_i\,(x_{n+1}\,x_j)$	$(i,j \leq n)$
5^0.	$x_i\,(x_{n+2}\,x_j)$	$(i,j \leq n)$
6^0.	$x_{n+1}\,(x_i\,x_j)$	$(i,j \leq n)$
7^0.	$x_{n+2}\,(x_i\,x_j)$	$(i,j \leq n)$
8^0.	$x_{n+1}\,(x_{n+1}\,x_i)$	$(i \leq n)$
9^0.	$x_{n+1}\,(x_{n+2}\,x_i)$	$(i \leq n)$
10^0.	$x_{n+2}\,(x_{n+1}\,x_i)$	$(i \leq n)$
11^0.	$x_{n+2}\,(x_{n+2}\,x_i)$	$(i \leq n)$.

Déterminons le nombre de produits non-associatifs contenus dans chaque classe.

1^0. $x_i (x_j x_k)$ $(i, j, k \leq n)$;

contribution $= i$.

2^0. $x_i (x_j x_{n+1}) = x_i x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i, j \leq n+2)$

$(x_i x_j) x_{n+1} = x_{n+2}$,

donc contribution $= (n+2)^2$.

3^0. $x_i (x_j x_{n+2}) = x_i x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i, j \leq n+2)$

$(x_i x_j) x_{n+2} = x_{n+1}$,

donc contribution $= (n+2)^2$.

4^0. $x_i (x_{n+1} x_j) = x_i x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i, j \leq n)$

$(x_i x_{n+1}) x_j = x_{n+2} x_j = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

5^0. $x_i (x_{n+2} x_j) = x_i x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i, j \leq n)$

$(x_i x_{n+2}) x_j = x_{n+1} x_j = x_{n+2}$,

donc contribution nulle.

6^0. $x_{n+1} (x_i x_j) = x_{n+2}$ $(i, j \leq n)$

$(x_{n+1} x_i) x_j = x_{n+2} x_j = x_{n+1}$,

donc contribution $= n^2$.

7^0. $x_{n+2} (x_i x_j) = x_{n+1}$ $(i, j \leq n)$

$(x_{n+2} x_i) x_j = x_{n+1} x_j = x_{n+2}$,

donc contribution $= n^2$.

8^0. $x_{n+1} (x_{n+1} x_i) = x_{n+1} x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+1} x_{n+1}) x_i = x_{n+2} x_i = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

9^0. $x_{n+1} (x_{n+2} x_i) = x_{n+1} x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+1} x_{n+2}) x_i = x_{n+1} x_i = x_{n+2}$

donc contribution nulle.

10^0. $x_{n+2} (x_{n+1} x_i) = x_{n+2} x_{n+2} = x_{n+1}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+2} x_{n+1}) x_i = x_{n+2} x_i = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

11^0. $x_{n+2} (x_{n+2} x_i) = x_{n+2} x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i \leq n)$

$(x_{n+2} x_{n+2}) x_i = x_{n+1} x_i = x_{n+2}$,

donc contribution nulle.

En ajoutant on trouve bien que l'indice du système d'ordre $n+2$ est égal à

$$i + 4n^2 + 8n + 8.$$

Lemme IV. *Etant donné un système d'ordre n est d'indice i, on peut construire un système d'ordre* $n+3$ *et d'indice*

$$i + 6n^2 + 18n + 27.$$

Ajoutons les éléments x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, avec les conditions :

$$\begin{aligned}
x_i\, x_{n+1} &= x_{n+2} && (i = 1,2, \ldots, n+3)\\
x_i\, x_{n+2} &= x_{n+3} && (i = 1,2, \ldots, n+3)\\
x_i\, x_{n+3} &= x_{n+1} && (i = 1,2, \ldots, n+3)\\
x_{n+1}\, x_i &= x_{n+2} && (i = 1,2, \ldots, n)\\
x_{n+2}\, x_i &= x_{n+3} && (i = 1,2, \ldots, n)\\
x_{n+3}\, x_i &= x_{n+1} && (i = 1,2, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Il y a 38 classes de produits de 3 facteurs, la contribution de chaque classe à la valeur de l'indice étant indiquée ci-dessous :

1^0. $\quad x_i\,(x_j\, x_k) \qquad (i, j, k = 1,2, \ldots, n)$

contribution $= i$.

2^0. $\quad x_i(x_j x_{n+1}) = x_i x_{n+2} = x_{n+3} \quad (i, j = 1,2, \ldots, n)$

$(x_i x_j) x_{n+1} = x_{n+2}$,

donc contribution $= n^2$.

3^0. $\quad x_i(x_j x_{n+2}) = x_i x_{n+3} = x_{n+1} \quad (i, j = 1,2, \ldots, n)$

$(x_i x_j)\, x_{n+2} = x_{n+3}$,

donc contribution égale à n^2.

4^0. $\quad x_i(x_j x_{n+3}) = x_i x_{n+1} = x_{n+2} \quad (i, j = 1,2, \ldots, n)$

$(x_i x_j)\, x_{n+3} = x_{n+1}$,

donc contribution $= n^2$.

5^0. $\quad x_i(x_{n+1}\, x_j) = x_i x_{n+2} = x_{n+3} \quad (i, j = 1,2, \ldots, n)$

$(x_i x_{n+1})\, x_j = x_{n+2}\, x_j = x_{n+3}$,

donc contribution nulle.

6^0. $\quad x_i(x_{n+2}\, x_j) = x_i x_{n+3} = x_{n+1} \quad (i, j = 1,2, \ldots, n)$

$(x_i x_{n+2})\, x_j = x_{n+3}\, x_j = x_{n+1}$,

donc contribution nulle.

7^0. $x_i(x_{n+3}\,x_j) = x_i\,x_{n+1} = x_{n+2}$ $(i, j, = 1,2\ .\ .\ ,\ n)$
$(x_i\,x_{n+3})\,x_j = x_{n+1}\,x_j = x_{n+2}$,

donc contribution nulle.

8^0, 9^0, 10^0. $x_{n+i}(x_j\,x_k) = x_{n+i+1}$ $(j, k \leq n;\ i = 1,2,3)$
$(x_{n+i}\,x_j)\,x_k = x_{n+i+1}\,x_k = x_{n+i+2}$,

donc contribution totale $= 3n^2$, les indices $n+i$ étant réduits mod. $n+3$

11^0, 12^0, 13^0. $x_i(x_{n+1}\,x_{n+j}) = x_i\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1, 2, 3)$
$(x_i\,x_{n+1})\,x_{n+j} = x_{n+2}\,x_{n+j} = x_{n+j+1}$,

donc contribution totale $= 3n$.

14^0, 15^0, 16^0. $x_i(x_{n+2}\,x_{n+j}) = x_i\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1,2,3)$
$(x_i\,x_{n+2})\,x_{n+j} = x_{n+j+1}$,

donc contribution totale $= 3n$.

17^0, 18^0, 19^0. $x_i(x_{n+3}\,x_{n+j}) = x_i\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1,2,3)$
$(x_i\,x_{n+3})\,x_{n+j} = x_{n+1}\,x_{n+j} = x_{n+j+1}$

donc contribution totale $= 3n$.

20^0, 21^0, 22^0, $x_{n+1}(x_i\,x_{n+j}) = x_{n+1}\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1,2,3)$
$(x_{n+1}\,x_i)\,x_{n+j} = x_{n+j+1}$,

donc contribution $= 3n$.

23^0, 24^0, 25^0. $x_{n+2}(x_i\,x_{n+j}) = x_{n+2}\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1,2,3)$
$(x_{n+2}\,x_i)\,x_{n+j} = x_{n+j+1}$,

donc contribution $= 3n$.

26^0, 27^0, 28^0. $x_{n+3}(x_1\,x_{n+\ ,}) = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1, 2, 3)$
$(x_{n+3}\,x_i)\,x_{n+j} = x_{n+j+1}$,

donc contribution $= 3n$.

$29^0, 30^0, 31^0$. $x_{n+1}(x_{n+j}\,x_i) = x_{n+1}\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1,2,3)$
$(x_{n+1}\,x_{n+j})\,x_i = x_{n+j+1}\,x_i = x_{n+j+2}$,

donc contribution nulle.

32^0, 33^0, 34^0. $x_{n+2}(x_{n+j}\,x_i) = x_{n+2}\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1, 2, 3)$
$(x_{n+2}\,x_{n+j})\,x_i = x_{n+j+1}\,x_i = x_{n+j+2}$,

donc contribution nulle.

35^0, 36^0, 37^0. $x_{n+3}(x_{n+j}\,x_i) = x_{n+3}\,x_{n+j+1} = x_{n+j+2}$ $(i \leq n;\ j = 1,2,3)$
$(x_{n+3}\,x_{n+j})\,x_i = x_{n+j+1}\,x_i = x_{n+j+2}$,

donc contribution nulle.

38^0. $\quad x_i (x_j x_k) \neq (x_i x_j) x_k \qquad (i, j, k > n)$

donc contribution $= 27$.

La valeur de l'indice du système est donc bien égale à

$$i + 6n^2 + 18n + 27,$$

Lemme V. *Etant donné un système d'ordre n et d'indice i on peut construire un système d'ordre $n+3$ et d'indice*

$$i + 6n^2 + 27n + 27.$$

Ajoutons les éléments $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$, avec les conditions

$$\begin{aligned}
x_i x_{n+1} &= x_{n+2} && (i = 1, 2, \ldots, n+3)\\
x_i x_{n+2} &= x_{n+3} && (i = 1, 2, \ldots, n+3)\\
x_i x_{n+3} &= x_{n+1} && (i = 1, 2, \ldots, n+3)\\
x_{n+1} x_i &= x_{n+1} && (i = 1, 2, \ldots, n)\\
x_{n+2} x_i &= x_{n+1} && (i = 1, 2, \ldots, n)\\
x_{n+3} x_i &= x_{n+1} && (i = 1, 2. \ldots . n)
\end{aligned}$$

Il y a toujours les 38 classes de produits de trois facteurs et on voit que la contribution de chaque classe est respectivement égale à : i pour la classe 1^0 ; n^2 pour les classes 2^0, 3^0, 4^0 ; n^2 pour les classes 5^0, 6^0, 7^0 ; 0 pour les classes 8^0, 9^0, 10^0 ; n pour les classes 11^0, 12^0, 13^0 ; n pour les classes 14^0, 15^0, 16^0 ; n pour les classes 17^0, 18^0, 19^0 ; n pour les classes 20^0, 21^0, 22^0 ; n pour les clases 23^0, 24^0, 25^0 ; n pour les classes 26^0, 27^0, 28^0 ; n pour les classes 29^0, 30^0, 31^0 ; n pour les classes 32^0, 33^0, 34^0 ; n pour les classes 35^0, 36^0, 37^0 ; 27 pour la classe 38^0 et on voit, en ajoutant, que la valeur de l'indice est égale à

$$i + 6n^2 + 27n + 27.$$

Lemme VI. *Etant donné un système d'ordre n et d'indice i on peut construire un système d'ordre $n+3$ et d'indice égal à*

$$i + 9n^2 + 27n + 27.$$

Ajoutons les éléments x_{n+1} , x_{n+2} , x_{n+3} , avec les conditions :

$$\begin{aligned}
x_i x_{n+1} &= x_{n+2} && (i = 1,2, \ldots, n+3)\\
x_i x_{n+2} &= x_{n+1} && (i = 1,2, \ldots, n+3)\\
x_i x_{n+3} &= x_{n+1} && (i = 1,2, \ldots, n+3)\\
x_{n+2} x_i &= x_{n+3} && (i = 1,2, \ldots, n)\\
x_{n+2} x_i &= x_{n+3} && (i = 1,2, \ldots, n)\\
x_{n+3} x_i &= x_{n+2} && (i = 1,2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

La première classe de produits de trois facteurs donne i produits associatifs et toutes les autres ne donnent que des produits non-associatifs, donc l'indice est bien égal à

$$i + 9n^2 + 27n + 27.$$

Lemme VII. *Il y a des systèmes d'ordre 3 à indice égal à 0, 1, 2, ..., 27; il y a des systèmes d'ordre à 4 indice = 0, 1, ..., 64 (= 4^3); il y a des systèmes d'ordre 5 à indice égal à 0, 1, ..., 125 (= 5^3).*

A) **Les systèmes à trois éléments a, b, c.** Les tableaux suivants démontrent la proposition (l'indice est indiqué au dessous de chaque système):

	a	b	c
a	a	b	c
b	c	b	c
c	c	b	c,

($i = 0$)

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	b	a,

($i = 1$)

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	b
c	a	b	b,

($i = 2$)

	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	a,

($i = 3$)

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	c	c
c	a	b	a

($i = 4$)

	a	b	c
a	a	b	a
b	b	a	a
c	a	b	a,

($i = 5$)

	a	b	c
a	a	a	b
b	b	b	c
c	c	c	a,

($i = 6$)

	a	a	b
a	a	a	b
b	a	a	b
c	a	b	b,

($i = 7$)

	a	b	c
a	a	a	b
b	a	a	b
c	a	b	a,

($i = 8$)

	a	b	c
a	a	a	a
b	c	b	b
c	b	a	c

($i = 9$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	b	a
c	a	a	c,

($i = 10$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	b	b
c	a	a	a,

($i = 11$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	a	b
c	c	c	c,

($i = 12$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	a	a
c	a	a	a,

($i = 13$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	a	a
c	c	c	c

($i = 14$)

	a	b	c
a	c	b	a
b	a	b	a
c	a	a	a,

($i = 15$)

	a	b	c
a	b	b	b
b	a	a	b
c	b	b	c,

($i = 16$)

	a	b	c
a	c	b	b
b	a	b	a
c	a	a	c,

($i = 17$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	a	c
c	c	c	a,

($i = 18$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	a	b
c	c	c	a

($i = 14$)

	a	b	c
a	b	b	a
b	a	a	a
c	c	c	a,

($i = 20$)

	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	c,

($i = 21$)

	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	c
c	b	c	b,

($i = 22$)

	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	b
c	b	c	a,

($i = 23$)

	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	b

($i = 24$)

	a	b	c
a	b	a	a
b	b	a	c
c	b	a	a,

($i = 25$)

	a	b	c
a	b	c	b
b	a	a	a
c	c	b	a,

($i = 26$)

	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	a

($i = 27$)

B). **Les systèmes à 4 éléments a, b, c, d.** Le lemme I appliqué pour $n = 3$ montre qu'il suffit de donner des exemples avec

$$28 \leq i \leq 64$$

et les tableaux suivants répondent à la question :

	a	b	c	d
a	a	a	d	a
b	a	a	d	c
c	a	a	d	c
d	a	a	d	c,

($i = 28$)

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	c	b	b	c
c	b	a	c	b
d	b	b	b	b,

($i = 29$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	b
b	a	b	a	a
c	a	a	c	a
d	b	b	a	b,

($i = 30$)

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	c	b	b	c
c	b	a	c	b
d	c	c	c	c

($i = 31$)

	a	b	c	d
a	b	b	c	c
b	c	c	b	b
c	b	b	c	c
d	c	c	b	b,

($i = 32$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	b	a	a
c	a	a	c	a
d	c	c	c	c,

($i = 33$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	b
b	a	b	a	a
c	a	a	b	a
d	b	b	a	b,

($i = 34$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	b	a	a
c	a	a	c	b
d	c	c	c	c

($i = 35$)

	a	b	c	d
a	a	c	b	a
b	a	c	b	a
c	a	c	b	a
d	a	c	b	b,

($i = 36$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	b
b	a	b	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	b,

($i = 37$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	b
b	a	b	b	a
c	a	a	a	a
d	c	c	c	c,

($i = 38$)

	a	b	c	d
a	a	a	a	b
b	b	b	c	c
c	c	d	d	d
d	a	a	a	b

($i = 39$)

	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	b	d	a
c	b	d	a	c
d	d	a	c	b,

($i = 40$)

	a	b	c	d
a	a	c	b	a
b	a	c	b	a
c	a	c	b	c
d	a	c	b	a,

($i = 41$)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	b	a	a
c	b	b	b	b
d	c	c	c	c,

($i = 42$)

	a	b	c	d
a	a	c	b	a
b	a	c	b	a
c	a	c	b	b
d	a	c	b	c

($i = 43$)

	a	b	c	d
a	a	c	b	a
b	a	c	b	a
c	a	c	b	b
d	a	c	b	b,

(i = 44)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	b	a	a
d	d	b	b	b
c	c	c	c	c,

(i = 45)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	b	a	a
c	d	d	d	d
d	c	c	c	c,

(i = 46)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	b	a	a
c	d	d	d	a
d	c	c	c	c,

(i = 47)

	a	b	c	d
a	b	c	a	a
b	b	c	a	b
c	b	c	a	c
d	b	c	a	d,

(i = 48)

	a	b	c	d
a	d	a	d	a
b	d	a	d	a
c	d	a	d	b
d	d	a	d	d,

(i = 49)

	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	c	b
c	d	a	d	b
d	a	c	b	a,

(i = 50)

	a	b	c	d
a	b	b	a	a
b	a	a	a	a
c	b	d	b	b
d	c	c	b	c,

(i = 51)

	a	b	c	d
a	a	a	b	c
b	c	c	d	d
c	d	d	a	a
d	b	c	c	c,

(i = 52)

	a	b	c	d
a	d	a	a	a
b	d	a	a	c
c	d	a	a	d
d	d	a	a	a,

(i = 53)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	c	c
c	b	c	b	b
d	b	c	d	a,

(i = 54)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	c	c
c	b	c	d	b
d	b	c	d	a,

(i = 55)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	d	a
c	b	c	d	a
d	b	c	d	d,

(i = 56)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	d	a
c	b	c	d	a
d	a	c	d	a,

(i = 57)

	a	b	c	d
a	a	a	d	b
b	b	c	d	b
c	b	c	d	b
d	b	c	d	b,

(i = 58)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	d	c
c	b	c	d	c
d	a	c	d	a,

(i = 59)

	a	b	c	d
a	b	a	a	a
b	b	a	a	a
c	b	a	a	b
d	b	a	a	a,

(i = 60)

	a	b	c	d
a	b	a	a	b
b	b	a	c	b
c	b	a	a	b
d	b	a	a	b,

(i = 61)

	a	b	c	d
a	b	c	a	a
b	b	c	a	c
c	b	c	a	b
d	b	c	a	b,

(i = 62)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	d	c
c	b	c	d	b
d	b	c	d	a,

(i = 63)

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	c	d	a
c	b	c	d	a
d	b	c	d	a,

(i = 64)

C). **Les systèmes à 5 éléments a, b, c, d, e.** Il suffit (lemme I) de donner des exemples avec $i > 64$. D'autre part grâce au lemme II on obtient des systèmes avec $56 \leq i \leq 83$ et grâce au lemme III on obtient des systèmes avec $68 \leq i \leq 95$; il suffit donc de donner des exemples avec $i \geqslant 96$.

Considérons encore les systèmes d'ordre n définis comme il suit:

$$x_i x_1 = x_n \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$
$$x_i x_j = x_1 \qquad (i = 1,2, \ldots, n;\ j = 2,3, \ldots, n-1)$$
$$x_1 x_n = x_1$$
$$x_n x_n = x_1$$

et supposons encore qu'il y a

1°. p produits $x_i x_n = x_n$;
2°. q produits $x_i x_n = x_1 \qquad (i \neq 1,n)$;
3°. r produits $x_i x_n = x_j$, avec $x_j x_n = x_n$,

p, q, r, ne sont soumis qu'aux limitations suivantes:

$$p + q + r \leq n - 2;$$
si $p = 0$ alors $r = 0$.

Les produits de trois facteurs se partagent dans les classes suivantes:

1°. $x_i (x_j x_1) = x_i x_n \qquad (i, j = 1,2, \ldots, n)$
$(x_i x_j) x_1 = x_n$

donc il y a np produits associatifs et $n(n-p)$ produits non-associatifs.

2°. $x_i (x_j x_k) = x_i x_1 = x_n \qquad (i, j = 1,2, \ldots, n;\ k = 2,3, \ldots, n-1)$
$(x_i x_j) x_k = x_1$

donc $n^2 (n-2)$ produits non-associatifs.

3°. $x_i (x_1 x_n) = x_i x_1 = x_n \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$
$(x_i x_1) x_n = x_n x_n = x_1$

donc n produits non-associatifs.

4°. $x_i (x_n x_n) = x_i x_1 = x_n \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$
$(x_i x_n) x_n = x_j x_n$

donc r produits associatifs et $n - r$ produits non-associatifs.

5°. $x_j (x_i x_n) = x_j x_1 = x_n$
$(x_j x_i) x_n = x_1 x_n = x_1$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

($j = 1,2, \ldots, n$; i les q indices qui satisfont à la condition 2^0 ci-dessus), donc nq produits non associatifs.

6^0. $\quad x_j (x_i x_n) = x_j x_n$

$\quad (x_j x_) x_n = x_1 x_n , = x_1$

(les indices i satisfaisant à la condition $x_i x_n = x_n$ et $j = 1,2, \ldots, n$) ; il y a évidemment $p(q+2)$ produits associatifs et $p(n-q-2)$ produits non-associatifs.

7^0. $\quad x_j (x_i x_n) = x_j x_k = x_1$

$\quad (x_j x_i) x_n = x_1 x_n = x_1$,

donc $n(n-p-q-2)$ produits associatifs.

Tous les produits possibles à trois facteurs étant examinés, on trouve par addition

$$i = n^3 - n^2 + (n-p)(q+2) - r.$$

Supposons $n = 5$. On peut prendre :

1^0. $p = 0, r = 0, q = 0, 1, 2, 3.$

$$i = 100 + 5(q+2) = 110, 115, 120, 125.$$

2^0. $p = 1, r = 0, q = 0, 1, 2.$

$$i = 100 + 4(q+2) = 108, 112, 116.$$

3^0. $p = 1, r = 1, q = 0, 1.$

$$i = 100 + 4(q+2) - 1 = 107, 111.$$

4^0. $p = 1, r = 2, q = 0.$

$$i = 100 + 4.2 - 2 = 106,$$

5^0. $p = 2, r = 0, q = 0, 1.$

$$i = 100 + 3(q+2) = 106, 109.$$

6^0. $p = 2, r = 1, q = 0.$

$$i = 100 + 3.2 - 1 = 105.$$

7^0. $p = 3, r = 0. q = 0.$

$$i = 100 + 2.2 = 104.$$

On obtient, par conséquent des systèmes d'ordre 5 à indice égal respectivement à 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 115, 116, 120, 125.

Ci-dessous nous donnons des exemples pour les autres valeurs de i.

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	e
b	b	c	d	a	e
c	b	c	d	a	e
d	b	c	a	a	e
e	b	c	d	a	e,

($i = 96$)

	a	b	c	d	e
a	b	b	a	e	d
b	a	a	c	e	d
c	a	a	a	e	d
d	b	b	a	e	d
e	b	b	a	e	d,

($i = 97$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	b	c	d	e	a
c	b	c	d	d	a
d	b	c	d	e	d
e	d	d	d	d	d,

($i = 98$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	a
b	b	c	d	a	d
c	b	c	d	a	c
d	a	a	a	a	b
e	a	a	a	b	a,

($i = 99$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	e
b	b	c	d	a	e
c	b	c	d	a	e
d	b	c	d	a	e
e	b	c	d	a	e,

($i = 100$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	a	e	d
b	b	c	a	e	d
c	b	c	a	e	d
d	a	b	c	e	d
e	a	a	a	e	d,

($i = 101$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	a	e	d
b	b	c	a	e	d
c	a	c	a	e	d
d	b	b	b	e	d
e	b	b	b	e	d,

($i = 102$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	a
b	b	c	d	a	d
c	b	c	d	a	c
d	b	c	d	a	b
e	a	d	c	b	a,

($i = 103$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	b	c	d	e	b
c	b	c	d	e	a
d	b	c	d	e	b
e	b	c	d	e	a,

($i = 113$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	a
b	b	c	d	a	b
c	b	c	d	a	c
d	b	c	d	a	a
e	b	c	d	a	a,

($i = 114$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	e
b	b	c	d	a	e
c	b	c	d	a	e
d	b	c	d	a	a
e	b	c	d	a	a,

($i = 117$)

	a	b	c	d	e
a	a	a	d	b	c
b	b	c	d	b	c
c	b	c	d	b	c
d	e	c	d	b	c
e	e	c	d	b	c,

($i = 118$)

	a	b	c	d	e
a	b	a	a	b	a
b	b	a	c	b	a
c	b	a	a	b	a
d	b	a	a	b	a
e	b	a	c	b	a,

($i = 119$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	b	c	d	e	a
c	b	c	d	e	a
d	b	c	e	e	a
e	b	c	d	e	a,

($i = 121$)

	a	b	c	d	e
a	b	a	a	b	d
b	b	a	c	b	d
c	b	a	a	b	d
d	b	a	a	b	d
e	b	a	d	b	d,

($i = 122$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	a	a
b	b	c	d	a	d
c	b	c	d	a	b
d	b	c	d	a	b
e	b	c	d	a	c,

($i = 123$)

	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	b	c	d	e	c
c	b	c	d	e	b
d	b	c	d	e	a
e	b	c	d	e	a.

($i = 124$)

7. Il n'y a plus que quelques mots à ajouter pour achever la démonstration du théorème fondamental suivant :

Il existe des systèmes d'ordre $n \geqslant 3$ possédant comme indice l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, n^3$.

Supposons la démonstration faite pour les ordres $n, n+1, n+2$. On obtient des systèmes d'ordre $n+3$ à indice $(n+2)^3$ grâce au lemme I. On obtient des systèmes d'ordre $n+3$ à indice satisfaisant aux inégalités

$$4(n+1)^2+4(n+1)+8 \leq i \leq (n+1)^3+4(n+1)^2+4(n+1)+8$$
$$4(n+1)^2+8(n+1)+8 \leq i \leq (n+1)^3+4(n+1)^2+8(n+1)+8$$

c'est-à-dire

$$4n^2+12n+16 \leq i \leq n^3+7n^2+15n+17,$$
$$4n^2+16n+20 \leq i \leq n^3+7n^2+19n+21$$

grâce aux lemmes II et III. On obtient des systèmes d'ordre $n+3$ à indice satisfaisant aux inégalités

$$6n^2+18n+27 \leq i \leq n^3+6n^2+18n+27,$$
$$6n^2+27n+27 \leq i \leq n^3+6n^2+27n+27,$$
$$9n^2+27n+27 \leq i \leq n^3+9n^2+27n+27$$

grâce aux lemmes IV, V, VI.

Mais on a

$4n^2+12n+16 < (n+2)^3$ pour $n \geqslant 2$,

$4n^2+16n+20 < n^3+7n^2+15n+17$ pour $n \geqslant 2$,

$6n^2+18n+27 < n^3+7n^2+19n+21$ pour $n \geqslant 2$,

$6n^2+27n+27 \leq n^3+6n^3+18n+27$ pour $n \geqslant 3$,

$9n^2+27n+27 \leq n^3+6n^2+27n+27$ pour $n \geqslant 3$,

et cela montre qu'on obtient des systèmes d'ordre $n+3$ ayant comme

indice un nombre quelconque compris entre 0 et $n^3+9n^2+27n+27=$ $=(n+3)^3$. Comme on a démontré directement le théorème pour $n=3,4,5$ (lemme VII), il en résulte sa valabilité générale.

Séminaire Mathématique,
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 1 Septembre 1947).

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET
MŰEGYETEM

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES VALEURS CARACTÉRISTIQUES DES SPECTRES CONCERNANT CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES

par

D. I. MANGERON

J'ai étudié, par différentes méthodes dans un nombre de travaux insérés dans divers Recueils [1]), plusieurs problèmes concernant la recherche des valeurs caractéristiques (le spectre) et des solutions caractéristiques correspondantes aux certains systèmes différentiels d'ordre supérieur et d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

1. Je me propose ici de formuler la liaison qui donne la variation $\delta\lambda_n$ de la valeur caractéristique n-ième en fonction des variations $\delta x_i'$, $\delta x_i''$ des dimensions du domaine

$$D\,(x_i' \leq x_i \leq x_i''),\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

en nous bornant, pour simplifier l'écriture, au problème aux limites suivant :

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_n} - \lambda A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,u = 0,$$

et

$$(\beta)\qquad u = 0 \text{ sur la frontière } FD \text{ du domaine } D,$$

où $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction continue de n variables réelles x_i et λ un paramètre.

Soit $\varphi_n(x_i)$ la solution caractéristique du problème à la frontière posé et λ_n la valeur caractéristique correspondante.

La formule qui donne $\delta\lambda_n$ en fonction des variations $\delta x'_i$, $\delta x''_i$ est

$$(1)\qquad \delta\lambda_n \int_{(D)} A(x_i)\,\varphi_n(x_i)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \delta x_j'' \int_{(FD)} \left(\frac{\partial^n \varphi_n(x_i)}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_n}\right)^2_{x=x''_j} dx_1\,dx_2 \ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \ldots dx_n +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \delta x_j' \int_{(FD)} \left(\frac{\partial^n \varphi_n(x_i)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \ldots \, \partial x_n} \right)^2_{x = x'_j} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \ldots dx_n .$$

Donc, si, par exemple, la fonction $A(x_i)$ est positive dans D, *la valeur caractéristique* λ_n *croît, quand le domaine* D *diminue.*

Si on suppose $\delta x''_j = \delta x'_j$, c'est-à-dire on fait varier le domaine D en conservant ses dimensions, $\delta\lambda_n$ s'annule et, par conséquant, λ_n passe par un extremum si on a

$$\int_{(FD)} \left(\frac{\partial^n \varphi_n(x_i)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} \right)^2_{x = x''_j} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \ldots dx_n =$$

$$= \int_{(FD)} \left(\frac{\partial^n \varphi_n(x_i)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} \right)^2_{x = x'_j} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \ldots dx_n$$

ou, encore plus particulièrement,

$$\left(\frac{\partial^n \varphi_n(x_i)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} \right)_{x = x''_j} = \pm \left(\frac{\partial^n \varphi_n(x_i)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} \right)_{x = x'_j} .$$

2. Ces résultats constituent la généralisation pour un nombre quelconques de dimensions de la formule analogue, établie pour l'équation des cordes vibrantes et pour certains problèmes à la frontière d'un intervalle choisi, par M. A. Myller [2]) et, d'un autre point de vue, peuvent être liés aux certaines extensions, pour les problèmes aux limites concernant les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur ayant des caractéristiques multiples et réelles, d'un théorème d'oscillation au sens de Sturm énoncé par M. R. Courant [3]).

3. On peut établir des formules de type (1) en considérant l'équation (α) et en choisissant autres conditions aux limites ou bien en fixant les idées sur les problèmes plus généraux comprenant dans leurs systèmes différentiels correspondants des équations aux dérivées „totales" d'une forme plus compliquée [4]) ou bien des équations qui donnent lieu aux problèmes „réductibles" au sens de M. Picone [5]).

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 26 Octobre 1947)

Travaux cités

1) a. C. R. de l'Académie des Sci., Paris, 204 (1937), 94–96 ;
b. Rend. Accad. Sci. fis. & mat., Napoli, (4), 2 (1932), 29–40 ;
c. Mathematica, Cluj, 14 (1938), 31–38.

Voir aussi :

d. A. Rosenblatt, C. R. de l'Académie des Sci., Paris, 197 (1933), 1278–1280;

e. M. Salvadori, Annali della Sc. Norm. Sup., Pisa, (2), 5 (1936), 51–72;

2. A. Myller, Gazeta Matematica, Bucarest, 14 (1909), 169–171.

Voir aussi :

C. R. de l'Académie des Sci. de Roumanie, 2 (1937). 25–28.

3. R. Courant, Gött. Nachr., (1919), 81–84.

4. a. Giornale di Matematica, 71 (1933), 89–139;

b. Bull. Ecole Polytechnique de Jassy, Tome II, Fasc. 1 (1947), 89–92.

5. M. Picone, Zb. f. Math., 27 (1943), 68, contenant le compte rendus sur l'article inséré dans les Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. (1942).

Voir aussi :

Rev. Şt. „V. Adamachi", Jassy, 31 (1945).

621, 313, 323

CONTRIBUTION THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE À L'ÉTUDE D'UN MOTEUR SYNCHRONE PAR RAPPORT À LA VARIATION DE LA TENSION D'ALIMENTATION

par

VASILE CORLĂŢEANU

1. Nous nous sommes proposé d'examiner au point de vue théorique et expérimental les caractéristiques d'un moteur synchrone dont la tension d'alimentation varie.

En général, on considère dans tous les traités d'électrotechnique que la tension d'alimentation d'un pareil moteur reste constante. Avec cette hypothèse on poursuit l'étude de toutes les propriétés du moteur synchrone. D'habitude cette supposition reste vraie pour la plupart des réseaux. Mais, même dans ce cas, nous croyons utile d'examiner le problème pour voir dans quelles conditions fonctionne un moteur calculé pour une certaine tension et une certaine puissance, quand sa charge et les autres conditions de fonctionnement varient.

Dans la première série d'études et d'essais, nous avons considéré un facteur de puissance constant. Dans ce cas nous avons examiné la manière dont se comporte la force électromotrice, le courant principal, le courant d'excitation, les pertes et le rendement du moteur synchrone quand on change la tension d'alimentation.

Dans la deuxième série d'études et d'essais le courant d'excitation a été gardé constant. En conséquence le facteur de puissance subira une certaine variation qui sera étudiée. Les autres éléments principaux du moteur aussi auront des variations que nous étudierons également.

2. On ne peut pas faire un historique de ces questions, parce que dans tous les traités et les revues que nous avons eus à notre disposition nous n'avons rien trouvé comme études théoriques ou expérimentales, se rapportant aux problèmes qui nous intéressent.

Nous croyons utile de mentionner une étude analogue se rapportant au moteur d'induction triphasé. Dans cette étude datant de 1938, Parteni et V. Georgescu [1]) étudient l'influence de la varia-

tion de la tension d'alimentation d'un moteur d'induction sur les pertes et le rendement. Les auteurs étudient au point de vue théorique ce problème, en aboutissant à la conclusion, que dans les hypothèses admises, le rendement du moteur prend une valeur maximum pour une certaine valeur de la tension d'alimentation. En même temps les auteurs vérifient cette conclusion sur les moteurs en état de projet.

Plus tard, en 1944, Parteni et Corlățeanu [2]) dans une étude expérimentale vérifient la théorie précédente et trouvent une concordance assez bonne entre les valeurs calculées et mesurées.

Dans cette dernière étude on donne aussi la variation du courant absorbé par le moteur à différentes charges. On constate que le courant, à une charge donnée, passe par une valeur minimum pour une valeur déterminée de la tension.

En même temps on a observé par expérience que les valeurs minima du courant pour différentes charges varient en fonction de la tension, d'abord suivant une droite, qui à partir d'une certaine valeur de la tension devient courbe, les valeurs du courant augmentant par suite de la saturation.

D'autre part, on constate que la puissance minimum absorbée varie en fonction de la tension d'alimentation d'une façon linéaire.

D'une manière analogue varient les valeurs maxima des rendements pour différentes charges du moteur, en fonction de la tension d'alimentation.

3. Commençons par l'étude des pertes qu'on rencontre dans un moteur synchrone, ayant une tension variable et un facteur de puissance constant.

Supposons, dans ce qui suit, que la puissance fournie par le moteur sur l'arbre P_a en watts reste constante ; par conséquent le couple C reste aussi constant.

Les pertes totales comprennent : les pertes magnétiques p_{mg}, les pertes électriques p_e, les pertes mécaniques p_m et les pertes pour excitation p_{ex}.

On peut les mettre sous la forme :

$$p_t = p_{mg} + p_e + p_m + p_{ex}.$$

En supposant la tension variable, les pertes magnétiques et électriques subiront certaines variations, tandis que les pertes mécaniques garderont les mêmes valeurs. Quant aux pertes dans l'excitation, celles-ci subiront ou non des variations suivant les conditions de fonctionnement imposées.

Nous étudierons les différentes pertes par catégorie pour pouvoir mieux saisir la dépendance de la tension d'alimentation.

4. *Pertes par hystérésis.* Ces pertes se manifestent dans l'armature et les dents de l'induit.

a). Arnold[3]) donne la formule suivante pour l'évaluation de ces pertes dans l'*armature* en watts :

$$(1) \qquad p_{Ha} = k_1 \frac{f}{100}\left(\frac{B_a}{1000}\right)^{1,6} V_a$$

où :

k_1 est le coefficient pour le calcul des pertes par hystérésis. Celui-ci contient les différentes corrections dues aux irrégularités (distribution des flux, harmoniques, etc.). k_1 peut être calculé par la relation[4]) :

$$k_1 = \frac{0{,}9 \text{ à } 0{,}11}{0{,}0016}\eta_s .$$

η_s est le coefficient de Steinmetz, qu'on peut trouver dans les courbes bien connues,

f la fréquence du système d'alimentation,

B_a l'induction maximum dans le fer de l'armature en Gauss,

V_a le volume de l'armature en dm^3.

Dans la relation (1), on remplace l'induction B_a, par le flux total de la machine Φ_a[5]) :

$$(2) \qquad B_a = \frac{\Phi_a}{2\, k_2\, l_a\, h_a}$$

où :

k_2 est le coefficient d'isolement pour les tôles (en général on prend $k_2 = 0{,}9$),

l_a la longueur du moteur en cm. sans canaux de ventilation,

h_a la hauteur radiale du fer de l'armature en cm.

A son tour le flux peut être déduit de la relation fondamentale de la f. c. é. m. E du moteur[6]) :

$$(3) \qquad \Phi_a = \frac{E.10^8}{4\, k_3\, k_4\, f\, n_1}$$

où :

k_3 est le facteur d'enroulement, assez approché de l'unité, mais plus petit que celle-ci,

$k_4 = \frac{B_{eff}}{B_m}$[7]) est le facteur de forme,

n_1 le nombre de spires par phase,

B_{eff} représente la valeur efficace de l'induction et
B_m la valeur moyenne.

Cherchons maintenant une relation entre la f. c. é. m. E du moteur et la tension d'alimentation U_1 du réseau.

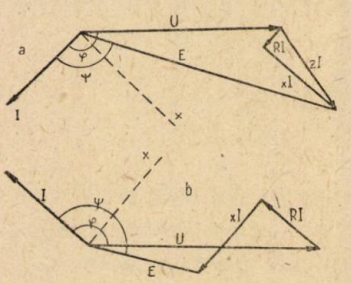


Fig. 1.

Considérons les diagrammmes de Potier appliqués aux moteurs synchrones. Suivant que le moteur fournit ou reçoit de la puissance réactive, nous avons les diagrammes respectifs des fig. 1 a et 1 b, telles qu'elles ont été données par Fallou[8]).

Prenons une direction Ox normale à la direction du courant I. Projetons le contour polygonal fermé sur ces deux axes, dans les deux cas. Nous aurons :

$$(4) \qquad \begin{cases} U_1 \sin\varphi + xI = E \sin\psi \\ U_1 \cos\varphi + RI = E \cos\psi. \end{cases}$$

Remarquons que le même système d'équations reste valable pour les deux fonctionnements du moteur.

La signification des différents éléments du système (4) est la suivante :

U_1 la tension étoilée d'alimentation par phase en volts,
R la résistance par phase,
x la réactance synchrone du moteur,
I le courant normal du moteur,
φ l'angle de décalage entre la tension et le courant, en les supposant de forme sinusoïdales,
ψ l'angle de décalage entre E et I.

Tirons la valeur du cos ψ de la deuxième équation, du système (4) et après avoir déduit sin ψ, remplaçons cette valeur dans la première équation.

Tous calculs faits, on obtient :

$$(5) \qquad E = \pm\sqrt{(U_1 \sin\varphi + xI)^2 + (U_1 \cos\varphi + RI)^2}\,.$$

On ne peut garder que le signe + parce que une f. é. m. négative n'a aucun sens. On observe en même temps que l'expression qui se trouve sous le radical est toujours positive.

Introduisons les valeurs de l'impédance Z et de la puissance P_m

$$(6)\qquad \begin{cases} Z^2 = R^2 + x^2 \\ P_m = \eta P = \eta\, m\, k\, U_1\, I \text{ watts,} \end{cases}$$

où :

η est le rendement,

m le nombre de phases,

k le facteur de puissance, qui devient égal à $\cos\varphi$ dans un régime sinusoïdal.

Remplaçons dans la valeur de E (5), le courant I déduit de la deuxième relation de (6) et introduisons la valeur de Z (6); on obtient :

$$(7)\qquad E = \frac{1}{U_1}\sqrt{U_1^4 + C_2\, U_1^2 + C_3}$$

$$(8)\qquad I = \frac{C_1}{U_1}$$

avec :

$$(9)\qquad C_1 = \frac{P_a}{\eta\, m\, \cos\varphi}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} C_2 = 2\, C_1\, (x\, \sin\varphi + R\, \cos\varphi) \\ C_3 = Z^2\, C_1^2. \end{cases}$$

Il faut observer que nous avons considéré la valeur η du rendement comme une constante, quoique en réalité elle varie avec la charge du moteur. Pourtant, pour pouvoir avancer l'étude nous avons été contraint de faire cette approximation qui en fait n'influe pas la forme de la courbe, mais seulement les valeurs des ordonnées. Ces modifications se font surtout sentir vers les extrémités, c'est-à-dire pour les valeurs très petites et très grandes de la tension d'alimentation.

Des relations (1), (2), (3) et (7), on déduit pour la valeur des pertes par hystérésis dans l'armature de l'induit :

$$(11)\qquad p_{Ha} = k_1 \frac{f}{100}\left[\frac{10^5}{8\, k_2\, k_3\, k_4\, l_a\, h_a\, f\, n_1\, U_1}\sqrt{U_1^4 + C_2\, U_1^2 + C_3}\right]^{1,6} V_a.$$

b) Pour *les dents*, nous avons des relations analogues qui permettent le calcul des pertes par hystérésis p_{Hd} [4])

$$(12)\qquad p_{Hd} = k_1\, k_5 \frac{f}{100}\left(\frac{B_{d\,min}}{1000}\right)^{1,6} V_d$$

où :

V_d est le volume des dents en dm^3,

k_5 un coefficient qui varie avec la forme de la dent. Pour les dents de forme trapézoïdale, on calcule k_5 à l'aide de la formule :

$$k_5 = 5\,\frac{1-\left(\frac{u_{2\min}}{u'_{2\max}}\right)^{0,4}}{1-\left(\frac{u_{2\min}}{u_{2\max}}\right)^{2}} \quad ^{9)}$$

avec :

$u_{2\min}$ la longueur minimum de la dent,

$u_{2\max}$ la longueur maximum de la dent et

$u'_{2\max}$ la longueur de la dent dans la région de l'isthme.

k_5 peut être également donné par des courbes en fonction de $\frac{u_{2\min}}{u_{2\max}}$.

$$B_{d\min} = \frac{2u\,\Phi_a}{k_2\,u_{2\,\min}\,l_a\,b} \quad ^{10)} \tag{13}$$

où :

$2u$ est le pas dentaire en cm. et

b le développement polaire en cm.

En remplaçant dans l'expression des pertes p_{Hd} (12) la valeur de $B_{d\min}$ (13) et en tenant compte de la relation (3), on obtient :

$$p_{Hd} = k_1 k_5 \frac{f}{100}\left[\frac{10^5 \cdot 2u}{4\,k_2\,k_3\,k_4\,l_a\,b\,f n_1\,u_{2\,\min}\,U_1}\sqrt{U_1^4 + C_2\,U_1^2 + C_3}\right]^{1,6} V_d, \tag{14}$$

Les pertes totales par hystérésis p_H résultent de l'addition des relations (11) et (14) :

$$p_H = p_{Ha} + p_{Hd} = C_4\left[\frac{U_1^4 + C_2\,U_1^2 + C_3}{U_1^2}\right]^{0,8} \tag{15}$$

avec :

$$C_4 = k_1\,\frac{f}{100}\,\frac{10^8}{(4\,k_2\,k_3\,k_4\,l_a\,f n_1)^{1,6}}\left[\frac{V_a}{(2h_a)^{1,6}} + k_5\,V_d\left(\frac{2u}{b u_{2\min}}\right)^{1,6}\right]. \tag{16}$$

5. Les pertes par *courants de Foucault* dans l'armature et les dents de l'induit sont données par la relation [11] :

$$p_F = k_6\left(\Delta\,\frac{f}{100}\right)^2\left[\left(\frac{B_a}{1000}\right)^2 V_a + k_7\left(\frac{B_{d\min}}{1000}\right)^2 V_d\right] \tag{17}$$

où :

k_6 est une constante en relation avec la conductibilité électrique du fer et avec la manière dont ont été travaillées les tôles,

k_7 un coefficient analogue au coefficient k_2. On peut le calculer avec la formule :

$$k_7 = \frac{4{,}6}{1 - \left(\frac{u_{2\,\min}}{u_{2\,\max}}\right)^2} \log \left(\frac{u_{2\,\max}}{u_{2\,\min}}\right).$$

On peut relever la valeur de k_7 également à l'aide des courbes en fonction de $\frac{u_{2\,\min}}{u_{2\,\max}}$.

Δ est l'épaisseur de la tôle en mm.

Dans la relation (17) remplaçons B_a et B_d par leurs valeurs respectives (2), (3) et (13) ; on obtient :

$$(18) \qquad p_F = C_5 \frac{U_1^4 + C_2 U_1^2 + C_3}{U_1^2}$$

avec :

$$(19) \quad C_5 = k_6 \left(\Delta \frac{f}{100}\right)^2 \left(\frac{10^5}{4 k_2 k_3 k_4 l_a f n_1}\right)^2 \left[\frac{V_a}{(2 h_a)^2} + k_7 V_d \left(\frac{2u}{b u_{2\,\min}}\right)^2\right].$$

Dans les culasses il existe aussi des pertes par hystérésis et courants de Foucault ; on peut les calculer avec les mêmes relations, mais en général ces pertes sont négligées, vu leur petitesse.

6. Evaluons maintenant les pertes supplémentaires dans le fer de l'armature et des dents du moteur.

a. Pertes de surface dues aux harmoniques d'ordre supérieur. Leur valeur est donnée par la relation suivante [12] :

$$(20) \qquad p_{sh} = p l_a \left(\frac{A}{100}\right)^2 \frac{f}{100} \left(\frac{\bar{\omega}}{100}\right)^2 q \text{ en watts}$$

où :

$2p$ représente le nombre de pôles du moteur,

$\bar{\omega}$ le pas polaire en cm,

$$(21) \quad A = \frac{m n_1 I}{p \bar{\omega}} \quad [13],$$

q est une constante qui peut être calculée suivant une formule, bien compliquée. On la trouve plus facilement dans des courbes spéciales en fonction de $\frac{\delta}{\bar{\omega}}$ ou $\frac{y}{\bar{\omega}}$, avec :

δ l'entrefer en mm. et

y le pas de l'enroulement mesuré sur la périphérie de l'induit en cm.

En substituant la valeur du courant I (8) dans la relation de A (21) et en introduisant la valeur obtenue dans celle des pertes (20), on obtient :

(22) $$p_{sh} = \frac{C_6}{U_1^2}$$

avec :

(23) $$C_6 = \frac{m^2 n_1^2 f q l_a C_1^2}{10^{10} p}.$$

b) Pertes de surface dues à la présence des encoches.

Richter évalue ces pertes avec la formule [14]) :

(24) $$p_{sd} = 0{,}79\, p \sqrt{\omega}\, l_a\, \lambda^2\, k_8 \left(\frac{\theta_N}{1000}\right)^2 \left(\frac{N' n}{10.000}\right)^{1{,}5} \sum_v \frac{k_v^2}{\sqrt{\nu}} \text{ en watts}$$

où :

$$\lambda = \frac{2u}{\delta},$$

k_8 [15]) un coefficient qui varie avec la qualité du matériel

N' nombre des entailles,

n nombre de tours par minute,

(25) $\theta_N = N_s\, I$ nombre d'ampères—conducteurs par entaille

N_s nombre de conducteurs par entaille.

La somme Σ est à lire dans des courbes en fonction de λ.

Remplaçons θ_N et I par les valeurs (25) et (8) ; on obtient pour p_{sd} (24) :

(26) $$p_{sd} = \frac{C_7}{U_1^2}$$

avec :

(27) $$C_7 = 0{,}79\, k_8\, p \sqrt{\omega}\, l_a\, \lambda^2 \left(\frac{N' n}{10.000}\right)^{1{,}5} \left(\frac{N_s C_1}{1000}\right)^2 \sum_v \frac{k_v^2}{\sqrt{\nu}}.$$

c). Outre ces deux catégories de pertes supplémentaires, il en existe une troisième due aux fuites magnétiques dans les têtes de bobines. Le calcul de ces pertes est très délicat et nécessite la connaissance du spectre magnétique des lignes de force. D'ailleurs ces pertes étant très réduites dans les constructions modernes qui sont très soignées à ce point de vue, on les néglige.

7. *Pertes dans le cuivre.*

a) Les pertes normales par effet Joule dans le cuivre sont calculées suivant la relation bien connue :

$$p_I = k_9\, m\, R\, I^2,$$

k_9 est un coefficient qui tient compte de la résistance effective en courant alternatif par rapport à la valeur de la résistance mesurée en courant continu.

En remplaçant le courant par sa valeur (8), on a :

$$p_J = \frac{C_8}{U_1^2} \quad \text{avec:} \quad C_8 = C_1^2 \; k_9 \; m \, R. \tag{28}$$

b) Si le moteur est alimenté par des bagues, il faut ajouter les pertes Joule, dont la forme sera :

$$p_{Jb} = \frac{C_9}{U_1} \quad \text{avec:} \quad C_9 = C_1 \, \varepsilon \tag{29}$$

où ε represente la chute de tension pour tous les balais.

c). Dans le cuivre il existe aussi des pertes supplémentaires, qu'on peut calculer avec une relation de la forme suivante :

$$p_{cs} = \frac{C_{10}}{U_1^2} \quad \text{avec:} \quad C_{10} = C_1^2 \; m \, R \, (k_{10} - 1) \tag{30}$$

où :

$$k_{10} = 1 + \frac{m'^2 - 0{,}2}{9} \left(h. \, 2\pi \sqrt{\frac{n' b' f}{u_1 \, \varrho \, 10^5}} \right)^4 \quad [16] \tag{31}$$

avec :
- m' le nombre de rangées de conducteurs dans une entaille,
- b' la largeur du conducteur avec isolement,
- u_1 l'ouverture de l'entaille,
- ϱ la résistance spécifique en $\Omega \; mm^2/m$,
- n' le nombre des conducteurs par rangée,
- h la hauteur des conducteurs en cm.

8. Les moteurs synchrones sont prévus en général avec des amortisseurs, constituant on non une cage mise en court-circuit.

Dans ce circuit les pertes peuvent être évaluées comme suit [17] :

$$p_a = \frac{C_{11}}{U_1^2} \quad \text{avec:} \quad C_{11} = \left(\frac{N}{N_b} \right)^2 \left[0{,}82 \; R_b + \left(\frac{N_b}{2p} \right)^2 (0{,}08 \; R_a + 0{,}058 \; R_a') \right] I_1^2$$

où :

N_b est le nombre total des barres constituant l'amortisseur,
R_b la résistance de toutes les barres,
R_a la resistance de la bague de court-circuit le long d'un pôle,
R'_a la résistance pour le reste de la bague.

9. Les pertes mécaniques sont les suivantes :

a) Pertes dans les paliers [18] :

$$C_{12} = 0{,}3 \; D_t \; l_t \; V_t^{1{,}5} \quad \text{en watts,} \tag{32}$$

où :

D_t est le diamètre du tourillon en cm,
l_t la longueur du tourillon qui frotte dans le coussinet en cm,
V_t la vitesse périphérique du tourillon en m / sec.

b) Pertes par ventilation [18]) :

(33) $$C_{13} = 0{,}8\, DLv_a^2 \cdot 10^{-3} \text{ en watts}$$

où

D est le diamètre de la partie mobile en cm,
L la longueur de la même partie en cm,
v_a la vitesse périphérique en m/sec.

c) Pertes mécaniques aux bagues qui alimentent le système inducteur ou servent à l'alimentation de l'induit du moteur [19]) :

(34) $$C_{14} = 9{,}81\, \mu\, p_1\, F\, V_b \text{ en watts}$$

où:

μ est le coefficient de frottement,
p_1 la pression du balai en Kg/cm^2,
F la surface des balais en cm^2,
v_b la vitesse de la bague en m/sec.

10. Il reste encore à examiner les pertes dans l'excitation. En supposant que la tension et le courant d'excitation soient respectivement u et i, le rendement de l'excitatrice étant η_1 nous aurons pour la puissance fournie :

(35) $$p_{ex} = \frac{ui}{\eta_1}.$$

Tant que le courant d'excitation reste constant, cette puissance sera également constante C_{15}, parce qu'on suppose que la tension de l'excitatrice reste toujours constante.

Dans une de nos séries de mesures nous avons fait varier le courant d'excitation i, en gardant la tension u constante par la variation de l'excitation de l'excitatrice. Le rendement η_1 de l'excitatrice varie en même temps avec la puissance p_{ex}. Cette variation, au point de vue de l'influence sur le résultat final est négligeable, parce que η_1 peut varier de 10-20$^0/_0$, pour les petites machines et seulement jusqu'à 5$^0/_0$ pour les machines plus importantes. D'autre part la puissance de l'excitatrice ne représente que quelques pour-cent de la puissance du moteur. Il résulte que la variation du courant entraîne une variation du rendement, qui par rapport à la puissance du moteur, calculé avec l'ancien rendement, est extrêmement réduite. Il reste par conséquent seulement la variation de la puissance de l'excitatrice en fonction du courant i, qu'on peut mettre sous la forme :

$$p_{ex} = C_{16}\, i \quad \text{avec :} \quad C_{16} = \frac{u}{\eta_1}.$$

11. Les pertes totales du moteur sont obtenues en réunissant toutes les pertes partielles examinées jusqu'ici. Soit :

$$(36)\quad p_{tot}=C_4\left[\frac{U_1^4+C_2U_1^2+C_3}{U_1^2}\right]^{0,8}+C_5\frac{U_1^4+C_2U_1^2+C_3}{U_1^2}+$$

$$+\frac{C_{17}}{U_1^2}+\frac{C_9}{U_1}+C_{18}+C_{16}i$$

avec :

$$C_{17}=C_6+C_7+C_8+C_{10}+C_{11}$$

$$C_{18}=C_{12}+C_{13}+C_{14}\ .$$

Pour étudier la variation des pertes totales nous discuterons chaque terme de la relation (36).

Prenons d'abord le premier terme (15) :

$$p_H=C_4\left[U_1^2+C_2+\frac{C_3}{U_1^2}\right]^{0,8}$$

et considérons la dérivée par rapport à U_1 :

$$\frac{dp_H}{dU_1}=\frac{1,6C_4\left(U_1-\frac{C_3}{U_1^3}\right)}{\left(U_1^2+C_2+\frac{C_3}{U_1^2}\right)^{0,2}}\ .$$

Celle-ci s'annule pour la valeur particulière de la tension :

$$U_1=\sqrt[4]{C_3}=\sqrt{ZC_1}\ .$$

En annulant maintenant la fonction p_H on obtient :

$$U_1^2=\frac{-C_2\pm\sqrt{C_2^2-4C_3}}{2}\ .$$

Si $C_2^2-4C_3<0$, les racines sont imaginaires et la fonction ne s'annule jamais.

Si $C_2^2-4C_3>0$, il résulte que $C_2>\sqrt{C_2^2-4C_3}$ parce que sous le radical on diminue C_2 d'une quantité toujours positive.

Dans cette situation les deux racines sont toujours negatives et par conséquent U_1 sera imaginaire, ce qui signifie que la fonction p_H ne s'annule jamais.

Avec ces éléments nous pourrons représenter graphiquement la fonction p_H (fig. 2). Celle-ci présente un minimum pour une valeur particulière de U_1, $C_5\left(\frac{2C_3+C_2\sqrt{C_3}}{\sqrt{C_3}}\right)^{0,8}$.

Le deuxième terme :

$$p_F = C_5 \left(U_1^2 + C_2 + \frac{C_3}{U_1^2} \right)$$

sera étudié de la même manière. On trouve une courbe analogue, que nous avons représentée par p_F de la fig. 2.

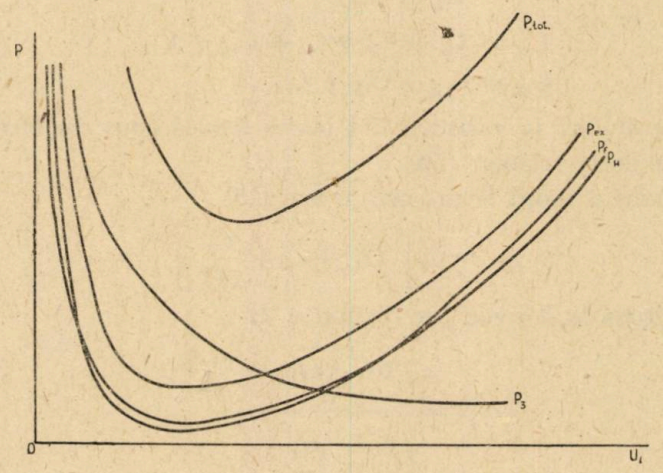


Fig. 2.

Cette courbe présente aussi un minimum pour la même valeur particulière de U_1, trouvée plus haut.

On groupe les trois autres termes qui restent :

$$p_3 = \frac{C_{17}}{U_1^2} + \frac{C_9}{U_1} + C_{18} .$$

La dérivée sera :

$$\frac{dp_3}{dU_1} = -\frac{2C_{17} + C_9 U_1}{U_1^3},$$

qui s'annule pour :

$$U_1 = -\frac{2C_{17}}{C_9};$$

la racine étant négative, elle n'a aucun sens pour nous, c'est-à-dire que la fonction a une variation continue décroissante dans le domaine des tensions positives, les seules qui nous intéressent. Cette courbe a été représentée en p_3 dans la fig. 2.

Quand la tension varie, pour maintenir constant le facteur de puissance, il faut modifier le courant d'excitation *i*.

Pour étudier cette variation, exprimons la valeur du flux produit

par champ double de l'inducteur en fonction de la f. m. m. et de la réluctance ; soit :

$$\Phi_i = \frac{1{,}25\, n_i\, I}{R_t} \tag{37}$$

où n_i est le nombre des spires par champ double et R_t la réluctance totale du circuit magnétique.

Une observation relative à la réluctance R_t. Celle-ci se compose de deux parties importantes : la réluctance de l'air et celle du fer. La première est plusieurs fois plus grande que la deuxième. Tant que la saturation n'intervient pas, on peut considérer que la réluctance totale reste constante. Autrement, il faut calculer le flux et la réluctance dans chaque cas particulier. De toute façon, même si R_t subit une certaine variation, elle est très petite [20]).

Dans la fig. 3 nous avons représenté les flux d'un moteur synchrone : $\overline{AB} = \nu_1 \bar{\Phi}_I$ est le flux produit par la circulation du courant total I dans le bobinage de l'induit, ν_1 étant le coefficient de Hopkinson. $\overline{BC} = \bar{\Phi}_i$ est le flux produit par la système inducteur et $\overline{AC} = \bar{\Phi}_a$ représente le flux utile de la machine, qui produit la f. c. é. m. E. Entre les flux $\nu_1 \bar{\Phi}_I$ et $\bar{\Phi}_a$ nous avons le décalage ψ. Cette représentation reste valable tant que le phénomène de saturation ne se fait trop sentir [21]).

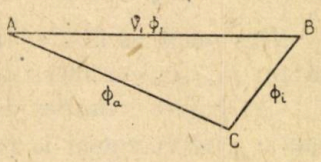


Fig. 3.

Dans le triangle ABC, en prenant les valeurs scalaires nous avons :

$$\Phi_i^2 = \nu_1^2\, \Phi_I^2 + \Phi_a^2 - 2\, \nu_1\, \Phi_I\, \Phi_a \cos\psi.$$

Introduisons les flux totaux de la machine, donnés respectivement par les relations (3) et (37) ; on remplace également E, I et $\cos\psi$ respectivement par leurs valeurs (7), (8) et (4) ; après avoir fait les calculs, on obtient :

$$\Phi_i^2 = \frac{C_{19}}{U_1^2} + C_{20}\left(U_1^2 + C_2 + \frac{C_3}{U_1^2}\right) - C_{21}\left(U_1 \cos\varphi + \frac{R\, C_1}{U_1}\right) \tag{38}$$

avec :

$$\begin{cases} C_{19} = \nu_1^2 \left(\dfrac{1{,}25\, N\, C_1\, m}{R_t}\right)^2 \\ C_{20} = \left(\dfrac{10^8}{4\, k_3\, k_4\, f\, n_1}\right)^2 \\ C_{21} = 2\sqrt{C_{19}\, C_{20}} \end{cases} \tag{39}$$

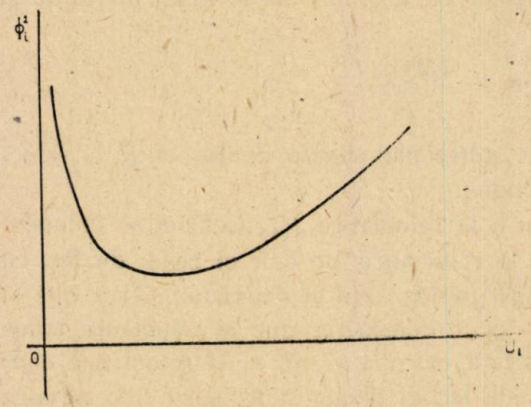


Fig. 4.

La fonction de Φ_1^2 peut être représentée par la fig. 4, en l'étudiant par la décompositon en trois courbes, réunies ensuite.

En égalant les relations (37) et (38), on déduit la valeur du courant d'excitation i:

$$(40)\quad i = \frac{R_t}{1{,}25\, n_i}\sqrt{\frac{C_{10}}{U_1^2} + C_{20}\left(U_1^2 + C_2 + \frac{C_3}{U_1^2}\right) - C_{21}\left(U_1 \cos\varphi + \frac{R\,C_1}{U_1}\right)}.$$

Des relations (35) et (40), on déduit la valeur des pertes par excitation p_{ex}, représentées dans la fig. 2.

Les quatre courbes de la fig. 2 réunies nous donne une résultante p_{tot}, représentant la forme des pertes totales du moteur.

On observe que cette courbe présente un minimum. Par conséquent, pour une valeur particulière de la tension, les pertes totales p_{tot} présentent une valeur minimum et donc la courbe du rendement accusera son maximum.

Dans l'hypothèse admise que le facteur de puissance garde une valeur constante, examinons la manière dont varient la f. c. é. m. E (7) et le courant (8). Ces éléments, suivant leurs valeurs, peuvent être représentés dans la fig. 5.

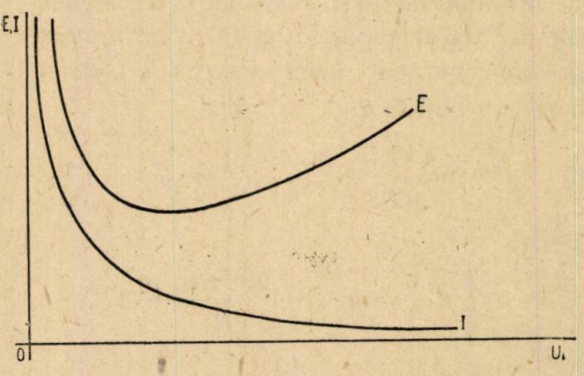


Fig. 5.

On constate que le courant I varie en sens inverse de la tension d'alimentation U_1, suivant la courbe donnée.

La f. c. é. m. E, à son tour, varie d'une façon analogue à la variation des pertes totales, présentant un minimum pour la même valeur de la tension.

12. Après avoir examiné au point de vue théorique la manière dont se comporte un moteur synchrone quand on varie la tension d'alimentation, nous avons essayé de vérifier les conclusions au point de vue expérimental.

Nous avons utilisé à cette fin deux moteurs synchrones triphasés ayant la tension normale d'alimentation 380/220 V, à la fréquence de 50 périodes par seconde et avec les puissances respectives de 2,5 Kw (Moteur I) et 3 Kw (Moteur II).

Les différents éléments constructifs de ces moteurs, calculés ou mesurés, sont les suivants :

	Moteur I	Moteur II	unité
b	8,7	8,8	cm
b'	0,15	0,25	cm
D	15,8	18,2	cm
D_t	3,5	4	cm
f	50	50	s^{-1}
F	6	3	cm^2
h	0,187	0,16	cm
k_1	1,5	1,5	
k_2	0,88	0,9	
k_3	1,11	1,11	
k_4	0,960	0,960	
k_5	1,78	1,35	
k_6	4	4	
k_7	2	1,55	
k_8	1,35	2,05	
k_9	1,1	1,1	
$\sum_\nu \frac{k^2_\nu}{\nu\sqrt{\nu}}$	$1,55.10^{-3}$	$1,7.10^{-3}$	
l_a	8,7	13,6	cm
l_t	1	1	mm

	Moteur I	Moteur II	unité
p_1	0,10	0,10	Kg/cm
q	5,5	6,5	henry/cm
R	2,73	1,40	ohms
R_t	231	42	
u	20	60	volts
$2u$	1,37	1,53	cm
u_1	0,9	0,765	cm
$u_{2\min}$	0,47	0,765	cm
$u_{2\max}$	1,09	0,465	cm
$u'_{2\max}$	0,73	0,9	cm
v_1	1,1	1,1	
v_a	12,4	14,3	m/sec
V_b	6,2	7,5	m/sec
V_t	2,75	3,14	m/sec
V_a	0,852	1,770	dm^3
V_d	0,277	0,626	dm^3
Z	21	17	
x	20,8	16,9	
$\frac{y}{\omega}$	$\frac{160}{180}$	$\frac{160}{180}$	

	Moteur I	Moteur II	unité
L	8,7	13,6	cm
m	3	3	
m'	8	8	
n	1500	1500	t/m
n_1	576	288	
n_i	1400	1200	
N	1728	864	
N_s	48	24	
N_s'	36	36	
p	2	2	

	Moteur I	Moteur II	unité
δ	0,3	0,3	mm
Δ	0,5	0,55	mm
ε	1,5	1,5	volts
η	0,7	0,7	
η_i	0,8	0,8	
λ	4,7	5,1	
μ	0,16	0,16	
ϱ_{20}	0,01784	0,01784	$\Omega mm^2/m$
$\bar{\omega}$	12	14	cm

13. Calculons maintenant les différents constantes $C_1\ C_2 \ldots C_{21}$ que nous avons rencontrées dans l'exposé théorique pour le moteur I :

$$(9)\qquad C_1 = \frac{1}{0,7.3}\ \frac{P_a}{\cos\varphi} = 0,476\ \frac{P_a}{\cos\varphi}$$

$$(10)\quad \begin{cases} C_2 = 2.0,476\ \dfrac{P_a}{\cos\varphi}\ (20,80\ \sin\varphi + 2,73\cos\varphi) = \\ \qquad\qquad = 0,952\ \dfrac{P_a}{\cos\varphi}\ (20,80\sin\varphi + 2,73\cos\varphi) \\ C_3 = 21^2.0,476^2\ \dfrac{P_a^{\,2}}{\cos^2\varphi} = 10^2\cdot\dfrac{P_a^{\,2}}{\cos^2\varphi} \end{cases}$$

$$(16)\qquad C_4 = 1,5\ \frac{50}{100}\ \frac{10^8}{(4.8,7.0,88.1,11.0,960.50.576)^{1,6}}\left[\frac{0,852}{(2.1,5)^{1,6}} + 1,78.0,277\left(\frac{1,37}{8,7.0,47}\right)^{1,6}\right]$$

$$C_4 = 0,00486$$

$$(19)\qquad C_5 = 4\left(0,5\ \frac{50}{100}\right)^2\left(\frac{10^5}{4.8,7.0,88.1,11.0,960.50.576}\right)^2\left[\frac{0,852}{(2.1,5)^2} + 2.0,277\left(\frac{1,37}{8,7.0,47}\right)^2\right]$$

$$C_5 = 0,00044$$

$$(23)\qquad C_6 = \frac{3^2.576^2.50.5,5.8,7}{10^{10}.2}\ 0,476^2\ \frac{P_a^{\,2}}{\cos^2\varphi} = 0,0809\ \frac{P_a^{\,2}}{\cos^2\varphi}$$

(27) $C_7 = 0{,}79.1{,}35.2.12.8{,}7.4{,}7^2\left(\frac{36.1500}{10.000}\right)^{1{,}5}\left(\frac{48.0{,}476}{1000}\right)^2 \frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} 1{,}55.10^{-3}$

$C_7 = 0{,}05\ \frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}$

(28) $C_8 = 1{,}1.0{,}476^2.3.2{,}73\ \frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 2{,}03\ \frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}$

(29) $C_9 = 0{,}476.1{,}5\ \frac{P_a}{\cos\varphi} = 0{,}71\ \frac{P_a}{\cos\varphi}$

(31) $k_{10} = 1 + \frac{8^2 - 0{,}2}{9}\left(0{,}187.2\pi\sqrt{\frac{6.0{,}15.50}{0{,}9.0{,}01784.10^5}}\right)^4 = 1{,}0106$

(30) $C_{10} = 0{,}476^2.3.2{,}73.0{,}0106\ \frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 0{,}01962\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}$

(39)
$$\begin{cases} C_{19} = 1{,}1^2\left(\dfrac{1{,}25.1728.3.0{,}476}{231}\right)^2 \dfrac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 2{,}15.10^2\ \dfrac{P_a^2}{\cos^2\varphi} \\ C_{20} = \left(\dfrac{10^8}{4.1{,}11.0{,}960.50.576}\right)^2 = 6{,}28.10^5 \\ C_{21} = 2\sqrt{2{,}15.6{,}28.10^7}\ \dfrac{P_a}{\cos\varphi} = 2{,}32.10^4\ \dfrac{P_a}{\cos\varphi}\ . \end{cases}$$

14. Après avoir calculé les constantes qui entrent dans les différentes relations qui expriment les pertes du moteur, nous avons maintenant toutes les données pour évaluer ces pertes pour le moteur I.

a). Soit $P_a = 200$ w, la puissance sur l'arbre du moteur.

Examinons les pertes pour plusieurs valeurs du facteur de puissance, soit : *0,6* ; *0,8* et *1*.

Les pertes par hystérésis seront :

(15) $\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 0{,}951\frac{200}{0{,}6}\left(20{,}80.0{,}8 + 2{,}73.0{,}6\right)\right.$

$$\left. + \frac{10^2.200^2}{0{,}6^2}\frac{}{U_1^2}\right)^{0{,}8} = 0{,}00486\left(U_1^2 + 5{,}8.10^3 + \frac{1{,}11.10^7}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$$

$\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 3{,}48.10^3 + \frac{6{,}25.10^6}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$

$\cos\varphi = 1 \quad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 5{,}18.10^2 + \frac{4.10^6}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$

Les pertes par courants de Foucault résultent de la relation (18) transformée :

$$p_F = 0{,}00044 \left(\frac{p_H}{0{,}00486}\right)^{\frac{1}{0{,}8}}.$$

Les pertes de surface seront suivant la formule (22):

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = 0{,}0809 \frac{200^2}{0{,}6^2} \frac{1}{U_1^2} = \frac{8{,}99.10^3}{U_1^2}$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \frac{5{,}06.10^3}{U_1^2}\,; \quad \cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \frac{2.10^3}{U_1^2}.$$

Les pertes de surface dues à la présence des encoches seront (26):

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \frac{0{,}05.200^2}{0{,}6^2} \frac{1}{U_1^2} = \frac{5{,}56.10^3}{U_1^2}$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \frac{3{,}13.10^3}{U_1^2}\,; \quad \cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \frac{2.10^3}{U_1^2}.$$

Les pertes Joule dans le cuivre deviennent (28):

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_I = \frac{2{,}03.200^2}{0{,}6^2} \frac{1}{U_1^2} = \frac{2{,}26.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_I = \frac{1{,}28.10^5}{U_1^2}\,; \quad \cos\varphi = 1 \qquad p_I = \frac{8{,}12.10^4}{U_1^2}.$$

Les pertes supplémentaires dans le cuivre seront (30):

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{cs} = \frac{0{,}01962.200^2}{0{,}6^2} \frac{1}{U_1^2} = \frac{2{,}18.10^3}{U_1^2}$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{cs} = \frac{1{,}225.10^3}{U_1^2}\,; \quad \cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \frac{7{,}85.10^2}{U_1^2}.$$

Les pertes par frottements aux bagues (29):

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{Ib} = \frac{0{,}71.200}{0{,}6} \frac{1}{U_1} = \frac{237}{U_1}$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{Ib} = \frac{177{,}5}{U_1}\,; \quad \cos\varphi = 1 \quad p_{Ib} = \frac{14{,}2}{U_1}.$$

Les pertes mécaniques seront (32), (33) et (34):

$$p_m = 0{,}3.3{,}5.0{,}1.2{,}75^{1{,}5} + 0{,}8.15{,}8.8{,}7.12{,}4^2.10^{-3} + 9{,}81.0{,}16.0{,}1.6.6{,}2 = 23{,}23 \text{ w}.$$

Le calcul de Φ_i^2 est donné par la relation (38):

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad \Phi_i = 2{,}15.10^2 \frac{200^2}{06^2} \frac{1}{U_1^2} + 6{,}28.10^5 \left(U_1^2 + 5{,}8.10^3 + \right.$$

$$+\frac{1,11.10^7}{U_1^2}\Big)^{0,8} - 2,32.10^4\,\frac{200}{0,6}\left(0,6\,U_1 + 2,73.0,476\frac{200}{0,6}\right)\cdot$$

$$\Phi_i^2 = \frac{2,39.10^7}{U_1^2} + 1,43.10^9\,P_{F_{200}} - 4,64.10^6\,U_1 - 3,33.10^9\,\frac{1}{U_1}$$

$\cos\varphi = 0,8$ $\quad \Phi_i^2 = 1,34.10^7\,\frac{1}{U_1^2} + 1,41.10^9\,P_{F_{200}} - 4,64.10^6\,U_1 - 1,87.10^9\,\frac{1}{U_1}$

$\cos\varphi = 1$ $\quad \Phi_i^2 = \frac{8,60.10^7}{U_1^2} + 1,43.^9 10\,P_{F_{200}} - 4,64.10^6\,U_1 - 1,2.10^9\,\frac{1}{U_1}$

Jusqu'ici nous avons conduit les calculs en exprimant les résultats en fonction de la tension d'alimentation U_1.

Maintenant, dans les tableaux I, II et III nous donnons les valeurs des pertes pour différentes tensions et pour $k = 0,6\,;\,0,8$ et 1.

Nous avons donné dans ces tableaux également les pertes totales, résultant de l'addition des pertes partialles et les rendements du moteur pour chaque tension considérée.

TABLEAU I

Résultats obtenus pour $P_a = 200$ w et $\cos\varphi = 1$

U_1	220	200	150	100	60	44,7	30	20
Φ_i^2	$2,91.10^{10}$	$2,45.10^{10}$	$1,46.10^{10}$	$0,631.10^{10}$	$0.366.10^{10}$	$0,258.10^{10}$	$0,351.10^{10}$	$0,665.10^{10}$
i	6	5,05	3	1,3	0,76	0,55	0,72	1,37
ui	120	110	60	26	15,2	11	14,4	27.4
p_{ex}	150	137,5	75	32,5	19	13,75	18	34,3
p_H	27,2	23,6	15,2	8,17	5,35	4,08	5,05	8,26
p_F	21,4	18	10,9	4,81	2,81	2	2,6	4,83
p_{sh}	0,067	0,081	0,144	0,324	0,9	1,62	3,6	8,1
p_{sd}	0,041	0,05	0,089	0,200	0,56	1	2,22	5
p_J	1,67	3,04	3,12	8,22	22,6	40,62	91	203,2
p_{cs}	0,016	0,020	0,035	0,079	0,218	0,39	0,87	1,96
p_{Jb}	0,65	0,71	0,95	1,42	2,37	2,18	4,73	7,1
p_m	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23
p_{tot}	224,174	206,431	128,668	78,953	76,038	89,87	151,30	295,98
$\eta^0/_0$	47,1	49,2	60,9	71,8	72,5	69,1	57	40,34

TABLEAU II

Résultats obtenus pour le moteur chargé à $P_a = 200$ w et $\cos\varphi = 0{,}6$.

U_1	220	200	150	100	85	70	52	40	30	20
$\Phi_f{}^2$	$3{,}31.10^{10}$	$2{,}77.10^{10}$	$1{,}50.10^{10}$	1.10^{10}	$0{,}88.10^{10}$	$0{,}81.10^{10}$	$0{,}75.10^{10}$	$0{,}87.10^{10}$	$1{,}20.10^{10}$	$2{,}1.10^{10}$
i	6,85	5,71	3,5	2,05	1,8	1,67	1,55	1,8	2,47	4,33
ui	136,4	114,2	70	41	36	33,4	31	36	49,4	86,6
p_{ex}	170.5	142,6	87,5	51,3	45	41,8	38,7	45	61,8	108
p_H	30	26,5	16,21	11,7	10,43	9,42	9,23	10,4	13,15	20,4
p_F	24,2	20,3	11,14	7,48	6,37	5,70	5,49	6,34	8,62	14,96
p_{sh}	0,186	0,225	0,40	0,899	1,24	1,835	3 33	5,62	10	22,50
p_{sd}	0,115	0,139	0,25	0,56	0,77	1,13	2,06	3,48	6,18	13,9
p_J	4,66	5,64	10	22,6	31,3	46	83,8	140,8	251	564
p_{cs}	0,045	0,055	0,097	0,218	0,30	0,44	0,81	1.36	2,42	5,45
p_{Jb}	1,08	1,18	1,58	2,37	2,79	3,38	4,55	5,92	7,90	11,8
p_m	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23
p_{tot}	254,016	219,869	150,407	120,357	121,73	133,935	171,20	242,15	384,30	784,24
$\eta\,\%$	44,1	49,8	57,1	62,4	62,2	59,9	53,9	45,3	34,2	20,3

TABLEAU III

Résultats obtenus pour $P_a = 200$ w. et $\cos\varphi = 0,8$.

U_1	220	200	150	100	85	70	50	30	20
$\Phi_i{}^2$	$3,15.10^{10}$	$2,63.10^{10}$	159.10^{10}	$0,84.10^{10}$	$0,64.10^{10}$	$0,58.10^{10}$	$0,50.10^{10}$	$0,70.10^{10}$	$1,20.10^{10}$
i	6,5	5,42	3,28	1,73	1,32	1,2	1,03	1,45	2,47
ui	130	108,4	65,6	34,6	26,4	24	20,6	29	49,4
p_{ex}	162,5	135,5	82	43,2	33	30	25,7	36,3	61,8
p_H	28,9	25,1	16,6	10,2	8,9	7,58	6,79	8,65	13,2
p_F	23	19,25	11,66	6,3	5,36	4,38	3,74	5,06	8,58
p_{sh}	0,104	0,126	0,225	0,506	0,70	1,03	2,02	5,6	12,65
p_{sd}	0,05	0,078	0,139	0,31	0,43	0,64	1,25	3,48	7,80
p_J	2,65	3,21	5,7	12,85	17,74	26,1	51,4	142,6	321
p_{cs}	0,025	0,031	0,055	0,123	0,17	0,25	0,49	1,36	3,07
p_{Jb}	0,81	0,89	1,18	1,77	2,10	2,54	3,55	5,92	8 9
p_m	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23	23,23
p_{tot}	241,269	207,415	140.809	98,489	91,63	95,75	118,17	232,20	460,23
$\eta^0/_0$	45,3	49,1	58,7	67	68,5	67,7	66,3	46,3	30,2

b). En même temps, nous avons fait des essais directs sur le moteur. Celui-ci était alimenté par une tension variable, fournie par un alternateur dont la tension était réglable. Pour avoir une variation plus étendue de la tension nous avons aussi intercalé un régulateur de tension entre l'alternateur et le moteur synchrone. Avec cette double possibilité de variation de la tension, nous avons pu obtenir toutes les valeurs désirées.

La charge du moteur était obtenue à l'aide d'un frein Prony.

Pour avoir la charge de 200 w, le frein n'était plus nécessaire ; il suffisait des pertes occasionnées par le moteur d'induction qui servait au démarrage du moteur synchrone.

Dans ces conditions nous obtenons le tableau IV avec les résultats expérimentaux :

TABLEAU IV

Des valeurs expérimentales obtenues pour le moteur I chargé à $P_a = 200$ w et pour différentes valeurs du $\cos\varphi$:

	$\cos\varphi = 0{,}6$						$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
220	1,21	6,4	478,3	41,8	44,1	−5,5	0,87	6,15	461	43,4	45,3	+4,37
200	1,22	5,67	437,1	45,7	49,8	−9	0,88	5,25	421	47,5	49,1	+3,37
180	1,23	4,55	396	50,5	53	−4,95	0,90	4,4	388,1	51,5	54,3	+5,43
160	1,30	3,8	373	53,7	56,2	−4,65	0,92	3,52	354,2	56,4	57,6	+2,13
140	1,37	3,25	345	58	58,6	−1	0,97	2,72	326	61,3	61	−0,5
120	1,45	2,45	314	63,8	60,2	+5,64	1,05	2	302	66,2	64,5	−2,57
100	1.68	1,92	303	66	62	+6,05	1,19	1,53	285,4	70	67	−4,3
80	2,04	1,7	294	68	62	+8,82	1,45	1,16	277,9	72	68,2	−5,28
60	2,94	1,7	317	63,1	57,7	+8,62	1,98	0,90	285,4	70	67	−4,3
40	5,65	2,9	407	49,2	45,5	+7,5	3,25	1,6	312,2	64	60	−6,24

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
220	0,67	5,7	444	45	47,1	+4,66
200	0.67	4,95	404	49,5	51	+1
180	0,68	4,05	369	54,2	55	+1,5
160	0,72	3,3	344,7	58	59	+1,72
140	0,75	2,45	317,1	63	62.8	−0,30
120	0,81	1,58	291,3	68,6	67,5	−1,62
100	0,92	1,05	277	72,2	71,8	−0,50
80	1,13	0,82	270,3	73,9	73,7	−0,27
60	1,47	0.59	265	75,5	72,5	−5
40	2,38	0,72	286,2	69,8	67	−4
20	6.4	1,4	384,5	52	40,34	−22,4

Les résultats des tableaux I - IV sont représentés dans la fig. 6.

On observe la même allure des courbes. Les courbes des rendements présentent des valeurs maxima correspondant à des tensions différentes de la valeur normale de la tension du moteur, ce que nous avons prévu par des considérations théoriques. Seulement pour $\cos\varphi = 0{,}6$ il y a une différence un peu plus marquée entre les valeurs calculées et mesurées dans la région des maxima. Aussi à l'extrémité de la courbe pour de très petites tensions la différence est plus importante, l'explication étant donnée dans la première partie (§ 4) de cette étude.

Dans l'ensemble et vu la petitesse de la charge, on peut conclure que les prévisions théoriques sont confirmées par l'expérience et même les valeurs obtenues sont assez rapprochées, quand on pense aux approximations que nous avons été obligé d'admettre pour pouvoir avancer les calculs.

15. Passons maintenant à la charge de $P_a = 1000$ watts pour le moteur synchrone.

En procédant de la même manière qu'au paragraphe précédent on obtient les suivantes valeurs calculées pour les pertes et le rendement :

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_H = 0{,}00486 \left(U_1^2 + 2{,}9.10^4 + \frac{3{,}06.10^8}{U_1^2} \right)^{0{,}8}$

$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_H = 0{,}00486 \left(U_1^2 + 1{,}743.10^4 + \frac{1{,}562.10^8}{U_1^2} \right)^{0{,}8}$

$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00486 \left(U_1^2 + 2{,}6.10^3 + \frac{10^8}{U_1^2} \right)^{0{,}8}$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = \frac{2{,}25.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \frac{1{,}264.10^5}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \frac{8{,}09.10^4}{U_1^2}$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \frac{1{,}39.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \frac{7{,}82.10^4}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \frac{5.10^4}{U_1^2}$.

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_I = \frac{5{,}67.10^6}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_I = \frac{3{,}18.10^6}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_I = \frac{2{,}03.10^6}{U_1^2}$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{cs} = \frac{5{,}45.10^4}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{cs} = \frac{3{,}06.10^4}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \frac{1{,}962.10^4}{U_1^2}$.

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{Jb} = \frac{1{,}183.10^3}{U_1}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{Jb} = \frac{8{,}88.10^2}{U_1}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{Jb} = \frac{7{,}10.10^2}{U_1}$.

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad \Phi_i^2 = \frac{5{,}97.10^8}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{1000}} - 2{,}32.10^7\, U_1 - \frac{8{,}36.10^{10}}{U_1}$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \quad \Phi_i^2 = \frac{3{,}36.10^8}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{1000}} - 2{,}32.10^7\, U_1 - \frac{4{,}7.10^{10}}{U_1}$$

$$\cos\varphi = 1 \quad \Phi_i^2 = \frac{2{,}15.10^8}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{1000}} - 2{,}32.10^7\, U_1 - \frac{3{,}01.10^{10}}{U_1}$$

Réunissons tous ces résultats avec les pertes totales et les rendements dans le tableau V.

TABLEAU V.

$P_a = 1000$ w $\quad \cos\varphi = 0{,}6$

U_1	280	220	210	200	150	132,3	100	80	50
i	12,88	9,5	9,14	8,72	7,6	7,44	8,3	10,8	19,2
p_{tot}	512,40	470,56	471,37	472,31	545.93	625,28	927,91	1322,75	3097,83
$\eta^0/_0$	66	68	67,94	67,8	64,7	61,5	51,9	43	24,4

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	280	220	200	180	150	130	111,8	100	50	30
i	11,4	7,78	6,74	6,11	5,36	4,85	4,75	5,05	11.5	24,5
p_{tot}	446,93	359,05	340,46	340,32	367,06	398,16	465,04	585,43	1773,63	4614,93
$\eta^0/_0$	69,2	73,6	74,4	74,5	73,2	71,5	68,3	63,1	36,1	17,8

$\cos\varphi = 1$

U_1	220	200	160	150	120	100	80	50	20
i	5,86	4,76	3,3	3,2	2,47	2,4	2,7	5,3	49
p_{tot}	270,97	255,49	228,95	240,79	268,60	333,78	467,82	1088,18	7043,23
$\eta^0/_0$	78,7	79,6	81,3	80,6	78,9	75	68,2	47,9	12,43

Nous avons relevé aussi des mesures expérimentales que nous avons réunies dans le tableau VI.

TABLEAU VI

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 1000$ w. avec $\cos\varphi = 0{,}6$; $0{,}8$ et 1, donnent les résultats suivants :

	$\cos\varphi = 0{,}6$						$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
280	3,04	12,6	1534	65,2	66,5	+2	2,15	10,9	1450	69	69	—
260	3,19	11,6	1493	67	68,1	+1,64	2,23	9,6	1390	72	72	—
240	3,38	10,7	1460	68,5	68,5	—	2,36	8,8	1360	73,6	73,6	—
220	3,65	10	1444	69,3	68,2	−1,58	2,49	8	1316	76	74,8	−1,58
200	4	9,3	1444	69,3	68	−1,88	2,71	7	1300	77	75	−2,6
180	4,47	8,5	1449	69	67	−2,9	2,99	6,3	1291	77,5	74,7	−2,32
160	5,1	8	1471	68	65,2	−4,12	3,38	5,7	1300	77	73,5	−4,55
140	6,06	7,85	1526	65,5	63,3	−3,36	3,97	5,5	1334	75	71,7	−4,41
120	7,52	8,4	1626	61,5	59,2	−3,75	4,83	5,65	1390	72	68	−5,56
190							6,17	6,1	1481	67,5	63,5	−5,93
80							8,6	7,25	1654	60,5	56,5	−9,9

La fig. 7 nous donne les valeurs des rendements pour cette charge du moteur et différentes valeurs du cos φ, tant calculées que mesurées.

On remarque cette fois un plus grand rapprochement des courbes calculées et mesurées que dans le cas précédent. En même temps les rendements maxima se produisent pour des valeurs particulières de la tension, qui sont différentes de la valeur normale de la tension du moteur.

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
280	1,66	8,6	1395	71,7	71	−0,98
260	1,72	7,7	1343	74,5	73,2	−1.75
240	1,81	6,8	1300	77	76	−1,3
220	1,90	5,7	1250	80	78,7	−1.63
200	2,03	4,9	1220	82	79,6	−2,92
180	2,23	4,3	1205	83	81	−2,4
160	2,50	3,8	1204	83,1	81,3	−2,17
140	2,87	3,25	1205	83	80,5	−3
120	3,43	3	1235	81	78,9	−2,59
100	4,29	3,25	1286	77,8	75	−3,6
80	5,83	3,7	1399	71,5	68,2	−4,63
60	9,1	5	1640	61	56	−8,20

Les résultats de l'étude théorique que nous avons exposés auparavant sont confirmés.

16. Nous avons fait les mêmes calculs et mesures pour la charge de $P_a = 2000$ w. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 5{,}8.10^4 + \frac{12{,}24.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 3{,}486.10^4 + \frac{6{,}25.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 5{,}18.10^3 + \frac{4.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{sh} = \frac{8{,}99.10^5}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{sh} = \frac{5{,}06.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_{sh} = \frac{3{,}236.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{sd} = \frac{5{,}56.10^5}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{sd} = \frac{3{,}13.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_{sd} = \frac{2.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_J = \frac{2{,}26.10^7}{U_1^2}\,; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \quad p_J = \frac{1{,}28.10^7}{U_1^2}\,;$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_1 = \frac{8{,}12.10^6}{U_1^2}\,.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{cs} = \frac{2{,}18.10^5}{U_1^2}\,; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{cs} = \frac{1{,}225.10^5}{U_1^2}\,;$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_{cs} = \frac{7{,}85.10^4}{U_1}\,.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{Jb} = \frac{2{,}365.10^3}{U_1}\,; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{Jb} = \frac{1{,}775.10^3}{U_1}$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_{Jb} = \frac{1{,}42.10^3}{U_1}\,.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad \Phi_i^2 = \frac{2{,}4.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{2000}} - 4{,}64.10^7\, U_1 - \frac{3{,}33.10^{11}}{U_1}$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \quad \Phi_i^2 = \frac{1{,}34\ 10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{2000}} - 4{,}64.10^7\, U_1 - \frac{1{,}87.10^{11}}{U_1}$$

$$\cos\varphi = 1 \quad \Phi_i^2 = \frac{8{,}60.10^8}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{2000}} - 4{,}64.10^7\, U_1 - \frac{1{,}2.10^{11}}{U_1}\,.$$

Réunissons tous ces résultats avec les pertes totales et les rendements dans le tableau VII.

TABLEAU VII

$P_a = 2000$ w $\cos\varphi = 0{,}6$

U_1	380	320	280	220	200	187,2	150	120	100	80
i	23,5	18,92	15,1	14,5	14.2	14,2	15,3	18,3	22,2	31
p_{tot}	967,94	867,63	854,05	1016,19	1112,05	1201,10	1617,59	2416,09	3194,88	4835,23
$\eta\%$	67,5	69,8	70,1	66,3	64.2	62,4	55,3	45,3	38,5	29,3

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	300	260	220	200	170	158	140	100	50
i	13,9	11,67	10	9,5	7,7	7,68	8	10,5	35,5
p_{tot}	648,73	627,49	602,99	677,50	824,11	858,16	1020,58	1781,38	6691,93
$\eta\%$	75,6	76,1	76,90	74,7	70,8	70	66,6	52,9	23

$\cos\varphi = 1$

U_1	280	250	220	200	160	141,5	130	100	50
i	8,76	6,96	5,74	5	4,2	4,15	4,5	5,9	20,6
p_{tot}	442,87	413,44	412,33	428,03	521,78	618,70	708,20	1012,73	4399,33
$\eta\%$	81,7	82,8	82,9	82,4	79,3	76,4	73,8	66,4	31,3

Nous avons relevé aussi des mesures expérimentales que nous avons réunies dans le tableau VIII.

TABLEAU VIII

Le mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 2000$ w, avec $\cos\varphi = 0{,}6$; 0,8 et 1 donnent les résultats suivants :

$\cos\varphi = 0{,}6$							$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\%$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\%$
360	4,34	21,3	2816	71	69	— 2,8						
340	4,51	20	2759	72,5	69,7	— 3,9						
320	4,77	19	2750	72,7	69,8	— 4	3,50	14,3	2683	74,5	74	— 0,67
300	5,1	17,9	2753	72,6	70	— 3,6	3,61	13,1	2600	77	75,6	— 1,82
280	5,5	17	2772	72,1	70,1	— 2,9	3,82	12,2	2562	78	75,8	— 2,8
260	6,1	16,2	2823	70,8	69	— 2,5	4,06	11,3	2531	79	76,1	— 3,67
240	6,54	15,8	2823	70,8	68	— 4	4,40	10,6	2539	78,8	76,5	— 2,9
220	7,34	15,4	2909	68,8	66,3	— 3,8	4,84	10	2555	78,3	76,9	— 1,78
200	8,30	15,4	2986	67	64,2	— 4,2	5,42	9,6	2603	76,8	74,7	— 2,73
180	9,57	16,3	3100	64,5	61,5	— 4,7	6,1	9,2	2631	76	73	— 3,95
160	11,4	17,2	3290	60,8	57,2	— 5,9	7,24	9,3	2779	72	70,5	— 2,1
140	13,9	19,4	3498	57,2	52,5	— 8,2	8,62	9,9	2900	69	66,6	— 3,5
120							10,7	12	3100	64,5	61	— 6
100							14,4	15,3	3450	58	52,9	— 8,8

La fig. 8 représente les courbes mesurées et calculées dans les conditions mentionnées plus haut avec les mêmes conclusions qu'auparavant.

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\,\%$
320	2,64	11	2531	79	79	–
300	2,74	9,8	2470	81	81	–
280	2,91	8,8	2440	82	81,7	−0,4
260	3,08	8	2400	83,3	82	−1,56
240	3,34	7	2402	83,2	82,9	−0 36
220	3,61	6,3	2380	84	82,9	−1.31
200	3,96	5,8	2379	84,1	82,4	−2
180	4,44	5,2	2399	83,4	81	−2,9
160	5,03	5,1	2416	82,8	79,3	−4,23
140	5,91	5,3	2482	80,5	76,3	−5
120	7,22	6,3	2600	77	71,3	−7,4
100	9,12	8,2	2739	73	66,4	−9.1

17. Pour la charge normale du moteur $P_a = 2500$ watts, on a fait les mêmes calculs et mesures, avec les résultats, les tableaux et la fig. 9 qui suivent :

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 7{,}25.10^4 + \frac{1{,}91.10^9}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 4{,}36.10^4 + \frac{9{,}77.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 6{,}49.10^3 + \frac{6{,}25.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = \frac{1{,}40.10^6}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \frac{7{,}9.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \frac{5{,}03.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \frac{8{,}68.10^5}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \frac{4{,}88.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \frac{3{,}13.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_I = \frac{3{,}53.10^7}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_I = \frac{1{,}98.10^7}{U_1^2};$$

TABLEAU IX

$P_a = 2500$ w $\cos\varphi = 0{,}6$

U_1	460	420	380	320	280	220	209	190	150	120	100
i	32,1	27,8	25,6	22,3	18,6	17,4	17,5	17,8	20,5	25,7	32,7
p_{tot}	1368,97	1158,13	1131,90	1127,53	1131,90	1395,32	1484,40	1676,74	2393,90	3508,75	4890,21
$\eta\%$	64,6	68,3	68,8	68,9	68,8	64,2	62,7	59,8	51	41,6	33,8

$P_a = 2500$ w $\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	400	340	320	280	240	220	200	190	176,9	160	120	100	80
i	25,3	17,2	16	15,85	12	11,4	11,2	11,1	11,1	11,85	14,4	17,5	27,2
p_{tot}	975,84	791,78	775,05	812,78	817,86	858,94	945,37	1001,26	1090,03	1265,22	1995,78	2749,65	4235,13
$\eta\%$	71,9	75,9	76,3	72,4	75,86	84,5	72,6	71,4	69,6	66,4	55,6	47,6	37,1

$P_a = 2500$ w $\cos\varphi = 1$

U_1	320	260	220	200	170	158,2	140	100	50
i	10,6	7,41	6	5,25	5,02	5,04	5,5	8,5	31,6
p_{tot}	532,66	496,95	470,12	569,48	696,42	778,75	934,48	1707,43	6582,23
$\eta\%$	82,4	83,5	84,1	81,4	78,2	76,2	72,7	59,4	27,5

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_I = \frac{1{,}28.10^7}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{cs} = \frac{3{,}41.10^5}{U_1^2}\ ;\ \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{cs} = \frac{1{,}91.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \frac{1{,}225.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{Jb} = \frac{2{,}96.10^3}{U_1}\ ;\ \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{Jb} = \frac{2{,}21.10^3}{U_1};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{Jb} = \frac{1{,}78.10^3}{U_1}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad \Phi_i^2 = \frac{3{,}72.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F2500} -$$

$$-5{,}8.10^7\, U_1 - \frac{5{,}2.10^{11}}{U_1};$$

TABLEAU X

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 2500$ w avec $\cos\varphi = 0{,}6$; $0{,}8$ et 1, donnent les résultats suivants :

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\,\%$
360	2,97	12,6	3205	78	79,2	+1,6
340	3,08	11,6	3145	79,5	81	+1,9
320	3,24	10,5	3105	80,5	82,4	+2,4
300	3,37	9,8	3031	82,5	82,9	+0,5
280	3,61	9	3031	82,5	83,1	+0,7
260	3,85	8,3	3004	83,2	83,5	+0,4
240	4,17	7,5	3007	83,1	83,9	+1
220	4,58	6,9	3020	82,8	84,1	+1,6
200	5,1	6,5	3069	81,5	82,4	+1,2
180	6,9	6,5	3184	78,5	80	+1,3
160	6,94	6,8	3331	75	76,5	+2
140	8,5	7	3570	70	72,7	+3,9
120	10,7	8,5	3908	64	67	+4,7

$\cos\varphi = 0{,}6$							$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\%$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\%$
380	5,38	24,3	3685	67,8	68,8	+1,5						
360	5,66	23,5	3670	68,1	69,2	+1,6	3,91	18,5	3385	73,9	74,5	+0,8
340	5,93	22,7	3631	68,8	70	+1,8	4,10	17,7	3343	74,8	75,9	+1,2
320	6,30	21,7	3631	68,8	68,9	+0,2	4,37	16,5	3358	74,5	76,3	+2,5
300	6,80	21,2	3673	68	68,8	+1,2	4,63	15,7	3330	75,1	76	+1,2
280	7,40	20,3	3731	67	68,8	+2,7	4,97	15	3340	74,9	75,4	+0,7
260	8,10	19,4	3789	66	68	+3	5,35	14,1	3341	74,8	75,4	+0,8
240	9	18,9	3908	64	66,5	+4	5,86	13,3	3378	74	75,3	+1,7
220	9,86	18,9	4062	61,5	64,2	+4,4	6,48	13,2	3422	73	74,5	+2,1
200	12	19,5	4311	58	61	+5,2	7,34	12,8	3521	71	72,6	+2,3
180							8,5	12,9	3678	68	70	+3
160							10,1	13,2	3908	64	66,4	+3,8
140							12,6	14,6	4238	59	62	+5,1

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \Phi_i^2 = \frac{2{,}1.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{2500}} - 5{,}8.10^7\, U_1 - \frac{2{,}03.10^{11}}{U_1}.$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad \Phi_i^2 = \frac{1{,}34.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\, p_{F_{2500}} - 5{,}8.10^7\, U_1 - \frac{1{,}88.10^{11}}{U_1}.$$

Les conclusions sont les mêmes que pour les autres charges.

18. Nous avons fait une série d'essais avec le moteur en surcharge, en prenant $P_a = 3000$ w.

Les résultats sont les suivants (fig. 10).

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 8{,}7.10^4 + \frac{2{,}75.10^9}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 5{,}23.10^4 + \frac{1{,}4.10^9}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00486\left(U_1^2 + 7{,}79.10^3 + \frac{9.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}.$

TABLEAU XI

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 3000$ w. avec $\cos\varphi = 0{,}6$; 0,8 et 1, donnent les résultats suivants :

$\cos\varphi = 0{,}6$

U_1	440	380	350	280	340	228,5	200	180	150	100
i	31,6	24,6	24,2	21,6	20,5	20,6	21,1	22,8	26,5	44,5
p_{tot}	1349,93	1267,93	1279,62	1444,84	1663,78	1761	2098,48	2462,54	3328,85	6816,93
η%	68,9	70,4	70,1	67,5	64,4	63	58,8	54,8	47,4	30,6

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	380	300	280	220	200	193,8	180	150	100	80
i	26,85	16	14,7	13,4	13	13	13,4	14,8	23,7	35
p_{tot}	1114,24	915,57	924,50	1126,23	1245,73	1296,20	1441,25	1884	3902,33	5984,63
η%	72,9	76,7	76,5	72,7	70,6	69,8	67,5	61,4	43,4	33,3

$\cos\varphi = 1$

U_1	340	270	240	220	200	190	173,3	150	100	50
i	11,8	7,8	6,8	6,2	5,84	5,96	6,1	6,5	12	17,3
p_{tot}	652,76	618	628	665,68	738,75	795,64	908,31	1141,18	3008,88	8964,33
η%	82,2	83,7	83	81,9	80,3	79	76,8	72,5	50	25,7

MÉRÖKI EGYETEM MŰEGYETEM

$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{sh} = \frac{2{,}02.10^6}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{sh} = \frac{1{,}14.10^6}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \quad p_{sh} = \frac{7{,}28.10^5}{U_1^2}$.

$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{sd} = \frac{1{,}25.10^6}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{sd} = \frac{7{,}4.10^5}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \quad p_{sd} = \frac{4{,}5.10^5}{U_1^2}$.

$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_I = \frac{5{,}07.10^7}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_I = \frac{2{,}86.10^7}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \quad p_I = \frac{1{,}83.10^7}{U_1^2}$.

$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{cs} = \frac{4{,}8.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{cs} = \frac{2{,}76.10^5}{U_1^2}$;

TABLEAU XII

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 3000$ w $\cos\varphi = 0{,}6$; 0,8 et 1, donnent les résultats suivants:

	$\cos\varphi = 0{,}6$						$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
400	6,2	24,3	4461	67,2	70	+ 4,2						
380	6,4	23,4	4380	68,5	70,4	+ 2,3	4,38	17,2	4000	75	72,4	— 3,5
360	6,66	22,8	4312	69,5	70,2	+ 1	4,52	16,4	3905	76,8	73,2	— 4,7
340	6,98	22,4	4276	70,1	70	— 1,4	4,71	15,6	3845	78	74,5	— 4,5
320	7,4	21,7	4265	70,3	69,5	— 1,1	5,02	15,3	3851	77,9	76	— 2,4
300	7,93	21	4282	70	68,8	— 1,74	5,32	14,7	3830	78,3	76,7	— 2,1
280	8,60	20,5	4332	69,2	67,5	— 2,5	5,72	14	3840	78	76,5	— 1,9
260	9,43	20	4415	67,9	66,8	— 1,6	6,24	13,2	3893	77	75	— 2,6
240	10,4	19,7	4510	66,5	64,4	— 1,7	6,76	12,7	3893	77	73,5	— 4,6
220	11,7	19,8	4650	64,5	62,5	— 3,1	7,57	12,5	4000	75	72,7	— 3,1
200	13,8	20,6	4916	61	58,8	— 3,6	8,56	12,2	4110	73	70,6	— 3,3
180							9,95	12,4	4302	69,7	67,5	— 3,3
160							11,81	13,2	4542	66	64	— 3,1

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\,\%$
340	3,56	9,70	3630	82,6	82,2	− 0,5
320	3,65	8,80	3500	85,7	83	− 3,2
300	3,88	8,30	3494	85,8	83,5	−2,7
280	4,15	7,50	3488	86	84	− 2,3
260	4,37	6,70	3488	86	83,5	− 2,9
240	4,9	6	3530	85	83	−2,4
220	5,41	5,50	3570	84	81,9	−2,5
200	6,08	5,10	3650	82,2	80,3	− 2,3
180	6,81	5,80	3680	81,5	78	−4,3
160	7,96	5,70	3821	78,5	74,5	−5,1
140	9,58	6,70	4028	74,5	69,5	− 6,7

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \dfrac{1{,}77.10^5}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{Jb} = \dfrac{3{,}55.10^3}{U_1}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{Jb} = \dfrac{2{,}66.10^3}{U_1}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{Jb} = \dfrac{2{,}13.10^3}{U_1}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad \Phi_i^2 = \dfrac{5{,}26.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\ p_{F_{3000}} - 6{,}96.10^7\ U_i - \dfrac{7{,}5.10^{11}}{U_1}$;

$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \Phi_i^2 = \dfrac{3{,}2.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\ p_{F_{3000}} - 6{,}96.10^7\ U_1 - \dfrac{4{,}2.10^{11}}{U_1}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad \Phi_i^2 = \dfrac{1{,}93.10^9}{U_1^2} + 1{,}41.10^9\ p_{F_{3000}} - 6{,}96.10^7\ U_1 - \dfrac{2{,}7.10^{11}}{U_1}.$

Les conclusions qui s'imposent sont les mêmes que précédemment.

19. Nous avons poursuivi les mêmes calculs et essais pour un moteur dont la puissance normale est de 3000 w, avec la tension d'alimentation 380/220 V. à la fréquence de 50 per/sec.

Nous donnons les mêmes indications, calculs des constantes, tableaux et figures que pour l'autre moteur :

Calcul des constantes :

$$C_1 = \frac{1}{0{,}7.3\cos\varphi}\frac{p_a}{} = 0{,}476\,\frac{p_a}{\cos\varphi}.$$

$$C_2 = 2.0{,}476\,\frac{P_a}{\cos\varphi}(16{,}9\sin\varphi + 1{,}40\cos\varphi) = 0{,}952\,(16{,}9\sin\varphi + 1{,}40\cos\varphi)\,\frac{P_a}{\cos\varphi}.$$

$$C_3 = 17^2.0{,}476^2\,\frac{P_a}{\cos^2\varphi} = 65{,}5\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}.$$

$$C_4 = 1{,}5\,\frac{50}{100}\cdot\frac{10^5}{(4.0{,}9.1{,}11.0{,}960.13{,}6.50.288)^{1{,}6}}\cdot\left[\frac{1{,}770}{(2.5)^{1{,}6}} + 1{,}35.0{,}626\left(\frac{1{,}53}{8{,}8.0{,}765}\right)^{1{,}6}\right] = 0{,}00384.$$

$$C_5 = 4\left(0{,}5.\,\frac{50}{100}\right)^2\left(\frac{10^5}{4.0{,}9.1{,}11.0{,}960.13{,}6.50.288}\right)^2\left[\frac{1{,}770}{(2.5)^2} + 1{,}55.0{,}626\left(\frac{1{,}53}{8{,}8.0{,}765}\right)^2\right] = 0{,}000364.$$

$$C_6 = \frac{3^2.288^2.50.6{,}5.13{,}6}{10^{10}.2}\cdot 0{,}476^2\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 0{,}0414\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}.$$

$$C_7 = 0{,}79.2{,}05.2.14.13{,}6.5{,}1^2\left(\frac{36.1500}{10.000}\right)^{1{,}5}\left(\frac{24\,0{,}476}{1000}\right)^2\cdot 1{,}7.10^{-3}\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 0{,}0447\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}.$$

$$C_8 = 1{,}1.0{,}476^2.3.1{,}4\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 1{,}28\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}.$$

$$C_{10} = 0{,}476^2\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}.3.1{,}4\,\frac{8^2 - 0{,}2}{9}\left(0{,}16.2\,\pi\sqrt{\frac{3.0{,}25.50}{0{,}765.0{,}01784.105}}\right)^4.$$

$$C_{19} = 1{,}1^2\left(\frac{1{,}25.864.0{,}476.3}{4{,}27}\right)^2\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi} = 1{,}357.10^5\,\frac{P_a^2}{\cos^2\varphi}.$$

$$C_{20} = \left(\frac{10^8}{4.1{,}11.0{,}960.50.288}\right)^2 = 2{,}66.10^6.$$

$$C_{21} = 2\sqrt{1{,}57.2{,}66.10^{11}}\,\frac{P_a}{\cos\varphi} = 6{,}46.10^5\,\frac{P_a}{\cos\varphi}.$$

Les résultats pour $P_a = 200$ w. sont les suivants (fig. 11):

$\cos\varphi = 0{,}6$ $\qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 4550 + \frac{7{,}28.10^6}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$;

$\cos\varphi = 0{,}8$ $\qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 2670 + \frac{4{,}1.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00384 \left(U_1^2 + 266{,}2 + \frac{2{,}62.10^6}{U_1^2} \right)^{0{,}8}$

$p_F = 0{,}000364 \left(\frac{p_H}{0{,}00384} \right)^{\frac{1}{0{,}8}}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = \frac{4{,}6.10^3}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \frac{2{,}59.10^3}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \frac{1{,}66.10^3}{U_1^2}$.

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \frac{4{,}96.10^3}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \frac{2{,}79.10^3}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \frac{1{,}786.10^3}{U_1^2}$.

TABLEAU XIII

$P_a = 200$ w $\cos\varphi = 0{,}6$

U_1	220	200	150	100	70	52	32
i	0,44	0,38	0,24	0,14	0,10	0,09	0,11
p_{tot}	130,696	120,333	97,139	86,994	95,368	118,783	236,052
$\eta\%$	59,3	62,4	67,2	69,7	67,7	62,7	45,8

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	220	200	150	100	90	80	45	30	20
i	0,43	0,37	0,23	0,125	0,108	0,09	0,06	0,07	0,10
p_{tot}	127,238	115,903	91,153	77,808	75,952	76,021	99,28	154,71	279,973
$\eta\%$	61	63,3	68,6	72	72,5	72,4	66,8	56,4	41,7

$\cos\varphi = 1$

U_1	220	200	150	100	80	70	42,2	30	50
i	0,42	0,35	0,22	0,11	0,087	0,06	0,05	0,06	0,08
p_{tot}	124,39	111,34	87,84	70,49	68,37	67,22	83,88	115,40	196,27
$\eta\%$	61,6	64,2	69,5	72,8	74,6	74,8	70,5	63,4	50,5

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_I = \frac{1{,}42.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_I = \frac{7{,}97.10^4}{U_1^2}$;

TABLEAU XIV

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 200$ w. avec $\cos\varphi = 0{,}6$; $0{,}8$ et 1, donnent les résultats suivants :

	$\cos\varphi = 0{,}6$						$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
220	0,886	0,453	351	57	59,3	+4	0,642	0,425	339	59	61	+3,4
200	0,928	0,395	334,2	59,8	62,4	+4,35	0,676	0,36	324,5	61,6	63,3	+2,8
180	0,995	0,335	322,4	62	64	+3,2	0,723	0,30	312,2	64	65,5	+2,3
160	1,07	0,280	307,4	65	66	+1,6	0,802	0,25	300,8	66,5	68	+2,5
140	1,20	0,187	303,3	65,9	67,5	+2,4	0,875	0,205	294	68	70	+3
120	1,40	0,155	302,6	66,1	69	+4,4	1	0,16	289,8	69	71	+2,9
100	1,69	0,155	303,9	65,8	69,7	+5,9	1,21	0,117	289,2	69,1	72	+4,2
80	2,19	0,125	315	63,5	68,5	+7,9	1,53	0,084	294	68	72,4	+6,5
60	3,30	0,120	357	56	64	+14	2,15	0,085	310	64,5	70	+8,5
40	6,70	0,150	482	41,5	53	+27,7	4,17	0,105	400	50	64	+28

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff^0/_0$
220	0,492	0,405	325	61,5	61,6	+0,2
200	0,528	0,34	317,1	63	64,2	+1,9
180	0,562	0,278	303,8	65,8	67	+1,8
160	0,603	0,235	289,8	69	69	—
140	0,68	0 18	285,4	70	71	+1,4
120	0,774	0,13	278,8	71,7	72,5	+1,1
100	0,913	0,09	273,9	73	72,8	−0,3
80	1,13	0,05	272	73,5	74,6	+1,5
60	1,58	0,04	283,5	70,5	74	+5
40	2,73	0,065	327,6	61	70	+14,7
30	4,58	0,08	412	48,5	63,4	+30,7

$\cos\varphi = 1 \qquad p_I = \dfrac{5{,}1.10^4}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{cs} = \dfrac{5{,}78.10^2}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{cs} = \dfrac{3{,}25.10^2}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \dfrac{2{,}08.10^2}{U_1^2}.$

$$p_m = 0{,}3.4.0{,}1.3{,}14^{1{,}5} + 0{,}8.18{,}2.13{,}6.14{,}3^2.10^{-3} + \\ + 9{,}81.0{,}16.0{,}1.7{,}5.3 = 44{,}57 \text{ w.}$$

$\cos\varphi = 0{,}6 \quad \Phi_i^2 = \dfrac{1{,}74.10^{10}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9 p_{F_{200}} + 1{,}292.10^8 U_1 + \dfrac{4{,}78.10^{10}}{U_1}.$

$\cos\varphi = 0{,}8 \quad \Phi_i^2 = \dfrac{9{,}81.10^9}{U_1^2} + 7{,}31.10^9 p_{F_{200}} + 1{,}292.10^8 U_1 + \dfrac{2{,}69.10^{10}}{U_1}.$

$\cos\varphi = 1 \quad \Phi_i^2 = \dfrac{6{,}28.10^9}{U_1^2} + 7{,}31.10^9 p_{F_{200}} + 1{,}292.10^8 U_1 + \dfrac{1{,}721.10^{10}}{U_1}.$

Les résultats pour $P_a = 1000$ w. sont les suivants (fig. 12):

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 2{,}275.10^4 + \dfrac{1{,}82.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$;

$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 1{,}335.10^4 + \dfrac{1{,}025.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 1{,}332.10^3 + \dfrac{6{,}55.10^7}{U_1^2}\right)^{0{,}8}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = \dfrac{1{,}15.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \dfrac{6{,}47.10^4}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \dfrac{4{,}14.10^4}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \dfrac{1{,}24.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \dfrac{6{,}98.10^4}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \dfrac{4{,}47.10^4}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_I = \dfrac{3{,}56.10^6}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_I = \dfrac{1{,}99.10^6}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_I = \dfrac{1{,}28.10^6}{U_1^2}.$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad p_{cs} = \frac{1{,}44.10^4}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \quad p_{cs} = \frac{8{,}11.10^3}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \quad p_{cs} = \frac{5{,}19.10^3}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \quad \Phi_i^2 = \frac{4{,}86.10^{11}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9 p_{F_{1000}} + 6{,}46.10^8 U_1 + \frac{1{,}2.10^{12}}{U_1};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \quad \Phi_i^2 = \frac{2{,}45.10^{11}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9 p_{F_{1000}} + 6{,}46.10^8 U_1 + \frac{6{,}72.10^{11}}{U_1};$$

$$\cos\varphi = 1 \quad \Phi_i^2 = \frac{1{,}57.10^{11}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9 p_{F_{1000}} + 6{,}46.10^8 U_1 + \frac{4{,}3.10^{11}}{U_1}.$$

Réunissons tous ces résultats avec les pertes totales et les rendements dans le tableau XV.

TABLEAU XV

$P_a = 1000$ w $\quad \cos\varphi = 0{,}6$

U_1	320	280	240	200	160	140	116,2	100	60
i	1,44	1,2	1.01	0,83	0,68	0,62	0,57	0,56	0,70
p_{tot}	309,394	281,244	268,38	301,073	301,073	348,015	419,36	519,01	1226,37
η%	76,4	78,1	78,9	78,8	76,9	74,2	70,5	65,8	44,9

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	300	260	220	200	160	130	100,5	80	50
i	1,25	1,01	0,83	0,74	0,60	0,49	0,43	0,41	0,51
p_{tot}	262,07	231,88	216,817	211,633	220,147	247,11	324,203	445,74	994,02
η%	79,3	81,2	82.3	82,6	82	80,3	75,5	69,1	50,1

$\cos\varphi = 1$

U_1	240	200	170	150	120	94,5	80	50
i	0,83	0,65	0,504	0,45	0,35	0,29	0,29	0,32
p_{tot}	192,662	174,35	166,40	170,321	187,19	240,882	301,46	646.39
η%	83,9	85,1	85,7	85,5	84,3	80,1	76,9	60,7

TABLEAU XVI

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 1000$ w. avec $\cos\varphi = 0{,}6$; $0{,}8$ et 1, donnent les résultats suivants :

	$\cos\varphi = 0{,}6$						$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\,\%$	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\,\%$
260	2,77	1,07	1299	77	78,8	+2,35	2,02	0,99	1258	79,5	81,2	+2,1
240	2,97	0,94	1284	77,9	78,9	+1,3	2,16	0,88	1247	80,2	82	+2,3
220	3,22	0,87	1276	78,3	79	+0,9	2,34	0,79	1236	80,9	82,3	+2,6
200	3,56	0,78	1282	78	78,8	+1	2,57	0,69	1236	80,9	82,6	+2,1
180	4,01	0,70	1299	77	78	+1,3	2,86	0,62	1235	81	82,4	+1,7
160	4,63	0,63	1334	75	76,9	+2,5	3,28	0,55	1260	79,4	82	+3,3
140	5,51	0,55	1390	72	74,2	+1,3	3,86	0,47	1299	77	81	+5,2
120	7,02	0,52	1516	66	70	+6,1	4,76	0,41	1370	73	79	+8,2
100	10,1	0,52	1818	55	65,8	+19,6	6,35	0,40	1525	65,6	75,4	+15

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	$diff\,\%$
260	1,56	0,89	1220	82	82,8	+ 1
240	1,67	0,78	1205	83	83,9	+ 1,1
220	1,81	0,69	1196	83,6	84,6	+ 1,2
200	1,98	0,59	1191	84	85,1	+ 1,3
180	2,19	0,50	1181	84,7	85,8	+ 1,3
160	2,46	0,42	1184	84,5	85,6	+ 1,3
140	2,84	0,34	1192	83,9	84,9	+ 1,2
120	3,41	0,28	1226	81,5	84,3	+ 3,4
100	4,33	0,24	1299	77	81	+ 5,2
80	6,3	0,26	1471	68	76,9	+ 13,1

Les résultats pour $P_a = 2000$ w. sont les suivants (fig. 13).

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 4{,}55.10^4 + \frac{7{,}28.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 2{,}67.10^4 + \frac{4{,}1.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 2{,}662.10^3 + \frac{2{,}62.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = \frac{4{,}60.10^5}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \frac{2{,}59.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \frac{1{,}66.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \frac{4{,}96.10^5}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \frac{2{,}79.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \frac{1{,}786.10^5}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_I = \frac{1{,}42.10^7}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_I = \frac{7{,}91.10^5}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_I = \frac{5{,}10.10^6}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{cs} = \frac{5{,}78.10^4}{U_1^2}; \quad \cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{cs} = \frac{3{,}25.10^4}{U_1^2};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \frac{2{,}08.10^4}{U_1^2}.$$

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad \Phi_i^2 = \frac{1{,}75.10^{12}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9\, p_{F_{2000}} +$$

$$+ 1{,}292.10^9\, U_1 + \frac{4{,}78.10^{12}}{U_1};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \Phi_i^2 = \frac{9{,}81.10^{11}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9\, p_{F_{2000}} +$$

$$+ 1{,}292.10^9\, U_1 + \frac{2{,}69.10^{12}}{U_1};$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad \Phi_i^2 = \frac{6{,}28.10^{11}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9\, p_{F_{2000}} +$$

$$+ 1{,}292.10^9\, U_1 + \frac{1{,}72.10^{12}}{U_1}.$$

Réunissons tous ces résultats avec les pertes totales et les rendements dans le tableau XVIII.

TABLEAU XVII

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 2000$ w avec $\cos\varphi = 0{,}6$; $0{,}8$ et 1, donnent les résultats suivants :

	$\cos\varphi = 0{,}6$						$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	diff°/₀	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	diff°/₀
360	4,14	2,58	2682	74,5	79	+6						
340	4,32	2,34	2648	75,5	79,6	+5,45	3,11	2,12	2541	78,6	81	+3,2
320	4,53	2,12	2611	76,5	79,8	+4,37	3,26	1,95	2500	80	82	+2,5
300	4,83	1,96	2611	76,5	79,7	+4,20	3,45	1,78	2481	80,5	83,2	+3,4
280	5,08	1,80	2564	77,9	79,3	+1,8	3,63	1,66	2440	81,9	83,6	+2,1
260	5,48	1,68	2564	77,9	79,1	+1,54	3,95	1,55	2468	81	83,5	+3,1
240	5,95	1,57	2571	77,7	78,8	+1,42	4,28	1,40	2470	80,9	83,2	+2,8
220	6,6	1,44	2610	76,6	77,6	+1,3	4,71	1,26	2484	80,4	82,8	+3
200	7,4	1,32	2663	75	75	—	5,27	1,14	2530	79	82,1	+3,9
180	8,57	1,20	2780	71,9	73,6	+2,37	6	1,02	2593	77	81,2	+5,5
160	10,5	1,17	3046	65,6	70	+6,7	7,06	0,94	2713	73,6	79,1	+7,5
140	13,5	1,18	3416	58,5	66,3	+13,3	8,74	0,86	2939	68	76,3	+12,5
120							11,6	0,88	3358	59,5	71,5	+20

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	diff°/₀
320	2,51	1,79	2408	83	84	+1,2
300	2,64	1,64	2379	84	85,5	+1,8
280	2,81	1,50	2359	84,7	86	+1,5
260	3	1,34	2344	85,2	86,4	+1,6
240	3,24	1,20	2330	85,7	86,5	+0,9
220	3,53	1,10	2329	85,8	86,7	+1
200	3,91	0,96	2349	85,1	86,9	+2,1
180	4,24	0,87	2371	84,2	86	+2,1
160	5,06	0,77	2429	82,3	85	+3,3
140	6,09	0,68	2559	78,1	79	+1,15
120	7,60	0,75	2736	73	74,5	+2,1

TABLEAU XVIII

$P_a = 2000$ w $\cos\varphi = 0{,}6$

U_1	400	340	300	260	220	180	164,1	140	100
i	3,29	2,37	2,07	1,8	1,55	1,39	1,33	1,30	1,36
p_{tot}	595,197	514,95	509,23	526,17	576,86	715,84	803,77	1017,52	1781,95
η°/₀	77	79,6	79,7	79,1	77,6	73,6	71,3	66,3	52,8

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	360	300	280	260	220	200	170	141,5	100	80
i	2.36	1,89	1,74	1,62	1,4	1,28	1,11	1	0,95	1,04
p_{tot}	445,335	403,911	395,733	397,65	416,04	436,78	497,45	616,3	1045,82	1549,05
η°/₀	81,8	83,2	83,6	83,5	82,8	82,1	80,1	76,5	65,7	56,4

$\cos\varphi = 1$

U_1	300	260	220	200	150	127,3	100	80	50
i	1,71	1,42	1,16	0,99	0,80	0.71	0,65	0,68	0,92
p_{tot}	337,174	313,968	309,50	302,09	392,06	477,35	683,19	1001,82	2387,09
η°/₀	85,5	86,4	86,7	86,9	83,5	80,7	74,5	66,6	45,6

Les résultats pour $P_a = 3000$ w. sont les suivants (fig. 14).

$$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 6{,}83.10^4 + \frac{1{,}64.10^9}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 4{,}01.10^4 + \frac{9{,}23.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8};$$

$\cos\varphi = 1 \qquad p_H = 0{,}00384\left(U_1^2 + 4.10^3 + \frac{5{,}90.10^8}{U_1^2}\right)^{0{,}8}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sh} = \frac{1{,}04.10^6}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sh} = \frac{5{,}82.10^5}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sh} = \frac{3{,}73.10^5}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{sd} = \frac{1{,}12.10^6}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{sd} = \frac{6{,}28.10^5}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{sd} = \frac{4.02.10^5}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_J = \frac{3{,}20.10^7}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_J = \frac{1{,}8.10^7}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_J = \frac{1{,}2.10^7}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad p_{cs} = \frac{1{,}3.10^5}{U_1^2}$; $\cos\varphi = 0{,}8 \qquad p_{cs} = \frac{7{,}3.10^4}{U_1^2}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad p_{cs} = \frac{4{,}67.10^4}{U_1^2}.$

$\cos\varphi = 0{,}6 \qquad \Phi_i^2 = \frac{3{,}92.10^{12}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9\, p_{F_{3000}} + 1{,}94.10^9\, U_i + \frac{1{,}08.10^{13}}{U_1}$;

$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \Phi_i^2 = \frac{2{,}21.10^{12}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9\, p_{F_{3000}} + 1{,}94.10^9\, U_1 + \frac{6{,}04.10^{12}}{U_1}$;

$\cos\varphi = 1 \qquad \Phi_i^2 = \frac{1{,}41.10^{12}}{U_1^2} + 7{,}31.10^9\, p_{F_{3000}} + 1{,}94.10^9\, U_1 + \frac{3{,}87.10^{12}}{U_1}.$

Reunissons tous ces résultats avec les pertes totales et les rendements dans le tableau XIX.

TABLEAU XIX

$P_a = 3000$ w $\cos\varphi = 0{,}6$

U_1	440	400	360	320	280	240	210	180	150
i	4,21	3,98	3,43	3,03	2,75	2,42	2,25	2,13	2,1
p_{tot}	800,67	793,58	776,56	792,29	861,17	975,93	1137,92	1402,06	1879,75
$\eta^0/_0$	78,8	79,1	79,5	79,1	77,6	75,4	72,5	68,1	61,5

$\cos\varphi = 0{,}8$

U_1	400	360	320	280	240	200	174,5	140	100
i	3,53	3,12	2,75	2,4	2,08	1,81	1,69	1,55	1,67
p_{tot}	638,993	612,38	597,28	608,22	656,34	770,75	1010,87	1249,70	2227,77
$\eta^0/_0$	82,4	83	83,5	83,2	82	79,6	74,8	70,6	57 4

$\cos\varphi = 1$

U_1	380	320	280	240	200	170	155,9	130	100	50
i	3,03	2,44	2,12	1,73	1,48	1,31	2,23	1,14	1,14	4,78
p_{tot}	520,051	472,192	466,59	473,55	535,96	635,49	707,46	924,93	1440,40	5612,05
$\eta^0/_0$	85,1	86,3	86,6	86,3	84,8	82,5	80,9	76,4	67,5	34,8

Les mesures expérimentales pour le moteur synchrone chargé à la puissance $P_a = 3000$ w. avec $\cos\varphi = 0{,}6$; 0,8 et 1, donnent les résultats suivants:

TABLEAU XX

$\cos\varphi = 0{,}6$							$\cos\varphi = 0{,}8$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	diff °/₀	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	diff °/₀
400	5,37	3,76	3870	77,5	79,1	+ 2,1	3,88	3,43	3726	80,5	82,4	+ 2,4
380	5,64	3,53	3857	77,8	79,3	+ 1,9	4,06	3,20	3708	80,9	82,7	+ 2,2
360	5,89	3,30	3821	78,5	79,5	+ 1,3	4,23	3,02	3660	82	83	+ 1,2
340	6,28	3,10	3846	78	79,3	+ 1,7	4,49	2,82	3660	82	83,3	+ 1,6
320	6,68	2,92	3850	77,9	79,1	+ 1,5	4,76	2,62	3650	82,2	83,5	+ 1,6
300	7,19	2,77	3885	77,2	78,7	+ 1,9	5,07	2,43	3650	82,2	83,4	+ 1,5
280	7,79	2,60	3927	76,4	77,6	+ 1,6	5,43	2,28	3650	82,2	83,2	+ 1,2
260	8,61	2,40	4027	74,5	77	+ 3,4	5,87	2,06	3661	81,9	83	+ 1,3
240	9,53	2,24	4120	72,8	75,4	+ 3,6	6,42	1,87	3700	81	82	+ 1,2
220	10,73	2,12	4225	71	73,5	+ 3,5	7,17	1,75	3782	79,2	80	1
200	12,35	2,03	4442	67,5	71,3	+ 5,6	8,13	1,63	3902	76,8	79,6	+ 3,6
180							9,27	1,51	4080	73,5	77	+ 4,8
160							11,2	1,44	4312	69,5	74	+ 6,5
140							13,7	1,48	4612	65	70,6	+ 8

	$\cos\varphi = 1$					
U_1	I	i	p_{tot}	η_m	η_c	diff °/₀
400	3	3,19	3610	83	84,2	+1,5
380	3,14	2,95	3579	83,8	85,1	+1,6
360	3,28	2,71	3544	84,5	85,7	+1,4
340	3,46	2,50	3526	85	86,1	+1,3
320	3,66	2,34	3518	85,2	86,3	+1,3
300	3,87	2,17	3484	86	86,5	+0,6
280	4,15	1,95	3484	86	86,6	+0,7
260	4,47	1,76	3484	86	88,4	+2,8
240	4,84	1,55	3484	86	86,3	+0,4
220	5,34	1,38	3526	85	85,7	+0,8
200	6	1,20	3601	83,2	84,8	+1,9
180	6,85	1,05	3700	81	83,5	+3,1
160	8	0,95	3846	78	81,2	+4,1
140	9,7	0,97	4071	73,6	74	+0,5

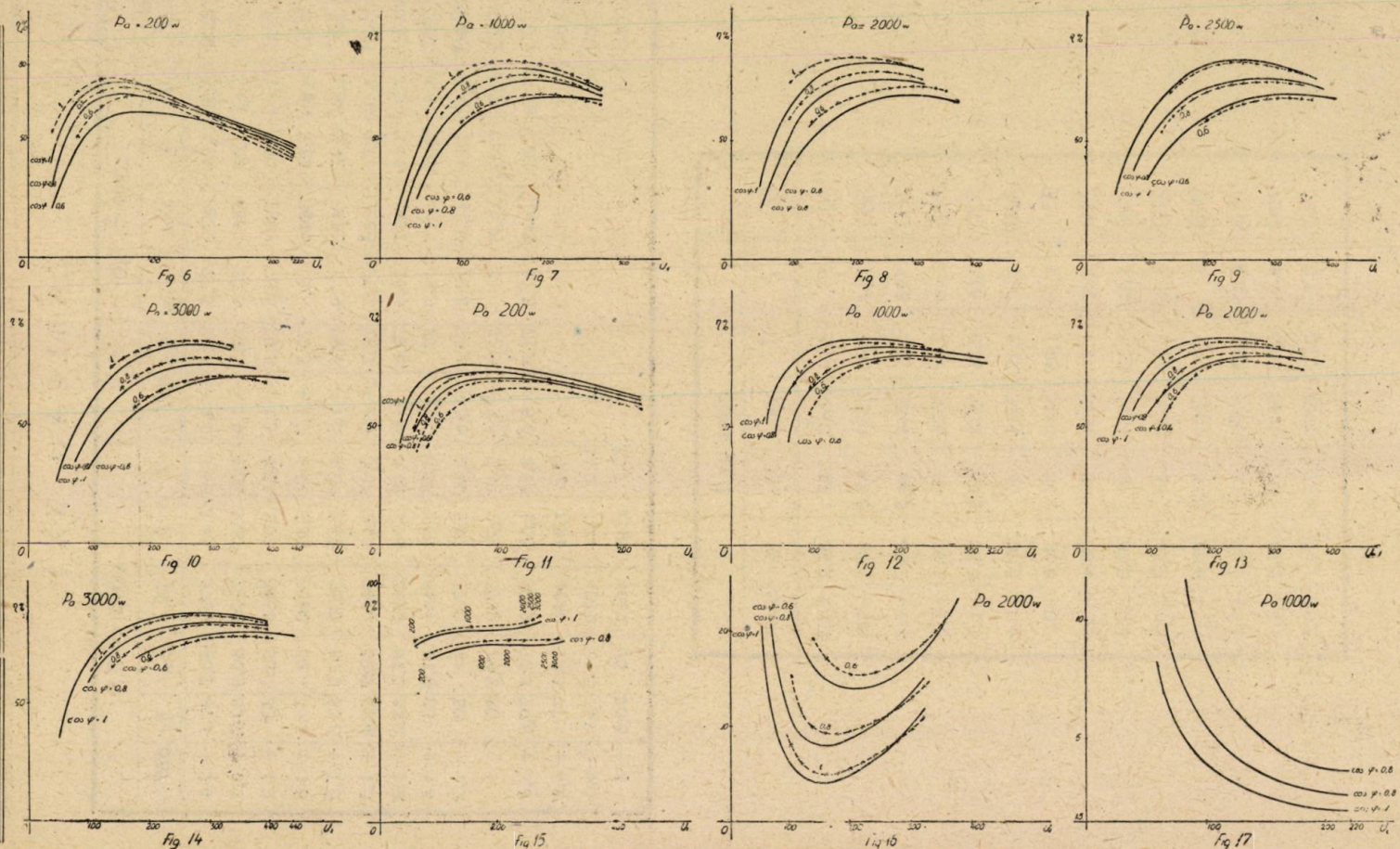


Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10
Fig 11
Fig 12
Fig 13
Fig 14
Fig 15
Fig 16
Fig 17

20. Dans la fig. 15 nous avons rassemblé les points représentant les valeurs maxima des rendements pour différentes charges en fonction de la tension d'alimentation U_1. Nous constatons que ces points se situent sur une courbe, les valeurs des maxima correspondant à des tensions d'autant plus grandes que la charge du moteur est plus importante.

21. Au § 11 nous avons établi une relation entre le flux Φ_i et la tension d'alimentation U_1 (38). D'autre part, nous connaissons la relation (37) entre le flux et le courant d'excitation i. Nous avons représenté dans la fig. 4 la forme de Φ^2_i en fonction de U_1. Nous avons essayé de poursuivre la variation du courant d'excitation en fonction de la tension U_1 et nous avons relevé des courbes de la forme de celle donnée par la fig. 16. Celles-ci se rapportent au moteur I, chargé à 2000 watts et pour différentes valeurs de $\cos\varphi$: 0,6; 0,8 et 1. On a obtenu des courbes absolument analogues pour les autres charges et aussi pour le moteur II. En comparant les figures 4 et 16 on constate une bonne ressemblance des courbes obtenues des considérations théoriques et trouvées par des essais directs.

22. En partant des études théoriques nous avons trouvé la relation (8) et la courbe $I = I\,(U_1)$ de la fig. 5.

Par expérience directe nous avons relevé la fonction ci-dessus et trouvé des courbes de la forme donnée par la fig. 17. Celles-ci se rapportent au moteur I chargé à 1000 watts, le $\cos\varphi$ ayant les valeurs 0,6; 0,8 et 1. On a également trouvé des courbes de la même forme, que nous avons estimé inutile de reproduire, pour les autres charges du moteur I, ainsi que pour le moteur II. En comparant les fig. 5 et 17 on constate une très bonne analogie des formes prévues et trouvées pour la variation du courant I en fonction de U_1, la puissance sur l'arbre restant constante.

23. Dans une autre série de mesures nous avons poursuivi la variation du rendement η toujours en fonction de la tension d'alimentation U_1 ; nous avons gardé cette fois-ci la même valeur pour le courant d'excitation i, le facteur de puissance variant librement.

Dans cette situation nous avons relevé une série de données expérimentales pour les deux moteurs à différentes charges. Pour ne pas trop encombrer ce travail nous donnons seulement deux tableaux numériques XXI et XXII se rapportant à la plus petite et à la plus grande charge du moteur I.

TABLEAU XXI

Des relevés expérimentales concernant le moteur I, chargé a *200* w, pour une puissance constante P_a et différentes valeurs du courant d'excitation *i*, en fonction de la tension U_1.

	i = 2A				*i* = 5A				*i* = 7A			
U_1	cosφ	*I*	P_{tot}	η%	cos φ	*I*	P_{tot}	η%	cosφ	*I*	P_{tot}	η%
220	0,22	2,67	388	51,5	0 50	1,26	416,5	48	0,96	0,7	444	45
200	0,44	1,39	366,8	54,5	0,78	0,84	392	51	0,78	0,90	418	47,8
180	0,63	0,99	336	59,5	1	0,70	377,1	53	0,67	1,10	400	50
160	0,75	0,91	326,5	61,2	0,87	0,87	363,7	55	0,65	1,35	385	52
140	0,84	0,86	303	66	0,82	0,98	338	59,2	0,60	1,5	375	53
120	0,88	0,91	287,5	69,5	0,86	1,07	330,3	60,5	0,54	1.85	358	55,8
100	0,96	0,98	281,5	71	0,88	1,24	327,9	61	0,57	2,10	363	55
80	0,98	1,16	274,3	72,8	0,92	1,52	334,1	59,8	0,71	2,38	408	49
60	0,95	1,62	279,3	71,5	0,95	2,43	416,5	48				
40	0,88	3,09	327,6	61								

	i = 10A				*i* = 15A			
U_1	cosφ	*I*	P_{tot}	η%	cosφ	*I*	P_{tot}	η%
220	0,90	0,79	467	42,8	0,50	1,52	500	40
200	0,60	1,25	449,1	44,5	0,29	2,88	500	40
180	0,44	1,82	434,8	46	0,28	3,31	500	40
160	0,40	2,10	404	49,5	0,29	3,53	490	40,8
140	0,44	2,16	400	50	0,37	3,18	496	40,3
120	0,50	2,19	393,8	50,8	0,40	3,37	526	38
100	0,60	2,30	410,3	48,7				
80	0,64	2,70	465	43				

Les fig. 18 à 26 répresentent les variations des rendements des deux moteurs étudiés, pour différentes charges et valeurs du courant d'excitation *i*, quand la tension d'alimentation U_1 varie.

En examinant les courbes obtenues on constate :

En fonction de la tension d'alimentation, les rendements présentent, pour n'importe quelle charge, une valeur maximum correspondant à une tension particulière $(U_1)_0$.

A faible charge (moins d'un dixième de la charge normale) on constate que $(U_1)_0$ prend une valeur qui peut descende même à la

moitié de la tension normale. Au fur et à mesure que la charge augmente le maximum du rendement se déplace vers des tensions plus grandes. A la charge normale ou à des charges supérieures à celle-ci, on trouve le rendement maximum pour une tension qui des fois dépasse la valeur de la tension normale du moteur.

TABLEAU XXII

Des relevés expérimentales concernant le moteur I, chargé a *3000* w. pour une puissance constante P_a et différentes valeurs du courant d'excitation i, en fonction de la tension U_1.

	$i = 7A$				$i = 10A$			
U_1	cos φ	I	P_{tot}	η%	cos φ	I	P_{tot}	η%
400	0,77 cap.	4,19	3870	77,5	1	3,4	4080	73,5
370	0.87 „	3,86	3721	80,6	0,96 ind.	3,7	3938	76,2
330	0,97 „	3,76	3621	82,8	0,89 „	4,26	3799	79
300	0,99 „	3,93	3505	85,6	0,86 „	4,81	3799	79
270	0,98 ind.	4,50	3530	85	0,84 „	5.65	3850	77,9
230	0,97 „	5,30	3550	84,5	0,82 „	7	3971	75,5
200	0,97 „	6,30	3668	81,8	0,83 „	8,6	4285	70
170	1	7,60	3875	77,4	0,88 „	11	4965	60,4
130	0,90 cap.	12,10	4371	68,6				

	$i = 15A$				$i = 21A$			
U_1	cos φ	I	P_{tot}	η%	cos φ	I	P_{tot}	η%
400	0.88 ind.	3,99	4209	71,3	0,76 ind.	4,74	4320	69,5
370	0,82 „	4,55	4138	72,5	0,68 „	5,70	4305	69,7
330	0,76 „	5,36	4038	74,3	0,64 „	6,68	4239	70,8
300	0,72 „	6,22	4031	74,4	0,60 „	7,94	4285	70
270	0,69 „	7,35	9110	73	0,57 „	9,47	4371	68,6
230	0,70 „	9,13	4441	67,5	0,55 „	12,20	4650	64,5
200	0,70 „	11,6	4870	61,6	0,57 „	15,50	5310	56,5

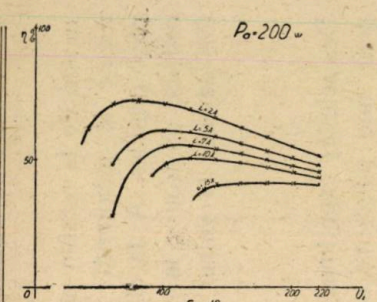


Fig 18

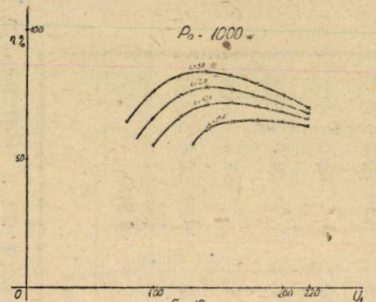


Fig 19

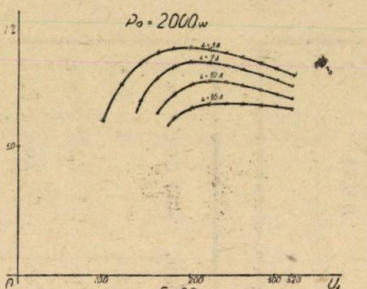


Fig 20

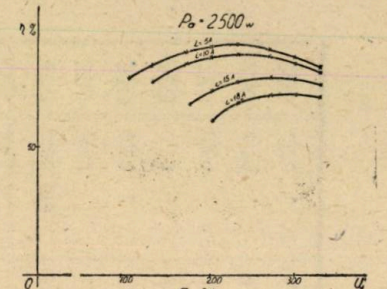


Fig 21

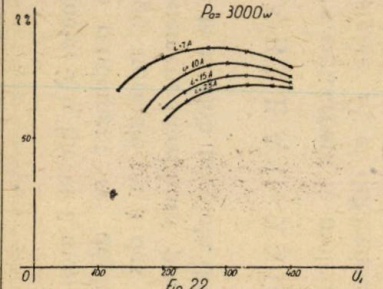


Fig 22

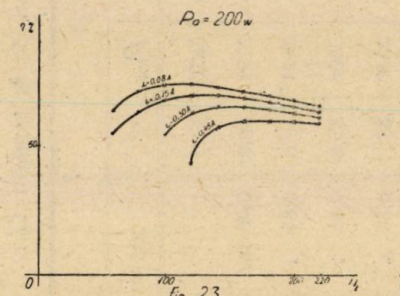


Fig 23

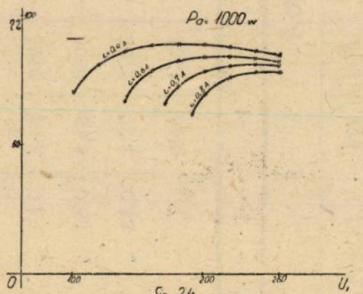


Fig 24

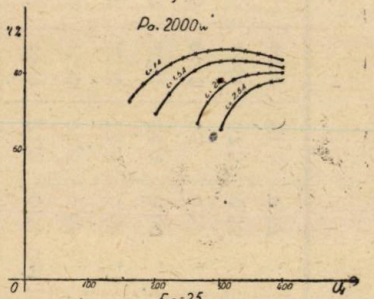


Fig 25

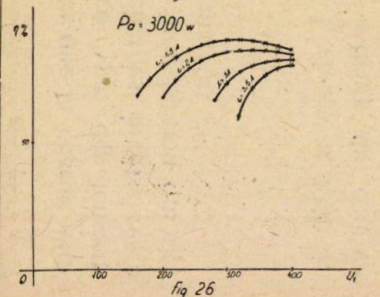


Fig 26

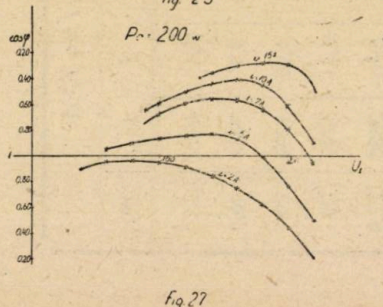


Fig 27

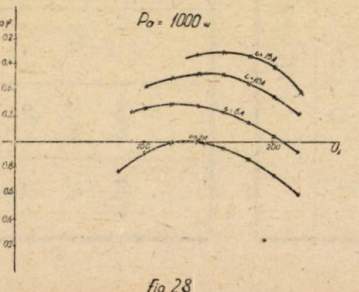


Fig 28

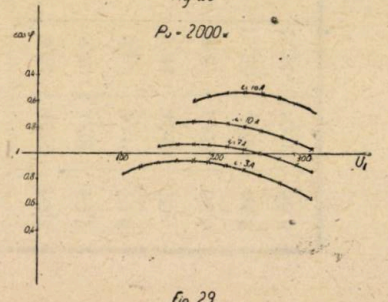


Fig 29

Pour une charge déterminée on observe que le plus grand rendement et la courbe entière sont obtenus pour le plus petit courant d'excitation. En même temps les rendements maxima se déplacent vers des tensions d'alimentation plus petites quand les courants d'excitation diminuent.

Les tableaux XXI et XXII nous permettent de poursuivre également la variation du facteur de puissance en fonction de la tension d'alimentation, pour différentes valeurs du courant d'excitation et en supposant une charge déterminée du moteur.

En réalité nous avons une série de tableaux analogues à ceux donnés plus haut, que nous n'avons pas publiée entiérement.

De toutes les données pratiques nous avons tiré les courbes des figures 27–31 pour le moteur I et 32–35 pour le moteur II.

En les examinant on constate que la valeur la plus favorable pour le facteur de puissance, $k = 1$, est obtenue pour chaque charge du moteur en donnant des certaines valeurs au courant d'excitation et à la tension d'alimentation.

24. Dans des mesures, dont nous avons donné seulement comme exemple les deux derniers tableaux XXI et XXII, nous avons recherché les valeurs de l'intensité du courant absorbé I en fonction de la tension d'alimentation U_1 pour différentes valeurs du courant d'excitation. Les résultats sont donnés dans les fig. 36–40 pour le moteur I et 41–44 pour le moteur II.

On trouve dans chaque cas une famille de courbes d'un ordre supérieur. La forme est plus caractéristique pour les petites charges du moteur et tout spécialement pour le moteur I (fig. 36 et 37). La variation du courant en fonction de la tension pour les différentes valeurs du courant d'excitation accuse une forme ayant la concavité en bas pour les petites valeurs de i, pour passer ensuite approximativement par une droite et prendre à la fin une forme avec la concavité en haut pour de fortes intensités du courant d'excitation. Dans les autres figures, avec des intensités moins importantes du courant i par rapport aux charges considerées, on reste dans les premières phases de l'évolution de la famille de courbes respectives.

L'existence de cette famille de courbes peut s'expliquer, à notre avis, de la manière suivante. Le flux résultant du moteur provient des flux produits par l'inducteur et par l'induit (le stator). Le flux de l'inducteur reste constant pendant la durée d'une série de mesures parce que le courant i ne change pas. La courbe représentative a la forme d'une courbe de magnétisation et contient un paramétre variable dont nous ne connaissons pas la forme pour la partie qui suit le coude

MÉRNÖKTOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

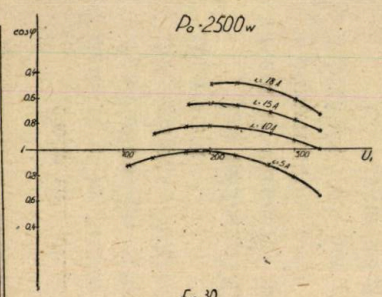


Fig. 30

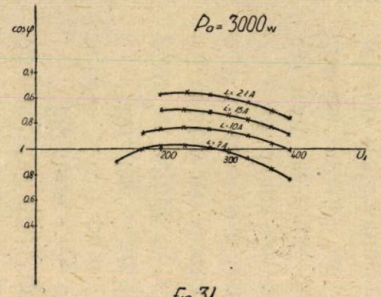


Fig. 31

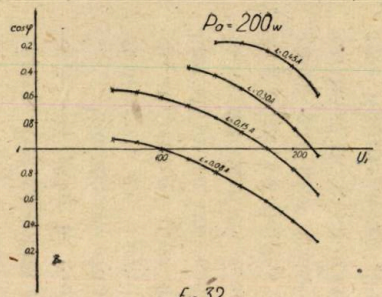


Fig. 32

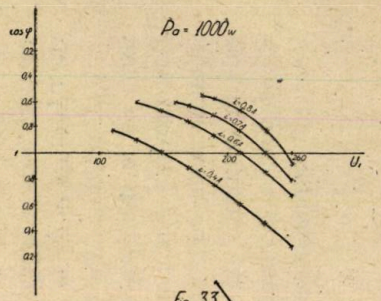


Fig. 33

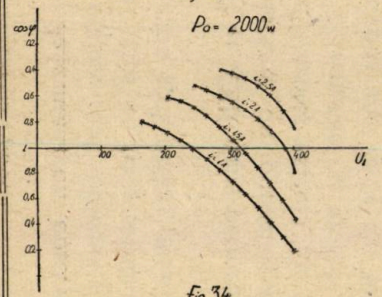


Fig. 34

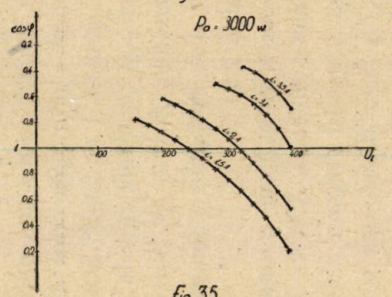


Fig. 35

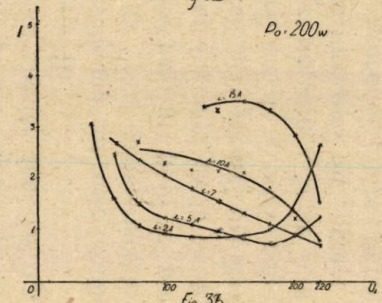


Fig. 36

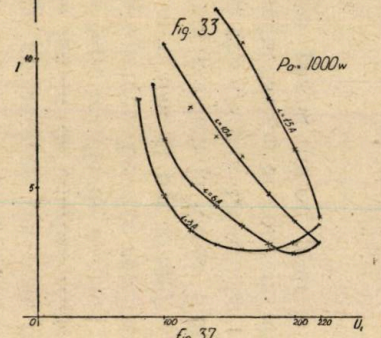


Fig. 37

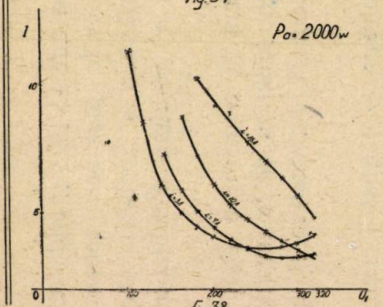


Fig. 38

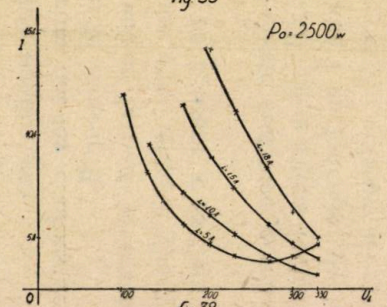


Fig. 39

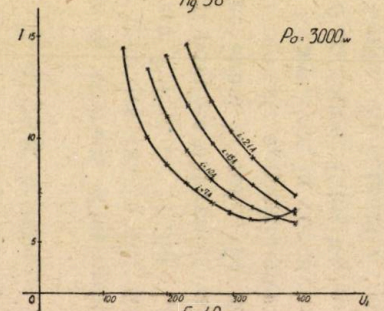


Fig. 40

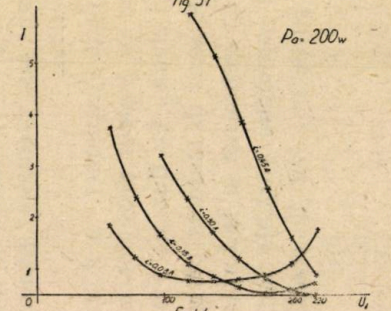


Fig. 41

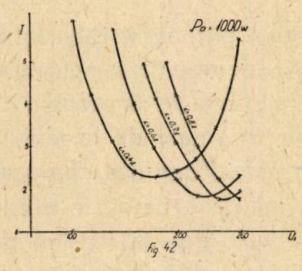
de la courbe, dû à la saturation du fer. Le flux du stator, à son tour, peut être représenté aussi par une courbe de magnétisation en fonction du courant I qui parcourt l'enroulement ou bien en fonction de la tension U_1 qui produit ce courant. Par le même raisonnement qu'auparavant on doit introduire un deuxième paramètre variable ; on devrait aboutir à une équation d'ordre supérieur ayant deux paramètres variables, qu'on peut supposer représentée par la famille de courbes de la fig. 36. (Nous avons choisi cette figure comme type parce qu'elle montre d'une façon plus prégnante l'évolution complète des courbes constituant cette famille).

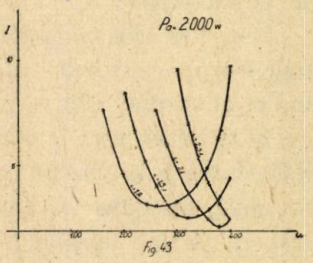
Nous essayerons maintenant une explication pour la famille des courbes représentée par la fig. 36.

Prenons les cas extrêmes où le courant d'excitation prend comme valeurs, la plus petite $i = 2\,A$ et la plus grande $i = 15A$.

Rappelons que pendant tout l'essai, la puissance P_a demandée sur l'arbre du moteur a gardée la même valeur.

Dans le cas où $i = 2\,A$, nous avons le plus petit flux produit par l'inducteur, qui d'ailleurs reste constant pendant l'expérience. La puissance P_a gardant la même valeur, quand on augmente la tension, le courant doit diminuer. La première partie de la courbe reçoit ainsi une explication. Si on continue d'augmenter la tension, nous arrivons à dépasser le coude de saturation et à partir de ce moment il faut un renforcement du flux produit par l'induit pour avoir les mêmes actions électro-magnétiques. Par conséquent, le flux inducteur restant le même, il apparait comme nécessaire d'agrandir le courant en même temps que la tension pour obtenir le flux nécessaire au maintien de la même puissance P_a sur l'arbre.





L'agrandissement du courant est d'autant plus nécessaire que le facteur de puissance dans ce cas diminue aussi (fig. 27).

On s'explique ainsi la partie ascendante de la courbe $i = 2\,A$.

Dans le cas où l'excitation est la plus forte, $i = 15\,A$, nous trouvons une courbe descendante. On peut l'expliquer par le fait que l'excitation, est très puissante cete fois-ci. Même avec une certaine saturation, le courant de l'induit diminue quand on augmente la tension, parce que dans l'ensemble on peut obtenir la puisance nécessaire. D'ail-

leurs le courant watté subit une diminution moins rapide que le cou-

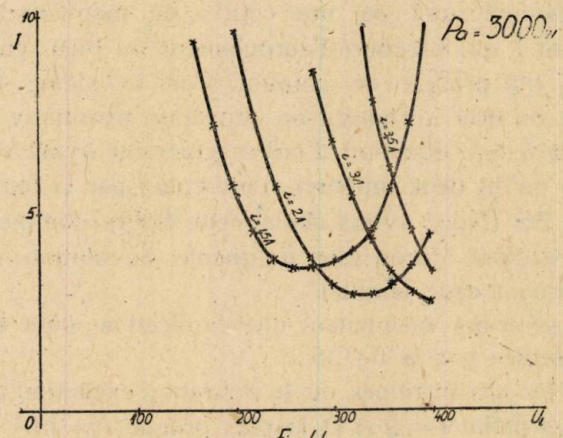


Fig. 44

rant I, parce que le facteur de puissance, dans ce cas, présente une certaine amélioration pour les tensions plus importantes.

25. *Conclusions.*

De l'exposé des études que nous avons entreprises pour éclaircir certaines questions concernant un moteur synchrone dont la puissance fournie sur l'arbre est maintenue constante on peut déduire les conclusions suivantes :

a) Par des considérations purement théoriques nous avons conclu que les pertes totales dans un moteur synchrone présentent un minimum pour une valeur particulière de la tension d'alimentation. Celle-ci est plus petite que la valeur normale de la tension pour des charges inférieures à la charge normale. Pour des charges plus grandes que la normale, ou dans les environs de celle-ci, le minimum des pertes correspond à une tension plus forte que la tension normale (§ 11).

b) Nous obtenons des conclusions inverses pour le rendement, qui présente à chaque charge un maximum pour une valeur déterminée de la tension d'alimentation, en général différente de la tension normale (§ 11).

c) Pour avoir le maximum d'économies dans une exploitation, il faudrait calculer le moteur considéré de manière que, pour la tension normale d'alimentation, il présente le rendement maximum pour la charge à laquelle il doit fonctionner la plupart du temps.

d) Au facteur de puissance constant, la force contre-électromotrice du moteur en fonction de la tension d'alimentation varie suivant une courbe présentant un minimum (§ 11).

e) Dans la même hypothèse qu'au point précédent, le courant total I décroît continuellement (§ 11).

f) Toujours avec le facteur de puissance constant, le courant d'excitation i présente un minimum en fonction de la tension U_1 (§ 11).

Les conclusions des points *a*, *b*, *d*, *e*, et *f* ont été prévues par théorie et verifiées par expérience (§§ 13-20).

g) Dans le cas du courant d'excitation *i* constant, le facteur de puissance prend les meilleures valeurs pour des tensions différentes de la valeur normale et qui varient avec la charge. La valeur maximum du facteur de puissance, pour une charge donnée, est obtenue pour des tensions d'autant plus grandes que le courant d'excitation est plus important (§ 23).

h) Le courant de l'induit I présente une variation particulière pour différentes tension U_1, quand le courant d'excitation prend différentes valeurs. On trouve que le courant I peut être représenté par une famille de courbes d'ordre supérieur à deux paramètres variables. La forme d'une de ces courbes, c'est-à-dire pour une valeur déterminée de *i*, peut s'expliquer par les propriétés du matériel magnétique en liaison avec el phénomène de saturation, en tenant compte que la puissance demandée sur l'arbre reste constante.

Notations

B_a	l'induction maximum dans le fer de l'armature en cm.
B_d	l'induction dans les dents.
B_{dmin}	la valeur minimum de l'induction dans les dents.
B_{eff}	la valeur efficace de l'induction.
B_m	la valeur moyenne de l'induction.
b	le développement polaire en cm.
b'	la largueur du conducteur avec isolement.
C	le couple du moteur.
C_{12}	les pertes dans les paliers.
C_{13}	les pertes par ventilation.
C_{14}	pertes mécaniques aux bagues qui alimentent le système inducteur.
D	le diamètre de la partie mobile en cm.
D_t	le diamètre du tourillon en cm.
E	la f. c. é. m. du moteur.
F	la surface des balais en cm^2.
f	la fréquence du système d'alimentation.
h	la hauteur des conducteurs en cm.
h_a	la hauteur radiale du fer de l'armature en cm.
I	le courant normal du moteur.
i	le courant d'excitation.

k le facteur de puissance.
k_1 le coefficient pour le calcul des pertes par hystérésis.
k_2 le coefficient d'isolement pour les tôles.
k_3 le facteur d'enroulement.
k_4 le facteur de forme.
k_5 coefficient qui varie avec la forme de la dent.
k_6 constante en relation avec la conductibilité électrique du fer et avec la manière dont ont été travaillées les tôles.
k_7 un coefficient analogue au coefficient k_2.
k_8 le rapport entre la résistance en courant alternatif et la résistance en courant continu.
$\sum_{\nu} \frac{k_\nu}{\sqrt{\nu}}$ est donnée dans des courbes en fonction de λ.
L la longueur de la même partie en cm.
l_a la longueur du moteur en cm.
l_t la longueur du tourillon qui frotte le coussinet.
m le nombre de phases.
m' le nombre de rangés de conducteurs dans une entaille.
N' le nombre des entailles.
N_b le nombre total des barres constituant l'amortisseur.
N_s le nombre de conducteurs par entaille.
n le nombre de tours par minute.
n' le nombre de conducteurs par rangée.
n_1 le nombre de spires par phase.
n_i le nombre de spires par champ double.
P_a, P_m la puissance fournie par le moteur sur l'arbre en watts.
P_{tot} la puissance demandée par le moteur.
P_1 la pression du balai en kg/cm^2.
$2p$ le nombre de pôles du moteur.
p_e les pertes électriques.
p_{ex} les pertes pour l'excitation.
p_F pertes par courants de Foucault dans l'armature et les dents.
p_H les pertes totales par hystérésis.
p_{Ha} les pertes par hystérésis dans l'armature.
p_{Hd} les pertes par hystérésis dans les dents.
p_{Jb} les pertes Joules aux bagues.
p_{sd} les pertes de surface dues à la présence des encoches.
p_{sh} les pertes de surface.
p_m les pertes mécaniques.
p_{mg} les pertes magnétiques.

p_t, p_{tot} les pertes totales.

q une constante qu'on trouve dans des courbes spéciales en fonction de $\frac{\delta}{\omega}$ ou $\frac{y}{\omega}$.

R la résistance par phase.

R_a la résistance de la bague de court-circuit le long d'un pôle.

R'_a la résistance pour le reste de la bague.

R_b la résistance de toutes les barres.

R_t la réluctance totale du circuit magnétique.

U_1 la tension étoilée d'alimentation par phase en volts.

u la tension d'excitation.

$2u$ le pas dentaire en cm.

u_1 l'ouverture de l'entaille.

u_{2max} la longueur maximum de la dent.

u'_{2max} la longueur de la dent dans la région de l'isthme.

u_{2min} la longueur minimum de la dent.

V_a le volume de l'armature en dm^3.

V_b la vitesse de la bague en m/sec.

V_d le volume des dents en dm^3.

V_t la vitesse périphérique du tourillon en m/sec.

v_a la vitesse périphérique en m/sec.

v_1 le coefficient de Hopkinson.

x la réactance synchrone par phase.

y le pas de l'enroulement mesuré sur la périphérie de l'induit en cm.

Z l'impédance.

Δ l'épaisseur de la tôle en mm.

δ l'entrefer en mm.

ε la chute de tension pour tous les balais.

η le rendement.

η_1 le rendement de d'excitatrice.

η_c le rendement calculé.

η_m le rendement mesuré

η_s le coefficient de Steinmetz.

θ_n nombre d'ampéres-conducteurs par entaille.

λ le rapport de $2u$ à δ.

μ le coefficient de frottement.

ν le numéro d'ordre des harmoniques.

ϱ la résistance spécifique en Ω $mm.^2/_m$.

Φ_a le flux total de la machine.

Φ_1 le flux produit par la circulation du courant.

Φ_i le flux produit par champ double de l'inducteur.
φ l'angle de décalage entre la tension et le courant.
ψ l'angle de decalage entre E et I.
ω le pas polaire en cm.

Laboratoire des Machines électriques
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 28 Novembre 1947).

Travaux cités

1) Cf. *Contribution à l'étude du rendement d'un moteur asynchrone*, Bull. I. R. E., 1938, p. 442–462.
2) Cf. *Contribution expérimentale à l'étude du rendement d'un moteur asyncrone*, Bull. Sec. Sci. Ac. Roum. t. XXVII, 1944, p. 8–24.
3) E. Arnold – *Die Wechselstromtechnick*, vol. IV. (Die synchronen Wechselstrommaschinen), J. Springer, Berlin, 1922, p. 480.
4) idem p. 482.
5) idem p. 85.
6) idem p. 72.
7) idem vol. III, p. 183.
8) Cf. *Leçons d'Electrotechnique générale*, Gauthier–Villars Paris, 1939, vol. II, p. 562.
9) E. Arnold – op. cit. vol. IV, p. 483.
10) idem p. 81.
11) idem p. 484 et 486.
12) R. Richter – *Elektrische Maschinen*, Julius Springer, Berlin, 1930, vol. II, p. 115.
13) idem p. 43.
14) idem p. 118.
15) idem vol. I, p. 217.
16) idem vol. I, p. 243 et 245.
17) C. Parteni – *Curs de Mașini electrice*, Litografia Politehnicii „Gh. Asachi" Iași, 1946, vol. II, p. 158 (Cours de Machines électriques).
18) A. E. Clayton – *The performance and design of direct current machines*, Isac Pitman, London, 1927 p. 226.
19) Richter – loc. cit. vol. I, p. 230.
20) Cesar Parteni Antoni et N. Boțan – *La variation de l'entrefer dans une machine à courant continu*, Bull. Sc. Sci. de l'Acad. Roum. t. XXV, 1943, p. 532.
21) J. Fallou loc. cit. vol. II, p. 537 (chapitre XIII).

621.313.37

LE QUADRIPOLE EN T-CIRCUIT EQUIVALENT DU MOTEUR MONOPHASE A REPULSION A DECALAGE DE BALAIS

par

ION S. GHEORGHIU

Il est d'usage de représenter une machine asynchrone ou synchrone par un quadripôle en T et un moteur-série alternatif à collecteur, par un dipôle.

Néanmoins, il n'y a que le moteur-série simple, c'est-à-dire le moteur-série à alimentation directe, qui peut être représenté par un dipôle.

Nous allons montrer que, moyennant certains artifices, les moteurs-série alternatifs à collecteur à alimentation indirecte, peuvent être représentés également par un quadripôle en T, et nous allons faire cette application sur un cas concret: celui du moteur monophasé à répulsion à décalage de balais.

L'alimentation indirecte est réalisée par un couplage électromagnétique entre le circuit statorique et le circuit rotorique en court-circuit (fig. 1). Mais ce couplage n'est pas le couplage ordinaire des transformateurs. Etant donné que l'axe de l'enroulement statorique ne coïncide plus avec l'axe de l'enroulement rotorique, mais ils sont décalés l'un par rapport à l'autre de l'angle β (décalage des balais), on ne peut plus parler d'un flux utile commun $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_1 + \overline{\Phi}_2$, le même dans le primaire et dans le secondaire.

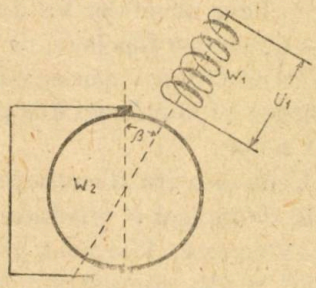


Fig. 1

Le flux résultant d'après la direction du stator, c'est-à-dire le flux utile dans le stator, diffère maintenant du flux utile d'après la direction du rotor, c'est-à-dire du flux utile dans le rotor.

La figure 2 qui est un *diagramme dans l'espace* des valeurs instantanées des flux et dans laquelle φ_1 est le flux du stator et φ_2 le flux

du rotor, nous montre que le flux résultant dens le stator, c'est-à-dire le flux utile du stator est :

$$\overline{\Phi}_s = \overline{\Phi}_1 + \overline{\Phi}_{2s}$$

et le flux utile du rotor est :

$$\overline{\Phi}_T = \overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_{1T}$$

où $\overline{\Phi}_s$, $\overline{\Phi}_T$, $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_2$, $\overline{\Phi}_{2s}$ et $\overline{\Phi}_{1T}$ sont des *vecteurs de temps.*

Nous ne pouvons donc plus écrire l'équation vectorielle de la composition des ampères-tours primaires et secondaires :

$$w_1 \overline{I}_1 + w_2 \overline{I}_2 = w_1 \overline{I}_\mu$$

qui traduit la loi de Kirchhoff appliquée au noeud du quadripôle en T.

Aussi ne pouvons-nous plus parler d'un quadripôle en T à la manière ordinaire.

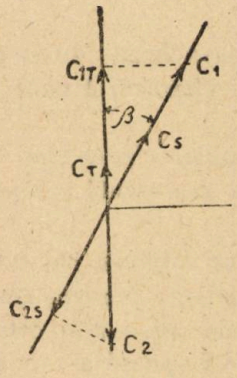


Fig. 2.

Nous pourrons toutefois établir un quadripôle en T pour le moteur à répulsion également, si nous appliquons la loi de la superposition des effets, en décomposant l'enroulement statorique w_1 en deux enroulements virtuels, un premier à w_1' spires d'après l'axe des balais et un deuxième à w_2'' spires, décalé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au premier dans le moteur bipolaire et de $\frac{\pi}{2p}$ dans le moteur multipolaire (fig. 3).

Les enroulements w_1 et w_2 constituent un transformateur usuel à flux commun unique (Φ_T).

Pour simplifier les figures et les formules, nous nous tiendrons au cas du moteur bipolaire, où les décalages électriques sont égaux aux décalages géométriques à la périphérie du stator.

Cette manière d'envisager la théorie du moteur à répulsion est d'ailleurs connue. Elle nous permet de nous rendre compte plus facilement du fonctionnement du moteur à répulsion à décalage de balais.

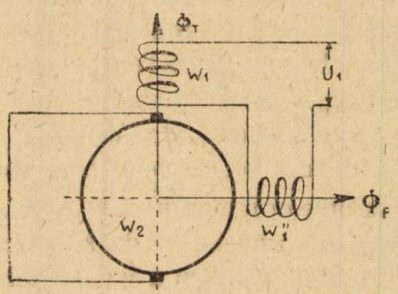


Fig. 3.

Nous allons partir de ce schéma virtuel du moteur (fig. 3), quoique plus compliqué que le schéma réel, pour établir les équations de fonctionnement du moteur et en déduire le quadripôle équivalent.

Nous avons $w_1' = w_1 \cos\beta$ et $w_1'' = w_1 \sin\beta$.

Notons par R_1 et X_{1s} la résistance et la réactance de fuites du primaire-stator, par X_1 et X_2 les réactances utiles des enroulements statorique (à w_1 spires) et rotorique (à w_2 spires) et par X_1' et X_1'' les réactances utiles des enroulements w_1' et w_2''. Nous avons évidemment :

$$X_1' = X_1 \cos^2\beta \quad \text{et} \quad X_1'' = X_1 \sin^2\beta.$$

Notons encore par $\bar{U}_1$ la tension du réseau (*tension appliquée*) par $\bar{I}_1$ et $\bar{I}_2$ les courants statorique et rotorique, par $\bar{\Phi}_F$ la flux produit par l'enroulement statorique w_1'', par $\bar{\Phi}_T$ le flux résultant ou commun du transformateur T, constitué par les enroulements w_1' et w_2 et par $\bar{I}_\mu$ le courant magnétisant de ce transformateur.

Notons encore par $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ les forces électromotrices primaire et secondaire du transformateur T, par $\bar{E}_{sa}$ la force électromotrice de self-inductance de l'enroulement statorique w_1'' et par $\bar{E}_r$ la force électromotrice de rotation engendrée par le flux $\bar{\Phi}_F$ entre les balais du rotor.

Ecrivons les équations du moteur en appliquant la loi d'Ohm dans les circuits primaire et secondaire :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \bar{U}_1 + \bar{E}_1 + \bar{E}_{sa} &= R_1 \bar{I}_1 + jX_{1s} \bar{I}_1 \\ \bar{E}_2 + \bar{E}_r &= R_2 \bar{I}_2 + jX_{2s} \bar{I}_2. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\bar{E}_1 = -jX_1' \bar{I}_\mu$$

et :

$$\bar{E}_{sa} = -jX_1'' \bar{I}_1$$

$$\bar{E}_2 = -j\left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi a} 10^{-8}\right) w_2 \omega \bar{\Phi}_T = -jk_2 w_2 \omega \bar{\Phi}_T =$$

$$= -jk_2 w_2 \omega \frac{4\pi}{10R} k_1 w_1' \bar{I}_\mu = -jk_2 w_2 \omega \frac{4\pi}{10R} k_1 w_1 \bar{I}_\mu \cos\beta =$$

$$= -j \frac{k_1 w_1}{k_2 w_2} \cdot \frac{4\pi}{10R} (k_2 w_2)^2 \omega \bar{I}_\mu \cos\beta.$$

Posons $\frac{k_2 w_2}{k_1 w_1} = k$, rapport de transformation du transformateur T et $\frac{4\pi}{10R} (k_2 w_2)^2 \omega = X_2$, réactance du rotor.

Nous avons alors : $\bar{E}_2 = -j \frac{X_2 \cos\beta}{k} \bar{I}_\mu$.

Nous avons également :

$$(2) \qquad \bar{E}_r = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi a} 10^{-8}\right) w_2 \omega_r \bar{\Phi}_F = k_2 w_2 \omega_r \frac{4\pi}{10R} k_1 w_1'' \bar{I}_1 =$$

$$= k_2 w_2 \frac{4\pi}{10R} \omega \frac{\omega_r}{\omega} k_1 w_1 \bar{I}_1 \sin\beta$$

$$= \frac{\mathcal{X}_2}{k} \frac{\omega_r}{\omega} \bar{I}_1 \sin\beta.$$

Posons : $\frac{\omega_r}{\omega} = v$, la variable proportionnelle à la vitesse du rotor.

Nous aurons alors : $\bar{E}_r = \frac{\mathcal{X}_2}{k} v \bar{I}_1 \sin\beta.$

Remplaçons $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ et $\bar{E}_r$ dans les équations (1) et (2) et nous aurons :

(3) $$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j\mathcal{X}_{1s} \bar{I}_1 + j\mathcal{X}_1'' \bar{I}_1 + j\mathcal{X}_1' \bar{I}_\mu$$

et

(4) $$\bar{E}_r = \frac{\mathcal{X}_2}{k} v \bar{I}_1 \sin\beta = R_2 \bar{I}_2 + j\mathcal{X}_{2s} \bar{I}_2 + j \frac{\mathcal{X}_2}{k} \bar{I}_\mu \cos\beta.$$

En multipliant les deux membres par $\frac{\cos\beta}{k}$, l'équation (4) devient:

$$\bar{E}_r = \frac{\mathcal{X}_2}{2k^2} v \bar{I}_1 \sin 2\beta = R_2 \frac{\cos\beta}{k_4} \bar{I}_2 + j\mathcal{X}_{2s} \frac{\cos\beta}{k} \bar{I}_2 + j \frac{\mathcal{X}_2}{k^2} \bar{I}_\mu \cos^2\beta.$$

Mais, comme :

$$\mathcal{X}_1 = \frac{4\pi}{10R} (k_1 w_1)^2 \omega$$

et

$$\mathcal{X}_2 = \frac{4\pi}{10R} (k_2 w_2)^2 \omega,$$

nous avons $\frac{\mathcal{X}_2}{\mathcal{X}_1} = k^2$. Donc $\frac{\mathcal{X}_2}{k^2} \cos^2\beta = \mathcal{X}_1'$.

Remplaçons $\frac{\mathcal{X}_2}{k^2} \cos^2\beta$ par $\mathcal{X}_1'$ et l'équation ci-dessus devient :

$$\bar{E}_r = \frac{\mathcal{X}_1}{2} v \bar{I}_1 \sin 2\beta = R_2 \frac{\cos\beta}{k} \bar{I}_2 + j\mathcal{X}_{2s} \frac{\cos\beta}{k} \bar{I}_2 + j\mathcal{X}_1' \bar{I}_\mu.$$

La composition des ampères-tours dans le transformateur T nous donne d'autre part :

$$k_1 w_1' \bar{I}_1 + k_2 w_2 \bar{I}_2 = k_1 w_1' \bar{I}_\mu.$$

D'où :

(5) $$\bar{I}_\mu = \bar{I}_1 + \frac{k\bar{I}_2}{\cos\beta} = \bar{I}_1 + k\bar{I}_2', \text{ si nous posons : } \frac{\bar{I}_2}{\cos\beta} = \bar{I}'_2.$$

En faisant apparaître $\bar{I}_2'$ dans l'équation (5) et en posant $R_2' = R_2 \cos^2\beta$ et $X_{2s} = X'_{2s}\cos^2\beta$, les équations (3) et (4) deviennent finalement :

$$\bar{U}_1 = R_1\bar{I}_1 + jX_1\bar{I}_{1s} + jX_1''\bar{I}_1 + jX_1'\bar{I}_\mu \tag{6}$$

et :

$$\bar{E}_r = \frac{X_2}{2} v\bar{I}_1 \sin 2\beta = \frac{R_2'}{k_2} k\bar{I}_2' + j\frac{X'_{2s}}{k^2} k\bar{I}_2' + jX_1'\bar{I}_\mu \tag{7}$$

avec :

$$\bar{I}_\mu = \bar{I}_1 + k\bar{I}_2'. \tag{8}$$

Les équations (6), (7) et (8) nous montrent que nous pouvons remplacer le moteur par un transformateur *ayant comme courant primaire le courant statorique* I_1, *comme courant secondaire un courant* $\bar{I}_2' = \frac{\bar{I}_2}{\cos\beta}$, ayant comme résistance du secondaire une résistance $R_2' = R_2\cos^2\beta$, comme réactance secondaire de fuites une réactance $X_{2s}' = X_{2s}\cos^2\beta$, avec en plus une réactance $X_1'' = X_1\sin^2\beta$, montée en série dans le circuit primaire et dont le secondaire alimenterait un récepteur de force électromotrice $\bar{E}_r = \frac{X_1}{2} v\bar{I}_1 \sin 2\beta$.

C'est comme si on appliquait aux bornes du secondaire de ce transformateur, une tension extérieure égale à $\frac{X_1}{2} v\bar{I}_1 \sin 2\beta$.

Le circuit équivalent de ce transformateur qui est un transformateur

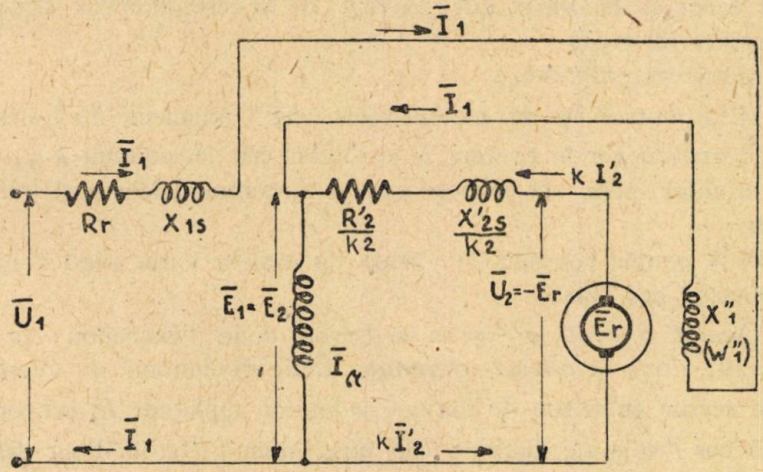


Fig. 4

ordinaire à flux utile commun dans le primaire et dans le secondaire est le quadripôle en T représenté dans la fig. 4.

Comme dans tout quadripôle en T, nous avons:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = -j X_1' \bar{I}_\mu = -j X_1' (\bar{I}_1 + k\bar{I}_2'),$$

X_1' étant la réactance du circuit primaire,
$k\bar{I}_2'$ le courant secondaire „ramené" au primaire,
$\frac{R_2}{k^2}$ la résistance secondaire „ramenée" au primaire et
$\frac{X_{2s}}{k^2}$ la réactance secondaire de fuites „ramenée" au primaire.

Comme la force électromotrice $\bar{E}_r$ est engendrée par le flux produit par l'enroulement d'excitation statorique w_1'', on peut imaginer que le récepteur branché aux bornes du secondaire *aurait comme inducteur la bobine* w_1'' *parcourue par le courant* $\bar{I}_1$.

Dans tout circuit équivalent d'un moteur électrique, on doit retrouver quelque part dans les circuits électriques, un récepteur dont la puissance absorbée représente la puissance utile fournie par le moteur à son arbre.

Dans notre cas, c'est justement le récepteur à force électromotrice $\bar{E}_r$, qui remplace virtuellement notre moteur et le fonctionnement duquel reproduira le fonctionnement du moteur réel.

L'établissement de ce quadripôle en T permet de nous rendre compte physiquement des principales propriétés du moteur à répulsion à décalage de balais, sans avoir recours aux développements analytiques longs et laborieux qui résultent de la résolution des équations vectorielles (6) et (7).

Voici ces propriétés:

1) Le moteur est un moteur-série, car l'inducteur du récepteur E_r est parcouru par le courant $\bar{I}_1$ et l'induit par le courant $k\bar{I}_2'$, qui à peu de chose près, est proportionnel à I_1 comme dans tout transformateur.

2) A couple constant, la vitesse du moteur varie avec l'angle β du décalage des balais.

Quand β *croît,* $w_1'' = w_1 \sin\beta$ croît, donc l'excitation du moteur croît, *donc la vitesse diminue.* Cette diminution de vitesse est encore accrue en raison du fait que la tension appliquée $\bar{E}_2$ proportionnelle à $\cos\beta$ et à $\bar{I}_\mu$, diminue elle aussi quand β croît. Pour des valeurs de β plus petites que 45^0, cette diminution devient tellement forte, que le moteur ne peut plus développer le couple qu'on lui demande.

Aussi n'emploie-t-on dans le fonctionnement de ces moteurs, que des décalages β supérieurs à 45^0.

Nous n'avons pas tenu compte dans ce raisonnement, de la résistance $\frac{R'_2}{k^2} = \frac{R_2 \cos^2\beta}{k^2}$ et de la réactance $\frac{X'_{2s}}{k^2} = \frac{X_{2s} \cos^2\beta}{k^2}$, les chutes de tension qui leur correspondent étant très petites par rapport à E_2.

3) Quand $\beta = 0$, nous avons $w_1'' = 0$, $\Phi_F = 0$ le moteur virtuel n'est pas excité et on lui applique la tension maximum.

Courant très grand, fonctionnement dangereux, le quadripôle équivaut à un transformateur avec le secondaire en court-circuit.

4) Quand $\beta = \frac{\pi}{2}$, nous avons $w_1' = 0$ et w_1'' maximum. Nous n'avons plus de transformateur, $I_2 = 0$, le couple est nul, $E_1 = E_2 = 0$.

Le quadripôle équivaut à une bobine d'induction.

Etant donné que la tension appliquée change de signe quand β passe par $\frac{\pi}{2}$, il s'ensuit que la position $\beta = \frac{\pi}{2}$ est la position de changement du sens de rotation du moteur.

5) La position $\beta = \frac{\pi}{2}$ est en même temps position de démarrage. Le décalage progressif des balais à partir de la position $\beta = \frac{\pi}{2}$ dans un sens ou dans l'autre, équivaut à une augmentation progressive et continue de la tension appliquée U_2, car E_2 est proportionnel à cos β, donc le démarrage par décalage des balais equivaut à un démarrage par variation continue de la tension appliquée.

6) Les lieux géométriques des extrémités des vecteurs $\bar{I}_1$ et $\bar{I}_2$, quand la vitesse du moteur, donc la variable v varie, sont, comme dans tout quadripôle en T, des cercles.

Comme toujours, lorsque la variable v ne figure que dans la puissance active débitée par la tension $\bar{U}_2$, la cercle passe par l'origine.

Etant donné que cette puissance active peut, dans notre cas, s'écrire : $\bar{U}_2 = (-\bar{E}_r) = R_v . \bar{I}_1$, c'est le cercle de $\bar{I}_1$ qui passera par l'origine. Le cercle de $\bar{I}_2$ est un cercle quelconque, ne passant pas par l'origine.

Pour chaque valeur de β nous avons un autre cercle. Donc une famille de cercles pour $\bar{I}_1$ et une autre pour $\bar{I}_2$. Le diamètre du cercle

diminue quand β augmente, parce qu'à vitesse constante, le couple, donc $\bar{I}_1$ et $\bar{I}_2$, diminuent quand β croît.

Comme pour tout transformateur, le cercle de $\bar{I}_1$ a son centre très rapproché de l'axe des imaginaires.

Comme pour tout cercle-lieu géométrique d'un quadripôle en T, la droite $v_\infty - v_0$ est la droite caractéristique des puissances utiles plus les pertes mécaniques.

Comme dans tout moteur-série, le couple n'est égal à zéro que pour une seule valeur de la vitesse, la vitesse infinie ; il s'ensuit que la droite caractéristique des couples utiles du moteur est la tangente au cercle de I_1, menée par l'origine des coordonnées, pour laquelle nous avons $v = \infty$.

Les distances à ces deux droites caractéristiques nous donnent à une échelle quelconque les valeurs de la puissance utile plus les pertes mécaniques et celles du couple utile.

La méthode des circuits équivalents a permis donc d'établir d'une manière rapide et suggestive, les principales propriétés du moteur monophasé à repulsion à décalage de balais.

Laboratoire de Machines Electriques
de l'Ecole Polytechnique
de Bucarest

(Reçu le 26 Octobre 1947)

MESURES MAGNETIQUES À JASSY DE 1941 À 1947

I. Déclinaison magnétique et composante horizontale

par

ȘT. PROCOPIU

Les mesures magnétiques que nous poursuivons depuis 1931 en Roumanie, ont été continuées à Jassy jusqu'en 1947.

Jassy a les coordonnées géographiques suivantes:

Longitude Est Greenwich	$27^0 32,$
Latitude Nord	$47^0 11,$
Altitude	140 m.

Les mesures de déclinaison et de composante horizontale ont été effectuées avec un appareil de la Maison Chasselon de Paris, dans le Jardin horticole „Adamachi", à environ 1,5 kilomètres loin de la ligne de tramway de Jassy. Dans les tableaux suivants sont portées les valeurs D_1 et D_2 de la déclinaison magnétique obtenues avec les deux aiguilles magnétiques, ainsi que D la valeur moyenne. Les valeurs pour plusieurs jours ont servi a déduire une valeur réduite, par des corrections, à la date de I.er Juillet de chaque année.

De même, pour la composante horizontale, on a porté dans les tableaux les deux valeurs H_1 et H_2 obtenues avec les deux barreaux magnétiques de l'appareil, et H la moyenne de ces deux valeurs. Puis on a calculé la valeur moyenne pour la date de I.er Juillet de chaque année.

Déclinaison magnétique. Les mesures de déclinaison étaient faites entre $8^h 30^m$ et $10^h 30^m$, heure locale.

		D_1	D_2	D
1941,	28 Août	$1^0 25,8$	$1^0 22$	$1^0 23,9$ Est
	29 „	1 25,5	1 23,7	1 24,6
	30 „	1 27	1 23,5	1 25,3
	30 Septembre	1 26,6	1 22,3	1 24,5
	2 Octobre	1 24,8	1 21,5	1 23,1.

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET * MŰEGYETEM *

Les déterminations du 30 Septembre et 2 Octobre ont été faites pendant que la ville de Jassy était privée de courant électrique. On constate par ces valeurs de D que l'influence du réseau électrique et de la ligne de tramway sur ces déterminations est négligeable. La ligne de tramway la plus proche de l'endroit des mesures est à environ 1,5 km. La moyenne de ces trois déterminations est $D = 1^0 24{,}6$. Si l'on tient compte de la variation annuelle, $dD = 5'$, on calcule:

Jassy, 1941,5 $D = 1^0 23{,}7'$ *Est.*

1942,	7 Juillet	$D_1 = 1^0 28{,}9$	$D_2 = 1^0 25{,}1$	$D = 1^0 27'$ Est
	8 „	1 28,5	1 27,5	1 28
	9 „	1 31,4	1 29,2	1 30,3
	10 „	1 30,5	1 28,7	1 29,6.

La moyenne de ces quatre déterminations donne

Jassy, 1942,5 $D = 1^0 28{,}6'$ *Est.*

1943,	22 Juillet	$D_1 = 1^0 33{,}6$	$D_2 = 1^0 31{,}8$	$D = 1^0 32{,}8^0$ Est
	23 „	1 34,8	1 32,6	1 33,7
	26 „	1 33,3	1 31,7	1 32,5
	27 „	1 33,6	1 32,2	1 33.

La moyenne de ces déterminations donne

Jassy, 1943,5 $D = 1^0 32{,}8^0$ *Est.*

1945,	29 Août	$D_1 = 1^0 43{,}7$	$D_2 = 1^0 42{,}1$	$D = 1^0 42{,}4'$ Est
	30 „	1 42,3	1 41,3	1 41,8
	31 „	1 42,5	1 41,1	1 41,8
	1 Septembre	1 44,9	1 42,8	1 43,8.

La moyenne de ces déterminations, valable pour le 1 Septembre 1945 est $D = 1^0 42{,}4'$ Est; et si on tient compte des variations séculaires on calcule

Jassy, 1945,5 $D = 1^0 41{,}7'$ *Est.*

1946,	16 Juillet	$D_1 = 1^0 52{,}7$	$D_2 = 1^0 50{,}1$	$D = 1^0 51{,}4^0$ Est
	17 „	1 46,6	1 44,3	1 45,4
	18 „	1 53,4	1 50,9	1 52,1
	19 „	1 54,3	1 53,7	1 54.

La moyenne de ces déterminations donne

Jassy, 1946,5 $D = 1^0 50{,}7$ *Est.*

1947,	6 Août	$D_1 = 2^0 1{,}3$	$D_2 = 2^0 0$	$D = 2^0 0{,}6'$ Est
	7 „	1 56,5	1 53,6	1 55
	8 „	1 55,6	1 55,7	$1^0 55{,}6$
	11 „	1 52,2	1 51,3	1 51,7 .

La moyenne de ces déterminations est $D = 1^0 55{,}7'$ et la valeur réduite à la date de 1er Juillet est

Jassy, 1947,5 $D = 1^0 55{,}3'$ *Est.*

Composante Horizontale. Les mesures de composante horizontale ont été faites entre $10^h\ 30^m$ et $11^h\ 30^m$.

		H_1	H_2	H
1941, 28	Août	0,21280	0,21301	0,21291
29	„	0,21310	0,21314	0,21312
30	„	0,21334	0,21318	0,21326
30	Septembre	0,21332	0,21358	0,21345
2	Octobre	0,21285	0,21338	0,21312

La mesure du 28 Août n'a pas été utilisée pour la moyenne, parce que la valeur de H ce jour-ci est anormale, elle est trop faible, alors que la valeur de I à la même date est trop grande.

La moyenne est

Jassy, 1941,5 $H = 0{,}21324$ *c. g. s.*

		H_1	H_2	H
1942, 7	Juillet	0,21344	0,21424	0,21384
8	„	0,21328	0,21358	0,21343
9	„	0,21286	0,21366	0,21326
10	„	0,21328	0,21379	0,21353

La moyenne pour les déterminations du 8, 9 et 10 Juillet donne

Jassy, 1942,5 $H = 0{,}21340$ *c. g. s.*

On constate d'après cette valeur que la variation séculaire de H a changé de sens, elle est devenue positive, alors que la variation de l'inclinaison I a changé elle aussi de sens, elle est devenue négative. D'ailleurs H et I varient à l'envers l'un de l'autre. Par suite, la valeur anormale de la composante horizontale n'est pas due à une erreur de mesure, mais bien au phénomène lui-même.

Malheureusement, les valeurs de H_1 et H_2 diffèrent trop l'une de l'autre ; aussi il faudra déterminer de nouveau les constantes de l'appareil, lorsque les événements le permettrons.

		H_1	H_2	H
1943, 22	Juillet	0,21296	0,21343	0,21320
23	„	0,21304	0,21356	0,21330
26	„	0,21312	0,21369	0,21341
27	„	0,21325	0,21360	0,21342

La moyenne de ces quatre déterminations est

Jassy, 1943,5 $H = 0{,}21333$.

1945, 29	Août	$H_1 = 0{,}21310$	$H_2 = 0{,}21357$	$H = 0{,}21333$
30	„	0,21305	0,21383	0,21344
31	„	0,21305	0,21366	0,21335
1	Septembre	0,21290	0,21335	0,31313

On calcule comme moyenne:

Jassy, 1945,5 $H = 0{,}21331$.

1946, 17	Juillet	$H_1 = 0{,}21297$	$H_2 = 0{,}21321$	$H = 0{,}21309$
18	„	0,21294	0,21348	0,21321
19	„	0,21246	0,21284	0,21265.

On calcule comme moyenne:

Jass·, 1946,5 $H = 0{,}21299$.

1947, 6	Août	$H_1 = 0{,}21282$	$H_2 = 0{,}21298$	$H = 0{,}21290$
7	„	0,21280	0,21320	0,21300
8	„	0,21285	0,21324	0,21304
11	„	0,21286	0,21307	0,21297.

On calcule comme moyenne:

Jassy, 1947,5 $H = 0{,}21297$.

Laboratoire d'Electricité
Université de Jassy

(Reçu le 20 Octobre 1947)

MESURES MAGNÉTIQUES A JASSY, DE 1941 A 1947

II. Inclinaison magnétique

par

N. CALINICENCO

Les mesures de l'inclinaison magnétique ont été effectuées avec la Boussole d'inclinaison modèle moyen de la Maison Chasselon, Paris, No. 167. Elles ont été faites – comme dans les années précédentes – au Champ Horticole „V. Adamachi" de Copou [1] (Jassy), pendant tous les ans consécutifs :1941–1947, sauf pour 1944.

Les mesures on été faites avec aiguilles magnétique et on a trouvé deux valeurs I_1 et I_2, dont on a pris la moyenne I. La différence des valeurs de l'inclinaison magnétiques données par les deux aiguilles aimantées a toujours le même signe, donc il y a une erreur systématique.

Cette erreur systématique a été diminuée par l'utilisation de la correction indiquée par le constructeur. La comparaison avec la Station Magnétique du Val Joyeux, 1932 (Ebré), nous donne :

Aiguille No. 1, correction $= +5',8$

Aiguille No. 2, corection $= -0',9$.

Les heures des mesures ont été de 9^h à 11^h.

Dans les tableaux suivants sont portées les valeurs de l'inclinaison magnétique I_1 et I_2, après avoir appliquée les corrections précédentes, et dans une dernière colonne la valeur $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$.

La première colonne contient les dates des mesures. En bas de chaque tableau est donnée la moyenne qui est considérée comme valeur pour le 1 Juillet de chaque année, en tenant compte que l'inclinaison augmente d'environ 2',4 annuellement.

---

1) N. Calinicenco, Ann. Sc. Univ. Jassy, t. XXVI, (I), Fasc. 2, p. 572, 1940.

Jassy, 1941,

28 Août,	$I_1 = 63^0 40',1$	$I_2 = 63^0 42',7$	$I = 63^0 41,4$
29 „	63 01 ,4	63 05 ,6	63 03,5
30 „	62 55 ,0	63 04 ,3	62 59,6

Si on élimine les valeurs du 28 Août, ce jour étant probablement un jour d'anomalie, on aura comme moyenne des valeurs du 29 et 30 Août ; après l'avoir réduite au 1 Juillet :

Jassy, 1-er Juilles 1941, $I = 63^0 01',1$.

Jassy, 1942,

7 Juillet,	$I_1 = 62^0 59',6$	$I_2 = 63^0 03',1$	$I = 63^0 01',4$
8 „	62 57 ,4	63 02 ,2	62 59 ,8
9 „	62 56 ,8	63 05 ,1	63 01 ,0
10 „	63 04 ,3	63 0 ,7	63 02 ,5.

La moyenne : Jassy, 1-er Juillet 1942, $I = 63^0 01',2$

Jassy, 1943,

22 Juillet,	$I_1 = 63^0 05',6$	$I_2 = 63^0 11',5$	$I = 63^0 08',5$
23 „	63 18 ,4	63 06 ,0	63 12 ,2
26 „	62 57 ,3	63 08 ,6	63 03 ,0
27 „	63 06 ,8	63 05 ,6	63 06 ,2

La moyenne : Jassy, 1-er Juillet 1943, $I = 63^0 07,'5$.

Jassy, 1945,

29 Août,	$I_1 = 63^0 20,'5$	$I_2 = 63^0 09,'7$	$I = 63^0 15,'1$
30 „	63 18,1	63 11,8	63 15
31 „	63 11,6	63 16	63 13,8
1 Septembre	63 19,7	63 11	63 15,3

La moyenne : Jassy, 1-er Juillet 1945, $I = 63^0 14,'5$.

Jassy, 1946,

16 Juillet,	$I_1 = 63^0 14,'3$	$I_2 = 63^0 05,'3$	$I = 63^0 09,'8$
17 „	63 27,5	63 19,8	63 23,6
18 „	63 21,3	63 13	63 17,1
19 „	63 20,5	63 15,5	63 18

La moyenne : Jassy, 1-er Juillet 1946, $I = 63^0 17'$.

Jassy, 1947,

6 Août,	$I_1 = 63^0 35,'3$	$I_2 = 63^0 10'$	$I = 63^0 22,'6$
7 „	63 16,8	63 12	63 14,4
8 „	63 19,8	63 19,7	63 19,8
11 „	63 17,8	63 11,6	63 14,7.

La moyenne: Jassy, 1-er Juillet 1947, $I = 63^0 17,'7$.

Laborafoire d'Electricité
Universifé de Jassy

(Reçu le 20 Octobre 1947)

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE DE MESURE DES COEFFICIENTS DE FROTTEMENT

par

VIRGILIU G. GHEORGHIU

Les dispositifs expérimentaux de mesure des coefficients de frottement sont très peu nombreux, quoique le problème a été posé depuis longtemps par Coulomb, qui a cherché le premier à étudier d'une manière plus systématique et rigoureuse les phénomènes du frottement entre les surfaces des différents solides en contact, en déduisant les lois bien-connues [1]).

On connaît ainsi le dispositif employé par Coulomb, le „tribomètre", un appareil qui permet la mesure des coefficients de frottement au glissement des différentes surfaces planes chargées, sur une surface horizontale. Une autre méthode est aussi celle du plan incliné.

Mais, les méthodes indiquées ne permettent pas une mesure concomittante de deux coefficients de frottement, ou la mesure par comparaison d'un coefficient, l'autre étant supposé connu. Aussi, il est assez difficile de varier dans de assez grandes limites les conditions des expériences, en ce qui concerne la nature des surfaces et les forces en présence.

Dans ce qui suit nous présentons une méthode que nous proposons pour la mesure des coefficients de frottement au glissement des solides, et qui permet de satisfaire à ces deux conditions,

On fait emploi à ce but d'un dispositif expérimental, qui est représenté dans la fig. 1.

Il est constitué par un cadre rigide $ABCD$, ayant une fente médiane longitudinale et de largeur convenable. Sur la portion horizon-

---

1) H. Geiger u. K. Scheel, *Handbuch der Physik* Bd. 5, p. 484 et suiv., Verlag J. Springer, Berlin, 1927.

W. Wien u. F. Harms, *Handbuch der Experimentalphysik* Bd. 2, p. 264 et suiv., Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H, Leipzig, 1926.

tale BC du cadre peut rouler un système mobile constitué par deux cylindres de rayon R. Les génératrices des cylindres de rayon R qui viennent en contact avec la surface plane d'une pièce à étudier (placée sur la portion GH du cadre), sont projétés dans le point E, et l'axe du système mobile dans le point O de la figure.

Une autre pièce $L\,M$, repose sur une génératrice du cylindre de rayon r, par la surface plane inférieure à étudier. La pièce $L\,M$ peut être fixée au but de la barre droite et rigide $I\,J$, terminée par un cadre plat JJ_1 qui retient la pièce $L\,M$. Cette barre $I\,J$ peut être fixée dans une position horizontale à l'aide d'un vis de calage articulé Q_1, qui peut coulisser le long de la fente de la portion $A\,B$ du cadre. Q_1 est placé dans un point B_1 tel que la barre $I\,J$ soit parallèle à la portion horizontale $B\,C$ du cadre rigide $A\,B\,C\,D$.

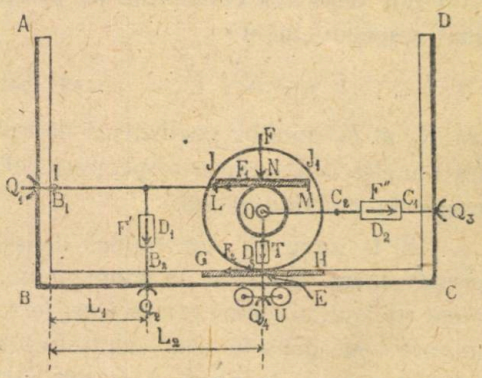


Fig. 1.

Le système mobile, constitué par les deux cylindres de rayon R et par le cylindre intermédiaire de rayon r, peut être construit d'une seule pièce, ou mieux des pièces, qui permettent le changement facile de la nature des surfaces et les rayons r et R des cylindres du système mobile. Les pièces ayant les surfaces à étudier LM et GH peuvent encore être changées facilement.

Pour déterminer les coefficients de frottement, on commence par placer le système mobile dans une position déterminée, sur la surface à étudier placée en GH, telle que par ex. $BE = L_2$. On tend ensuite avec une force convenable F' le dynamomètre D_1, á l'aide d'un vis Q_2 calé à une distance arbitraire $B\,B_2 = L_1$, et qui développe une force F en N. Les forces F et F' sont perpendiculaires sur $B\,C$, et F passe par l'axe et la ligne d'appui du système mobile, qui se projètent sur la fig. 1 respectivement en O et E.

Le système mobile peut être sollicité par une force F'', développée dans le dynamomètre D_2 à l'aide d'un vis de tension Q_3, qui peut être placé le long de la fente de la portion $C\,D$ du cadre rigide, dans un point convenable C_1 tel que $O\,C_1$ soit parallèle à $B\,C$. Cette force est transmise au système mobile à l'aide d'un cadre rigide, projeté en $O\,C_2$, sur la fig. et attaché aux extremités de l'axe du système mobile, où se développe un frottement négligeable. On emploie à ce but

par ex. des galets à biles de roulement, pour l'attache du cadre OC_2 à l'axe du système mobile.

Considérons comme d'habitude, que les forces de frottement au roulement sont négligeables par rapport aux forces de frottement au glissement, F'_1 et F'_2, respectivement entre les surfaces à étudier : LM et le cylindre de rayon r, et aussi GH et le cylindre de rayon R. On voit que dans ces conditions, les forces de frottement qui interviennent, sont respectivement :

(1) $F'_1 = K'_1 F$ et (2) $F'_2 = K'_2(F+P)$

où K_1' et K_2' sont les coefficients de frottement initial au glissement, entre les couples des surfaces respectives mentionnées plus haut, et P est le poids du système mobile.

Si la force F'' développée dans le dynamomètre D_2 augmente progressivement, il arrive un moment quand le système se met en mouvement roulant en même temps dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire, selon que le moment de F'_1 par rapport à l'axe du système mobile (projeté en O) est plus petit ou plus grand que celui de F'_2, l'axe du système mobile restant toujours perpendiculaire au plan de la figure, par raisons de symétrie.

On comprend facilement, que pour des valeurs convenables de r et R, sous l'action de la force développée dans le dynamomètre D_2, le système mobile se met en mouvement, en glissant, sans se produire en même temps un roulement dans un sens ou dans l'autre. Dans ces conditions, la résultante des forces de frottement F'_1 et F'_2 est appliquée sur l'axe du système mobile, et à égale distance de ses extremités.

On peut ajouter alors aux relations (1) et (2) aussi :

(3) $F_1' r = F_2' R$ ou (4) $K_1' F r = K_2' (F+P) R.$

Si on peut négliger P par rapport à F on aura :

(5) $K_1' r = K_2' R$ une relation très simple qui permet de calculer un des coefficients de frottement, l'autre étant supposé connu.

Mais on peut toujours utiliser (4) et aussi la relation simultanée :

(6) $F'' = F_1' + F_2'$ existante entre les forces considérées au moment du départ, ce qui permet de calculer F_1' et F_2', et par suite K_1' et K_2'. On a ainsi :

(7) $\frac{F_1'}{R} = \frac{F_2'}{r}$ et encore (8) $\frac{K_1' F}{R} = \frac{K_2'(F+P)}{r} = \frac{F''}{R+r}$

ce qui donne immédiatement :

(9) $K_1' = \dfrac{F''R}{F(R+r)}$ et (10) $K_2' = \dfrac{F''r}{(F+P)(R+r)}$

F peut être calculé en fonction de F' (la force développée dans le dynamomètre D_1), en écrivant l'égalité des moments de ces deux forces par rapport au point B_1 :

(11) $F' L_1 = F L_2$. En portant la valeur de F tiré de (11) dans (9) et (10) on obtient en définitif :

(12) $K_1' = \dfrac{F'' L_2 R}{F' L_1 (R+r)}$ et (13) $K_2' = \dfrac{F'' r}{\left(\dfrac{F' L_1}{L_2} + P\right)(R+r)}$

relations qui permettent de calculer les coefficients de frottement au glissement K_1' et K_2' en fonction des données expérimentales.

Si l'on peut négliger P par rapport à F, la relation (13) devient

(14) $K_2' = \dfrac{F'' L_2 r}{F' L_1 (R+r)}$ qui est semblable à (12).

Il est à remarquer que (4) montre la relation qui doit exister entre K_1', K_2', R, r, F, et P, pour que le système mobile se met en mouvement en glissant et sans tourner autour de son axe. Elle peut être écrite encore :

(15) $(K_1' r - K_2' R) F = K_2' R P$ qui pour P négligeable par rapport à F se réduit à la relation (3) déjà établie.

La relation (15) montre aussi, que pour réaliser la condition de glissement sans roulement du système mobile, il n'est pas nécessaire de varier R ou r. On peut, en effet, régler F en développant une force F' dans le dynamomètre D_1, telle que la relation (15) soit satisfaite. On aura ainsi :

(16) $F = \dfrac{K_2' R P}{K_1' r - K_2' R} = \dfrac{P}{\left(\dfrac{K_1' r}{K_2' R} - 1\right)} = \dfrac{F' L_1}{L_2}$ et (17) $F' = \dfrac{P L_2}{\left(\dfrac{K_1' r}{K_2' R} - 1\right) L_1}$

relation qui donne la valeur que doit avoir la force F' développée dans le dynamomètre D_1 en fonction du poids du système mobile, pour que celui-ci se met en mouvement sous l'action d'une force convenable F'', en glissant sans rouler.

On voit que F' augmente avec P et aussi quand le rapport $\dfrac{K_1' r}{K_2 R}$ diminue en valeur absolue, en restant toujours plus grand que 1. On doit donc avoir $K_1' r > K_2' R$ ou

(18) $$\frac{K_1'}{K_2'} > \frac{R}{r}.$$

Il faudra donc dans la pratique s'arranger pour que cette condition soit satisfaite, ce q'on réalise très facilement, en choisissant convenablement la nature des surfaces à étudier : GH, LM, celles des cylindres de rayons r et R, ainsi que, si'il est nécessaire, les valeurs numériques de ces rayons. On a ainsi la possibilité de mesurer simultanément deux coefficients de frottement de deux couples de surfaces différentes, qui dépendent de la nature des surfaces planes LM et GH, et des surfaces des cylindres de rayons r et R, dans les régions où les cylindres viennent en contact avec les surfaces planes LM et GH.

On peut multiplier les possibilités de mesure d'un même système mobile, en constituant les surfaces latérales des cylindres de rayons R et r, par des secteurs de natures différentes, et ayant des angles au centre suffisamment grands, pour les nécessités des expériences.

La relation (16) montre, que pour un système mobile de poids P et de rayons r et R déterminés, on a une seule valeur F donné par l'expérience en fonction de F', pour chaque couple de surfaces, et par suite de coefficients K_1' et K_2'.

Pour multiplier les possibilités expérimentales aussi à ce point de vue, une solution serrait d'employer un système mobile vide à l'intérieur, et d'introduire des quantités différentes d'un liquide de poids spécifique suffisamment élevé, par ex. le mercure. On obtient ainsi des valeurs différentes pour le poids P du système mobile, ce qui permet de faire plusieures déterminations expérimentales sur un même couple de coefficients K_1' et K_2'. Ce procédé peut être employé avec avantage quand il s'agit de développer de petites forces de frottement, par exemple pour des expériences de laboratoire.

Pour pouvoir varier dans de plus grandes limites les conditions expérimentales en ce qui concerne la valeur de la force F (donnée par la relation (16) qui correspond au glissement sans roulement du système mobile, et pour des couples donnés des surfaces à étudier, une solution plus complète est de produire des différentes valeurs d'une tension T, appliquée sur l'axe du système mobile et dirigée vers le bas, perpendiculaire en E sur la portion BC du cadre rigide. Cette tension T peut être développée à l'aide d'un dynamomètre D_3 qui est attaché, d'une part, aux extrémités de l'axe du système mobile par l'intermédiaire d'un cadre rigide et avec un frottement négligeable, en employant par ex. des galets à billes de roulement. L'autre extremité du dynamomètre D_3 est fixée à un vis de tension Q_4 qui peut se déplacer le long de

la fente de la portion CD du cadre sans frottement notable, à l'aide d'un petit chariot U monté par ex. sur roulements à billes. Le vis à tension Q_4, ainsi que le chariot U que le supporte, sont entraînés dans le mouvement du système mobile produit par la force F'' qui est développée dans le dynamomètre D_2.

Le frottement de roulement du chariot sur la partie inférieure de la portion BC du cadre est rendu négligeable en utilisant un matériel très dur et poli pour la confection des roues du chariot et aussi pour la surface inférieure de la portion BC du cadre, sur laquelle roule le chariot.

Dans ces conditions, les relations (12), (13), (16) et (17) deviendront respectivement :

$$(19) \qquad K_1' = \frac{F'' L_2 R}{F' L_1 (R+r)} \qquad (20) \qquad K_2' = \frac{F'' r}{\left(\frac{F' L_1}{L_2} + P + T\right)(R+r)}$$

$$(21) \qquad F = \frac{P+T}{\frac{K_1' r}{K_2' R} - 1} = \frac{F' L_1}{L_2} \quad \text{et} \quad (22) \qquad F' = \frac{(P+T)\, L_2}{\left(\frac{K_1' r}{K_2' R} - 1\right) L_1}.$$

Ces relations montrent, que pour des couples de surfaces déterminées, et des valeurs L_1, L_2, R et r données, à chaque valeur expérimentale arbitraire prise pour T, on obtiendra des valeurs expérimentales correspondantes pour F' et F'' dans les conditions admises, (quand le système mobile glisse sans rouler, et par suite la relation (22) est satisfaite). Ces valeurs expérimentales de F' et de F'' introduites dans (19) et (20) donneront des valeurs correspondantes pour K_1' et K_2'.

Il est intéressant de voir ce qui se passe dans le cas que le système mobile est constitué d'un seul cylindre de rayon R. Dans ce cas, en posant $r = R$, les relations : (19) — (22) deviennent respectivement :

$$(23) \qquad K_1' = \frac{F'' L_2}{2F' L_1} \qquad (24) \qquad K_2' = \frac{F''}{2\left(\frac{F' L_1}{L_2} + P + T\right)}$$

$$(25) \qquad F = \frac{P+T}{\frac{K_1'}{K_2'} - 1} = \frac{F' L_1}{L_2} \quad \text{et} \quad (26) \qquad F' = \frac{(P+T)\, L_2}{\left(\frac{K_1'}{K_2'} - 1\right) L_1}.$$

Il est donc nécessaire, dans ce cas, que : $K_2' > K_1'$, ce qu'on peut toujours réaliser par les conditions expérimentales.

Avantages de la méthode. De ce qu'on a montré plus haut, on déduit que cette méthode de mesure des coefficients de frottement au

glissement entre diverses surfaces des solides, présente plusieurs avantages, tels que :

1. Possibilité de faire des mesures concomittantes des coefficients de frottement de deux couples de surfaces en présence, et qu'on peut changer facilement.

2. Possibilité de varier dans des grandes limites les forces qui pressent les surfaces étudiées l'une contre l'autre, et par suite aussi les forces de frottement.

3. La méthode serait employée avec avantage aussi dans l'étude des certains problèmes posés par la traction mécanique.

Laborafoire de Physique de Météorologie
Faculté d'Agronomie
Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 22 Novembre 1947).

VALEURS DES ELEMENTS MAGNETIQUES ET DES VARIATIONS SECULAIRES A JASSY, PENDANT 16 ANS, DE 1931 À 1947.

Variation du magnétisme terrestre en Roumanie de 1772 à 1947

par

STÊFAN PROCOPIU

Depuis 1931 j'ai institué des mesures de magnétisme terrestre à Jassy. Les mesures étaiént faites dans le Jardin horticole „Ădamachi", Copou, à un endroit de coordonnées : Longitude Est Greenwich $27^0\ 32' = 27{,}53$; Latitude Nord $47^0\ 11' = 47{,}18$. La déclinaison magnétique D et la composante horizontale H ont été mesurées par moi avec un théodolite magnétique Chasselon, et l'inclinaison magnétique I, généralement par N. Calinicenco, avec une boussole d'inclinaison Chasselon, sauf la mesure de 1931 qui a été faite par Gh. Vasiliu avec une vielle boussole Secrétan, et sauf les mesures de l'inclinaison de 1938 qui ont été faites par N. Florescu. Les mesures étaient faites le mois de Juillet ou d'Août chaque année. Ces mesures effectuées pendant 16 ans permettent de déterminer les variations séculaires annuelles dD, dH, dI, des éléments magnétiques.

Connaissant les valeurs mesurées des éléments H et I, on peut calculer la composante verticale Z et la force magnétique totale F par les formules

$$Z = H \operatorname{tg} I \quad ; \quad F = \frac{H}{\cos I} .$$

1. Dans le premier tableau suivant sont portées les valeurs de la déclinaison D, la composante horizontale H et l'inclinaison I, pour le 1-er Juillet de chaque année, de 1931 à 1947, aussi bien que les variations séculaires annuelles dD, dH, dI.

Dans le tableau II suivant sont portées les valeurs des autres élé-

ments magnétiques, la composante verticale Z et la force magnétique totale F, calculées par les formules précédentes.

La mesure de I de l'année 1931 a été mise entre paranthèses, parce que l'appareil avec lequel on a fait cette mesure ne comportait pas une précision suffisante. Les valeurs calculées de Z et de F pour l'année 1931 ont été aussi mises entre paranthèses, leur valeur étant peu précise.

TABLEAU I

Eléments magnétiques mesurés à Jassy, 1931 - 1947.
Déclinaison megnétique D, composante horizontale H, inclinaison I, et leurs variations annuelle, dD, dH et dI.

Année	*D*	*dD*	*H*	*dH.10⁵*	*I*	*dI*
1931,5	0°23,6	Est —	0,21438	—	(62°10′)	—
1932,5	0 34,2	+10′,6	21432	— 6	62 38,9	—
1933,5	0 38,2	4,0	21424	— 8	62 45,3	+ 6,4
1934,5	0 46,1	7,9	21415	— 9	62 48,4	+ 3,1
1935,5	0 53,4	7,3	21397	—18	62 48,5	+ 0,1
1936,5	1 01,1	7,7	21396	— 1	62 55,6	+ 7,1
1937,5	1 04,3	3,2	21389	— 7	62 51,7	— 3,9
1938,5	1 10,4	6,1	21377	— 12	63 02,3	+10,6
1939,5	1 13,5	3,1	21369	— 8	62 54,7	— 7,6
1940,5	1 18,7	5,2	21355	—14	62 58,1	+ 3,4
1941,5	1 23,7	5,0	21323	—32	63 01,1	+ 3,0
1942,5	1 28,6	4,9	21340	+17	63 01,2	+ 0.1
1943,5	1 32,8	4,2	21333	— 7	63 07,5	+ 6,3
1944,5	—	4,5	—	— 1	—	+ 3,5
1945,5	1 41,7	4,5	21331	— 1	63 14,5	+ 3,5
1946,5	1 50,7	9,0	21299	—32	63 17,	+ 2,5
1947,5	1 55,3	4,6	21297	— 2	63 17,7	+ 0,7

On constate par l'analyse de ces deux tableaux que la déclinaison magnétique D, qui est orientale à Jassy, augmente annuellement ; l'inclinaison augmente elle aussi. La composante horizontale H diminue, alors que la composante verticale Z et la force totale F augmentent annuellement.

Ces trois forces sont données en unités c. g. s. ou gauss, mais nous les donnerons aussi en unités gammas, $1\gamma = 0{,}00001$ c. g. s.

La variation annuelle dH a été donnée en unités gammas.

TABLEAU II

Eléments magnétiques calculés à Jassy.

Composante horizontale Z et force magnétique totale F.

Année	*Z*	*F*
1931,5	(0,40603)	(0,45915)
1932,5	0,41434	0,46648
1933,5	41606	46798
1934,5	41681	46861
1935,5	41648	46824
1936,5	41859	47010
1937,5	41729	46892
1938,5	42023	47148
1939,5	41779	46911
1940,5	41854	46987
1941,5	41883	46996
1942,5	41918	47037
1943,5	42096	47192
1944,5	—	—
1945,5	42304	47377
1946,5	42317	47375
1947,5	42335	47390

La variation de ces éléments, pour un intervalle de 11 années, correspondant à un cycle undécennal du soleil, de 1936,5 à 1947,5, est représentée par les différences:

$$\Delta D = +54{,}2\ ;\ \Delta H = -0{,}00099\ ;\ \Delta I = +22',1\ ;$$
$$\Delta Z = +0{,}00476\ ;\ \Delta F = +0{,}00380.$$

De ces différences on calcule les variations séculaires annuelles moyennes pour cet intervale de 11 années, *Jassy, 1936,5 à 1947,5*:

$$dD = +4{,}93'$$
$$dI = +2{,}01'$$
$$dH = -0{,}00009 \text{ ou } 9 \text{ gammas}$$
$$dZ = +0{,}00043 \text{ ou } 43 \text{ gammas}$$
$$dF = +0{,}00034 \text{ ou } 34 \text{ gammas.}$$

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

2. *Valeurs des éléments magnétiques à Bucarest.*

A Bucarest-Otopeni nous avons fait des mesures magnétiques en 1936. Les mesures de déclinaison et de composante horizontale ont été faites par moi, celles d'inclinaison ont été faites par N. Florescu. Les valeurs obtenues sont:

Bucarest, Long. E. Greenw. 26°05' Lat. N. 44°34'

1936,5 $D = 0°21,5$ Est ; $H = 0,22684$; $I = 60°41'$.

Si l'on admet que la variation des éléments magnétiques à Jassy pour la durée 1936,5 — 1947,5 est valable également pour Bucarest dans la même durée de temps, alors on pourra calculer la valeur des éléments magnétiques pour Bucarest à la date de 1947,5:

Bucarest, 1947,5

$D = 1°15,7'$ Est ; $H = 0,22583$ c. g. s. ; $I = 61°03,1'$;
$Z = 0,40831$ c. g. s. ; $F = 0,46661$ c. g. s.

3. *Comparaison des valeurs trouvées par nous à Jassy, avec celles calculées par les Tables du „Department of Terrestrial Magnetism, Carnegie Institution of Washington" de 1946.*

Récemment, en Octobre 1946, est parue une publication de la Carnegie Institution de Washington: „Final values of elements of geomagnetic field at 5-degre intervals of latitude and longitude, epoch 1944" by L. Laporte, C. Cooper, I. Lange, W. Hendrix, and E. H. Vestine, en 73 pages.

Dans cette publication, les valeurs des éléments magnétiques pour Jassy, de longitude Est Greenwich 27°,53 et latitude Nord 47°, 18, se trouvent dans les Tables entre 25 et 30° longitude Est et 50 et 45° latitude Nord, et on les calculera de ces Tables par interpolation.

Dans le Tableau suivant, III, sont portées les valeurs calculées par les Tables, à coté des valeurs observés par nous à Jassy, en 1945, aussi bien que les variations séculaires pour 1942,5, calculées par les Tables et celles observées par nous.

TABLEAU III

Eléments magnétiques à Jassy, époque 1945.

	Tables	Valeurs observées
Déclinaison D	2°,10	1°,65
Inclinaison I	63°,4	63°,2
Composante horizontale H	0,213	0,213
Composante verticale Z	0,421	0,423
Force magn. totale F	0,471	0,473.

Variations séculaires annuelles Jassy, 1942,5, moyennes

	Tables	Observées
dD	6′	4,9′
dI	2′,4	2′
dH	— 1 gamma	— 9 gammas
dZ	+78 „	+43 „
dF	+73 „	+34 „

On constate par l'analyse de ce tableau que les valeurs calculées par les Tables de la Carnegie Institution ne correspondent pas à celles mesurées directement par nous dans le cas de la déclinaison magnétique et encore pour les variations séculaires annuelles de la déclinaison, des composantes horizontales *dH*, verticale *dZ* et celles de la force magnétique totale *dF*. Il résulte que les Tables de la Carnegie Institution doivent être revisées dans cette région de l'Europe, 20,30° longitude E et 50-40° latitude Nord, pour la déclinaison et pour les variations séculaires.

4. Variation du magnétisme à Bucarest et à Jassy, de 1772 à 1947 et représentation graphique.

On connaît des données sur les éléments du magnétisme terrestre à Bucarest depuis 1772, et à Jassy depuis 1828.

Toutes les données connues sont arrangées dans le tableau suivant. Ces valeurs nous serviront pour tracer les courbes de la variation séculaire de la déclinaison et de l'inclinaison depuis la plus ancienne date, 1772, jusqu'à l'époque actuelle, 1947.

La déclinaison magnétique à Bucarest était occidentale avant 1772, et semble avoir passé par un maximum de 13°50′ West vers 1798; elle a diminué continuellement depuis lors et a passé par la valeur zéro vers 1932, devenant orientale; et elle croît depuis, avec une vitesse d'environ 5 minutes par an.

Les observations de déclinaison à Jassy sont de date plus récente; la déclinaison était occidentale avant 1828, elle a passée par zéro en 1927 et depuis lors elle est devenue orientale et croît d'environ 5′ par an.

Si l'on admet que le cycle de 470 ans d'une oscillation complète de la déclinaison, constaté pour Paris (valeurs extrêmes 9° Est en 1580 et 22,5° West en 1814), et pour Londres (valeurs extrêmes 11° Est en 1580 et 24,5° West en 1816), est valable aussi pour le reste de l'Europe, alors on peut s'attendre à un demi-cycle de 235 ans pour Bucarest, s'étendant entre le maximum 13°50′ West constaté en 1798 et un maximum de 8°30′ Est qu'on va probablement constater vers l'an

Bucarest, Long. Est Greenw. 26°6'. Lat. N. 44°25'. *)

Epoque	Déclinaison	Composante horiz.	Inclinaison	Auteur
1772	— 11°36'5 West	—	—	I. Islenieff
1798	— 13 50 W. maximum	—	—	St. Hepites calc.
1829	— 11 14 W	—	—	F. G. W. Struve
1850	— 9 3,3 W	0,22440	60°14'	Kreil, calc.
1858,6	— 7 55,4 W	0,22638	59 51,5	Kreil
1893,5	— 5	0,233	59 5	D. Negreanu
1898,5	— 4 31,8 W	0,23302	58 51	St. Hepites et I. Murat
1899,0	— 4 22,4 W	0,23309	58 48	" "
1900,0	— 4 19	0,23319	58 47	" "
1901,0	— 4 12,7	0,23330	58 46	" "
1906,0	— 3 47,2 W	0,23420	58 38,5	" " calc.
1936,5	+ 0 21.5 Est	0,22684	60 41	St. Procopiu et N. Florescu
1947,5	+ 1 15,5 Est	0,22585	61 03.1	St. Procopiu, calc.

2035. Dans ces conditions l'amplitude de la variation de la déclinaison entre ces deux limites, à Bucarest sera de 22,5°, alors qu'à Paris elle a été de 32° et à Londres de 35°. Ces amplitudes correspondent à des variations séculaires annuelles moyennes de 5' pour Bucarest, de 8,2' pour Paris et de 8,8' pour Londres, dans un intervalle de temps de 235 ans.

La composante horizontale *H* à Bucarest et à Jassy, a passé par un maximum aux environs des années 1901 à 1906, comme je l'ai constaté, après avoir fait les mesures de 1936 à Bucarest et celles de 1931 à 1947 à Jassy. Depuis lors la composante horizontale diminue d'environ 9 gammas par an.[1]) L'inclinaison *I*, au contraire, a passé à la même époque par un minimum, et depuis lors elle croit de 2 minutes par an.

Les variations séculaires de la déclinaison et de l'inclinaison à Bucarest et à Jassy, pour la durée 1772 à 1947, peuvent être représentées par la Figure 1, dans un diagramme préconisé par L. A.

*) Dans ces tableaux les valeurs occidentales de la déclinaison ont été marqués du signe —, et les valeurs orientales du signe +, de sorte que les variations séculares prennent toujours le signe +, pendant tout l'intervalle de 1772 jusqu'à présent.

Jassy, Longitude Est Greenw. 27°32'. Lat. N. 47°11'.

Epoque	Déclinaison *D*	Composante horiz. *H*	Inclinaison *I*	Auteur
1828,5	— 11°50' West	—	—	Struve
1846	— 9 30 W	—	—	T. Stamati
1854	— 9	—	—	D. Asachi
1894,5	— 4	0,223	61°30'	D. Negreanu
1898,5	— 3 38,2 W	0,22259	60 53,8	St. Hepites et I. Murat
1901,0	— 3 28,9 W	0,2236	60 53,8	„ „
1906,0	— 3 3,4 W	0,2245	60 46,3	„ „ calc.
1931,5	+ 0 23,6' Est	0,21438	62 10	St. Procopiu et Gh. Vasiliu
1932,5	+ 0 34,2 Est	0,21432	62 38,9	St. Procopiu et N. Calinicenco
1947,5	+ 1 55,3 Est	0,21297	63 17,7	„ „

Bauer. Les courbes figurent le déplacement de l'extrémité d'une aiguille aimantée suspendue et pouvant tourner librement dans toutes les directions dans l'espace, projetée sur un plan tangent à la sphère décrite par l'extrémité de l'aiguille. La position de l'aiguille ainsi montée va montrer par le mouvement de son extrèmité les variations séculaires dans les deux plans horizontal et vertical. Les deux courbes montrent que le déplacement de l'aiguille aimantée a eu lieu sur une surface conique dans le sens indiqué par les flèches, dans le sens des aiguilles d'une montre. Cela correspond come direction et comme grandeur à la courbe similaire décrite par Londres, entre 1580 et 1935 [2]). La courbe pour Londres montre un maximum de l'nclinaison en 1723 et paraît indiquer un minimum vers 1935, c'est-à-dire une demie-oscillation de l'inclinaison, analogue à celle de la déclinaison, et de même durée.

5. Propagation du minimum de l'inclinaison de l'Est vers l'Ouest.

Le minimum de l'nclinaison qui a eu lieu entre 1901 et 1906 à Bucarest et à Jassy, s'est propagé vers l'ouest, et il paraît que ce minimum a atteint Val-Joyeux et Greenwich en 1915 ou en 1925. Le deplacement du minimum de l'inclinaison et du maximum de la composante horizontale qui est arrivé en même temps, s'est effectué pendant une durée d'environ 20 ans de l'orient de l'Europe à l'occident de l'Europe. Mais il parait, d'après les listes des Observatoires publiées

par J. A. Fleming [3]), que ce déplacement ne se continue pas au delà de l'Europe.

Un déplacement analogue parait avoir existé pour le maximum de la déclinaison en 1800 : la déclinaison a passé par un maximum de valeur occidentale en 1798 à Bucarest, et ce maximum est arrivé en 1814 à Paris et en 1816 à Londres. Cette petite oscillation de l'orient à l'occident de 20 ans environ ne parait pas s'être continuée au delà de l'Europe.

Dernièrement, j'ai pris connaissance d'une constatation analogue sur la propagation du minimum de l'inclinaison de l'Est vers l'Ouest, faite par Angot [4]), en 1923, à l'Observatoire de Paris. „Il faut toutefois remarquer, d'après Angot, que l'inclinaison a recommencé à augmenter à Paris en 1919 ; il est donc possible que le minimum indiqué soit limité aux stations du Nord et de l'Est de l'Europe".

D'après la liste publiée par L. Eblé [5]), et contenant les valeurs moyennes des éléments magnétiques obtenues au Val-Joyeux, de 1901 à

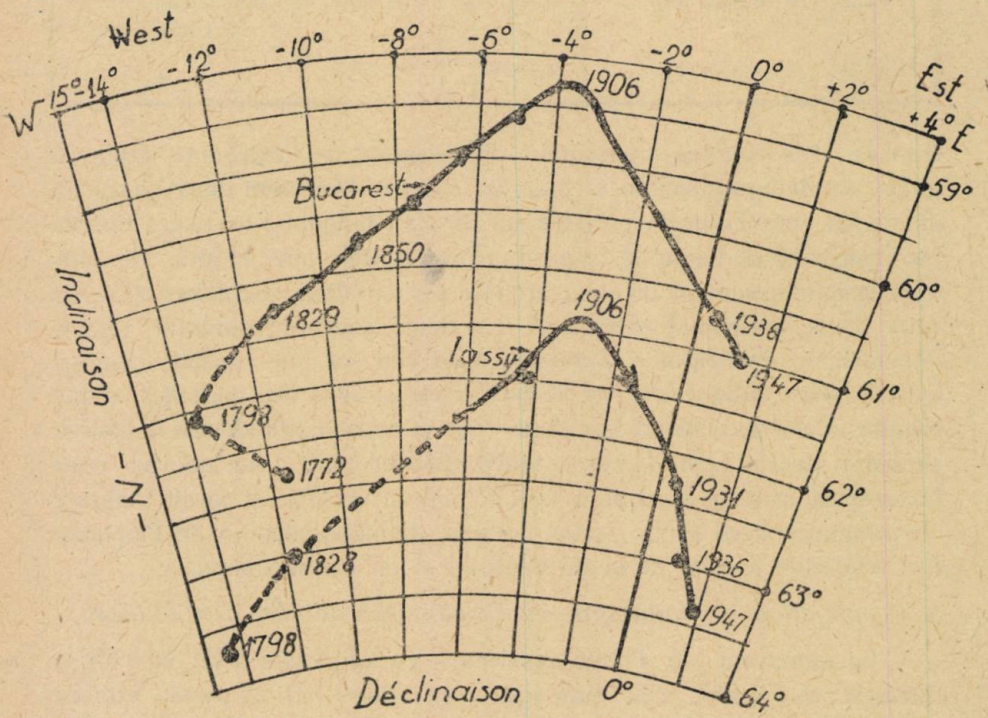


Fig. 1

1937, on constate que l'inclinaison à Paris, a eu un premier minimum en 1915, un second minimum en 1925, et depuis lors elle est presque stationnaire jusqu'en 1936. La composante horizontale à Paris a un

maximum en 1907, puis un autre en 1912, elle a diminué jusqu'en 1930, et à présent elle augmente très lentement.

Il est possible que le minimum de l'inclinaison et le maximum de la composante horizontale, soient composés de plusieurs minimums secondaires. Nous n'avons pas la possibilité de contrôler ces oscillations secondaires autour du minimum à Bucarest et à Jassy, parceque nous ne possédons que les valeurs de 1901 et puis celles de 1931 ; et si des minimums secondaires ont eu lieu, ils se sont produit aux environs de 1905 ou 1910.

6. *Variations séculaires annuelles.*

Pour tracer les courbes de la figure précédente j'ai utilisé les variations séculaires annuelles pour Bucarest et Jassy. Avec les valeurs de ces variations, j'ai calculé les valeurs de l'inclinaison, pour les années pour lesquelles on n'avait pas des mesures directes. La représentation graphique a été faite en traits ponctués, entre les points pour lesquels la valeur de l'inclinaison est seulement calculée.

Les variations séculaires annuelles sont

Bucarest	*Intervalle*	*dD*	*dI*	*dH*
	1829—1858	+ 6,5′	—	—
	1858—1901	+ 5,1′	— 1,5′	+ 17 γ
	1901—1936	+ 7,7	+ 3,2	— 18 γ
Jassy				
	1828—1901	+ 6,8′	—	—
	1901—1936	+ 7,6′	+ 3,4′	— 27 γ
	1936—1947	+ 4,9′	+ 2′	— 9 γ

7. *Variation de l'intensité du champ magnétique terrestre à Jassy de 1932 à 1947.*

La variation séculaire de l'intensité du champ magnétique terrestre a été étudiée dans son ensemble par L. A. Bauer, qui a trouvé que cette intensité décroît d'une manière continuelle depuis 1843, date la plus ancienne pour laquelle on possède des mesures, jusqu'en 1922.

Il est intéressant d'étudier la variation de cette intensité dans les stations où on possède des mesures régulières pendant une période plus longue. C'est ce que j'essaie de faire pour Jassy. où l'on possède une série de mesures depuis 1931 à 1947. Pour cela nous allons calculer la quantité G que L. A. Bauer appelle „constante magnétique locale" et qui est définie par l'expression

$$G = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} Z^2} = \sqrt{H^2 \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 I\right)}$$

H est la composante horizontale et Z la composante verticale de l'intensité du champ terrestre en un même point, I est l'inclinaison magnétique. La valeur de G représente le moment magnétique M du Globe considéré uniformément aimanté, par la relation $M = GR^3$, où R est le rayon terrestre.

La valeur moyenne de G est de 0,33, mais pour les différents points du Globe, les valeurs de G sont différentes, et d'autant plus petites que la latitude du point est plus grande.

La valeur de G décroît en fonction du temps, avec une variation annuelle moyenne de $\frac{1}{1520}$ de sa valeur.

En utilisant les 15 années d'observations à Jassy, de 1932 à 1947 j'ai calculé l'expression de G. La plus grande erreur dans l'estimation de G provient de l'erreur faite sur l'inclinaison magnétique I, qui a été mesurée avec une bussole d'inclinaison et non pas avec un inclinomètre d'induction. A cause de la mesure imprécise sur I, j'ai éliminé la valeur de G pour 1931. J'ai calculé encore la valeur de G pour l'année 1898 à Jassy, et pour les années 1898, 1900, 1901, à Bucarest, pour les quelles ou possède de bonnes mesures de H et I, faites par Hepites et Murat.

Voici le Tableau des valeurs de G, la valeur de l'intensité du champ magnétique, à Jassy et à Bucarest.

Jassy

Année	G en u.c.g.s.	Année	G
1932	1,29800	1940	0,29900
1933	0,29862	1941	29887
1934	29881	1942	29911
1935	29862	1943	29960
1936	29930	—	—
1937	29880	1945	30040
1938	29970	1946	30022
1939	29883	1947	30027
		1898	0,29980

Bucarest

Année	G
1898	0,30243
1900	0,30231
1901	0,30237

Bucarest - Otopeni

Année	G
1936	0,30368

De l'examen de ces tableaux on constate que la valeur de l'intensité du champ magnétique terrestre G, à Jassy, croît nettement, dans l'intervalle de 1932 à 1947. La variation annuelle moyenne de G dans cet intervalle est

$$\Delta G = + \frac{0{,}00227}{15} = + 0{,}00015 \text{ c. g. s.} = + 15 \text{ gammas},$$

c'est-à-dire l'amplitude de la variation annuelle de la quantité G est d'environ $+ 15$ gammas. Cette variation positive annuelle représente environ

$$\frac{15}{30.000} = \frac{1}{2000} \text{ de la valeur du champ uniforme terreste.}$$

Il est intéressant à remarquer que cette variation relative, positive trouvée à Jassy, est du même ordre de grandeur que la variation relative négative, trouvée pour l'ensemble du globe par L. A. Bauer, et qui est $-\frac{1}{1520}$.

La valeur de G à Jassy, pour 1898, fait supposer que l'intensité du champ a diminué d'abord, jusqu'à un minimum, et à présent elle croît.

Les valeurs de G pour Bucarest sont en trop petit nombre pour déduire autre chose, que le fait que G à Bucarest est plus grand qu'à Jassy.

La variation positive de G à Jassy, en ce moment, paraît indiquer que la décroîssance de l'intensité du champ terrestre, n'est pas continuelle, comme l'admet L. A. Bauer, mais qu'elle est peut-être cyclique comme pour les autres éléments magnétiques, la déclinaison, l'inclinaison, pour lesquels on connaît un demi-cycle d'environ 235 ans.

La constatation que la quantité G pour certaines stations croît, après avoir diminué, et que cette variation relative positive est du même ordre de grandeur que la variation relative négative de l'ensemble du Globe, montrent que la quantité G subit des variations cycliques.

8. La variation de la quantité G dépend de la variation de H et de celle de I.

Considérons l'expression de la constante de l'intensité du champ magnétique terrestre G

$$G^2 = H^2 + \frac{1}{4} Z^2 = H^2 \left(1 + \frac{1}{4} tg^2\, I \right). \tag{1}$$

Les variations dG, dH et dI sont reliées par la différentielle de l'expression précédente:

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$2GdG = 2H\left(1+\frac{1}{4}tg^2 I\right)dH+\frac{1}{2}H^2\ tg\,I\frac{1}{\cos^2 I}dI.$$

d'où on a

$$dG=\sqrt{1+\frac{1}{4}tg^2 I}\,dH+\frac{H\,tg\,I}{4\cos^2 I\sqrt{1+\frac{1}{4}tg^2 I}}dI.$$

Avec les valeurs, valables à Jassy, $G=0{,}30000$; $H=0{,}21$; $I=63^0$; $tg\,I=1{,}96$; $tg^2 I=3{,}85$; $\cos^2 I=0{,}16$, cette relation différentielle devient

$$dG=1{,}39\ dH+0{,}45\ dI \tag{2}$$

dans laquelle G et H sont données en gauss et I en radians.

Or, $1' = \frac{1}{3437}$ radian $= 3.10^{-4} = 30.10^{-5}$ radian.

Par suite, si dH est donné en unités gammas ($1\gamma = 10^5$ *c. g. s.*) et dI en minutes, on aura G en unités gammas, suivant

$$dG=1{,}39\ dH+13{,}5\ dI. \tag{3}$$

Cette relation (3) peut servir dans deux buts: à déduire l'erreur introduite dans le calcul de G, par les erreurs sur H et I; et en second lieu, à calculer la variation annuelle de G lorsqu'on connaît les variations de H et I, et à estimer l'importance de l'une de ces variations pour la détermination du signe de la variation de G.

Une erreur de 9γ commise sur la valeur de H est équivalente, d'après (3), à une erreur de 1 minute commise sur la valeur de I. Or, les mesures d'inclinaison sont les moins précises, l'erreur sur I décide de la précision du resultat sur G.

La plus forte variation dans la valeur de G provient de la variation de l'inclinaison, et comme les mesures d'inclinaison sont moins susceptibles d'une grande précision, il faut se méfier de la valeur du résultat pour la variation de G.

La relation (3) montre que si on a $dH=-9$ gammas et $dI=+1$ minute, la variation dG serait égale à zéro. A Jassy les variations annuelles moyennes sont: $dH=-9$ gammas et $dI=+2$ minutes. Il résulte pour la variation de G une valeur positive, l'intensité du champ magnétique terrestre à Jassy croît de

$$dG=+15 \text{ gammas}$$

annuellement; valeur que nous avons déjà trouvée précédemment.

Il résulte donc, que *la variation de l'intensité G du champ*

terrestre est plus simplement représentée par une relation différentielle, et que le signe de cette variation est décidé plûtot par la variation de l'inclinaison magnétique.

Les variations de sens contraire de dH et dI paraissent montrer que la variation dG est zéro.

D'ailleurs on connaît que dans le cas des variations journalières des éléments magnétiques, lorsqu'il y a une augmentation de la valeur de l'inclinaison I, il y a en même temps une diminution de la composante horizontale de H. L'explication se trouve si l'on admet que l'intensité G du champ magnétique terrestre ne varie pas, et que la variation dG est zéro, indiquée, comme possible, par la relation (3).

9. *Résumé.* 1^0 Les mesures des éléments magnétiques D, H, I, à Jassy pour l'intervalle 1931 à 1947 et le calcul des élléments Z et F, nous ont permis d'établir les variations séculaires annuelles, dD, dH, dI, dZ, et dF.

2^0 Les variations séculaires trouvées par nous ont été comparées à celles données par les Tables de la Carnegie Institution pour 1946.

3^0 Les éléments magnétiques à Bucarest et Jassy, connues de 1772 à 1947, ont permis d'établir une Carte de la variation séculaire du magnétisme terrestre en ces deux stations. Les courbes établies mettent en évidence le maximum de la déclinaison vers 1798 et le minimum de l'inclinaison vers 1905.

4^0. La propagation du minimum de l'inclinaison et le maximum de la composante horizontale, en 1905, de l'Est vers l'Ouest, possède peut-être la même vitesse que le phénomène analogue arrivé pour la déclinaison en 1800 en Europe. Cette propagation est accompagnée probablement d'oscillations secondaires.

5^0. L'intensité du champ magnétique terrestre, caractérisée par la quantité G, constante magnétique locale, croît à Jassy, de 1932 à 1947. La variation positive de cette intensité est de l'ordre de 1/2000 de la valeur du champ terrestre. J'ai donnée une expression différentielle plus simple pour la calculation de la variation de G.

Laboratoire d'Electricité
Université de Jassy

(Reçu le 27 Décembre 1947).

Travaux cités

1) St. Procopiu, *Déterminations des éléments magnétiques en Roumanie et Cartes magnétiques pour le 1-er Juillet 1934.* Annales scient. Univ. Jassy, t. 21, 1935, 270 - 302. *Mesures magn. en Roumanie*

de 1931 à 1940 et Cartes magnétiques. Ann. scient. Univ. Jassy. t. 26, 1940, p. 535 - 562.

2) J. A. Fleming, *Terrestrial Magnetism and Electricity.* Mc. Graw Hill. New-York et London, 1939.p, 16.

3) J. A. Fleming, *Latest annual values of the magnetic elements at Observatories.* Terrestrial Magnetism and atmospheric Electr. 1930 vol. 35, p. 165 - 177.

J. A. Fleming et C. C. Ennis, *Transactions of Edinbourgh Meeting.* Association of Terrestrial Magnetism and Electricity Copenhagen 1937.

4) A. Angot, - *Les variations périodiques du magnétisme terrestre.* Annales de l'Institut de physique du Globe de l'Univ. de Paris, t. I, 1923. p. 250-298.

5) L. Eblé, - Annales de l'Inst. de phys. du Globe de l'Univ. Paris, t. 16, 1938, p. 1.

621.317.351

DETERMINATION DE LA POSITION D'UNE SOURCE SONORE MOBILE OU FIXE A L'AIDE DE L'OSCILLOGRAPHE

par

GÉRARD D'ALBON

Nous avons la possibilité naturelle de nous rendre compte de la direction d'une source sonore et approximativement aussi de la distance. On présume que le mécanisme est le suivant :

Le son émis par la source arrive aux deux oreilles à des temps différents ; la différence de phase des sons perçus qui en résulte est traduite par la sensation de direction.

Une source située dans n'importe quel point d'une hyperbole, donnerait ainsi toujours l'impression d'être située dans la même direction, c'est-à-dire sur une droite. En réalité les vibrations des os frontaux nous aident à distinguer entre les branches de l'hyperbole d'en face et de l'arrière, et pour les distances grandes par rapport à la distance des oreilles, l'hyperbole se confond avec l'asymptote, de sorte que l'impression expliquée par ce mécanisme peut être juste.

Les appareils d'écoute habituels sont formés par deux écouteurs reliés chacun avec l'une des oreilles. Tout le système peut tourner autour d'un axe jusqu'à ce que l'observateur ait l'impression que le son émis est à l'arrière. Dans ce cas les sons perçus par les oreilles sont en phase et la source est sur l'axe de symétrie de l'appareil.

La sensibilité de cette méthode est de beaucoup plus grande que celle des oreilles, parce que la distance des écouteurs peut être de beaucoup plus grande que celle des oreilles, et parce qu'il y a proportionnalité entre la sensibilité et cette distance.

Pour une détermination sont nécessaires deux observations faites de deux points différents. Par cette méthode on ne peut pas déterminer la positon d'une source sonore de très courte durée d'émission, ni celle d'une source animée d'une très grande vitesse apparente, de plus, elle est subjective, étant basée sur l'impression de l'observateur.

Dans ce qui suit on va décrire un appareil qui réalise une mé-

thode ne se basant sur aucune impression subjective et qui reproduise le mécanisme naturel de l'ouïe.

Dans trois points A, B et C, dont les positions sont soigneusement déterminées, sont placés trois microphones en connexion avec les trois équipages d'un oscillographe Blondel. Dans un point O, situé dans le plan des microphones, se trouve la source sonore. Les trois oscillographes sont impressionnés par les courants reçus des microphones à des moments différents. Les trois valeurs des retards sur le moment de l'émission sont respectivement :

$$T_A = \frac{\overline{OA}}{V}, \quad T_B = \frac{\overline{OB}}{V}, \quad T_C = \frac{\overline{OC}}{V}.$$

Dans cette relation $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ sont les distances inconnues de la source aux trois microphones, et V la vitesse du son.

Si nous connaissons la vitesse V, nous pouvons calculer les différences $\overline{OA} = \overline{OB}$ et $\overline{OA} = \overline{OC}$, car l'oscillographe nous donne les différences $T_A - T_B$ et $T_A - T_C$. La différence $T_B - T_C$ ne peut être considérée une donnée indépendante, parce qu'elle peut être calculée des deux premières.

Les différences $\overline{OA} - \overline{OB}$ et $\overline{OA} - \overline{OC}$ étant connues, on peut écrire les équations de deux hyperboles, sur lesquelles se trouve le point O, dont on peut ainsi déterminer la position.

Pour simplifier les calculs, prenons les positions des microphones, de sorte que l'on ait $AB \perp AC$ et $AB = AC$. Cette position correspond d'ailleurs à la meilleure sensibilité pour une base des microphones donnée (la distance BC).

Soit :

$$2K_1 = \overline{OA} - \overline{OB}$$
$$2K_2 = \overline{OA} - \overline{OC}$$
$$\overline{AB} = \overline{AC} = C$$
$$b_1^2 = c^2 - K_1^2$$
$$b_2^2 = c^2 - K_2^2$$

et prenons les axes des coordonnées perpendiculaires sur les milieux de AB et AC. Les deux hyperboles seront :

$$\frac{x^2}{K_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{K_2^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0$$

et les coordonnées x, y de O

$$x = \sqrt{\frac{b_2^2 K_1^2 (b_1^2 + K_2^2)}{b_1^2 b_2^2 - K_1^2 K_2^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{b_1^2 K_1^2 (b_2^2 + K_1^2)}{b_2^2 b_1^2 - K_2^2 K_1^2}}.$$

On a fait l'hypothèse de O situé dans le plan de A, B, C pour ne pas compliquer inutilement les calculs. Pour déterminer la position d'une source située dans l'espace, on doit avoir quatre microphones, le quatrième étant situé en D, de sorte que AD soit $\perp$ au plan de A, B et C. Toutes les considérations qui s'ensuivent, sont d'ailleurs valables dans les deux hypothèses.

Si le principe de la méthode est très simple, la rélisation est assez difficile. Des essais que j'ai faits et qui ont donné de mauvais résultats parce que les oscillographes n'étaient pas propres à ces mesures, m'ont permis quand même, d'établir les conditions d'une bonne réalisation:

Dans les mesures faites, n'ayant pas d'oscillographe a trois équipages, on a utilisé deux oscillographes inégaux, dont un à deux équipages. Chacun avait son amplificateur et il était difficile d'en comparer les oscillogrammes. Pour pouvoir déduire des oscillogrammes les différences $\overline{OA} - \overline{OB}$ et $\overline{OA} - \overline{OC}$, trois conditions doivent être satisfaites:

1. La vitesse du son doit être connue.
2. La vitesse de déroulement des pellicules doit être connue.
3. On doit avoir un repère qui corresponde à une impression simultannée des trois microphones pour pouvoir en mesurer les écarts.

Faisons l'hypothèse d'une phase donnée du son, arrivant simultannément aux trois microphones, et soit o, p, q les trois positions d'enrégistrement sur les pellicules. Dans une mesure réelle, avec un son arrivant d'un source O de position inconnue, une même phase du son sera enrégistrée dans les positions différentes o', p', q'. Notons α, β et γ les distances OO', pp', et qq', mesurées sur les pellicules. La méthode ne peut nous donner directement α, β et γ, mais elle peut nous donner les quantités $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$.

Soit :

$$a = \alpha - \beta$$
$$b = \alpha - \gamma$$

Dans ce cas on a :

$$2k_1 = \overline{OA} - \overline{OB} = \frac{V}{v} a$$

$$2k_2 = \overline{OA} - \overline{OC} = \frac{V}{v} b$$

relation, dans laquelle v est la vitesse de déroulement des pellicules. Le meilleur moyen pour éliminer les erreurs systématiques est de faire deux mesures pour des positions connues de la source, dans le but de déterminer $\frac{V}{v}$ et de trouver un repère sur les pellicules, afin de pouvoir déterminer a et b.

Dans les mesures faites, à cause des diférences des trois équipages, des différences des caractéristiques de leurs trois amplificateurs et des différences des vitesses de déroulement des pellicules on a dû, pour pouvoir comparer les oscillogrammes, les reproduire en modifiant l'échelle des temps et des amplitudes, de sorte qu'on puisse les superposer.

Les déformations des courbes enrégistrées étaient irrégulières et trop différentes d'un équipage à l'autre pour pouvoir les bien comparer, même par cette méthode.

Les erreurs ont été plus grandes qu'elles n'auront théoriquement dû être, parce qu'on n'a pas eu le moyen de réaliser une installation appropriée au but poursuivi.

Une erreur systématique persistait et elle était plus grande pour les basses fréquences. Cette erreur diminuait quand on utilisait la même source sonore comme source de position connue et comme source de position inconnue.

Afin de pouvoir déterminer la cause de cette erreur, on a utilisé une source sonore formée d'un diffuseur qui recevait le courant d'un oscillateur à fréquences sonores. La fréquence de cet oscillateur était variable de 30 cycle/sec., jusq'aux fréquences ultrasonores, son courant était exempt d'harmoniques.

Utilisant cette source dans la méthode décrite, comme source de position connue et ensuite comme source de position inconnue, et ayant soin de la faire fonctionner dans les deux cas à la même fréquence, on a obtenu de meilleurs résultats.

Avec:

$$AB = AC = 8 \text{ m.}$$

et les coordonnées réelles de la source:

$$x_r = 126 \ , \ g_r = 131$$

l'erreur ΔO maximum (la distance de la position réelle déterminée géo-

métriquement à la position déduite des oscillogrammes) a été de 1,12 cm., et ΔO m la distance de la moyenne des positions déduites (centre de gravité du système des points représentant les résultats de mesures) à la position réelle, de 30 cm.

Si on faisait varier la fréquence, les erreurs étaient beaucoup plus grandes, surtout pour la moyenne.

L'ensemble des résultats est contenu dans le tableau qui suit, dans lequel les diverses quantités sont notées :

ΔO la distance de la position réelle de la source à la position déduite des oscillogrammes,

ΔOm la distance de la position réelle de la source à la position moyenne déduite des oscillogrammes (centre de gravité de l'ensemble des points représentant les résultats des mesures),

F la fréquence du son émis par la source quand elle était utilisée comme source de position connue.

F' la même fréquence quand la source est utilisée comme source de position inconnue,

C la distance $AB = AC$,

x'_r et y'_r les coordonnées de la position connue de la source, déterminées géométriquement,

x_r et y_r les coordonnées réelles déterminées géométriquement de la position de la source quand elle est utilisée comme source de position inconnue.

ΔO m.	ΔOm m.	F cycle sec.	F' cycle sec.	C m.	x_r m.	y_r m.	x'_r m.	y'_r m.
0,97	0,30	50	50	8	126	131	120	130
0,41		50	50	8	126	131	120	130
1,12		50	50	8	126	131	120	130
0,37		50	50	8	126	131	120	130
1,72	1,52	450	50	8	126	131	120	130
1,93		450	50	8	126	131	120	130
2,15		450	50	8	126	131	120	130
0,80		450	50	8	126	131	120	130
1,17	0,68	50	50	8	126	131	70	138
1,36		50	50	8	126	131	70	138
0,45		50	50	8	126	131	70	138
0,75		50	50	8	126	131	70	138

MŰEGYETEM TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

A cette phase l'étude a été interrompue à cause de la guerre, et depuis on n'a pas eu le moyen de la reprendre dans de meilleures conditions.

Conclusions :

Des données obtenues par ces mesures, on a pourtant pu conclure:

1. L'erreur produite par les changements de phase produits par chaque système de réception séparément (microphone, oscillographe, amplificateur). Ce changement de phase était équivalent à une différence de temps et par conséquant de distance, faussant donc aussi les différences réelles $\overline{OA} - \overline{OB}$, $\overline{OA} - \overline{OC}$.

Par exemple, à une différence de phase fausse d'un quart de période, pour un son de 100 cycle/sec., et avec $V = 340$ m/sec) l'erreur serait:

$$\Delta(\overline{OA} - \overline{OB}) = \Delta(\overline{OA} - \overline{OC}) = \frac{V}{4 \times 100} = 0{,}85 \ m.$$

Ces erreurs étaient déterminées quand la source était la même, soit qu'on l'utilisait comme source de position connue, soit comme source de position inconnue, si les positions n'étaient pas trop éloignées l'une de l'autre.

2. Pour éliminer ces erreurs dans n'importe quelle mesure, on doit utiliser un oscillographe spécialement construit, aux équipages d entiques. Les microphones, leurs circuits et les amplificateurs doivent être de même identiques.

Les vitesses de déroulement des pellicules doivent être égales, pour faciliter la comparaison des oscillogrammes.

3. La vitesse de déroulement des pellicules doit être grande, car plus elle est grande, plus la méthode est sensible.

4. Un appareil ainsi réalisé permettrait des réalisations assez précises.

Par exemple :

Pour une vitesse $v = \frac{V}{100}$ avec la possibilité d'apprécier la position sur les pellicules à une erreur de moins de 0,5 mm :

$$\Delta K_1 = \Delta K_2 = \frac{\Delta(\overline{OA} - \overline{OB})}{2} = \frac{\Delta(\overline{OA} - \overline{OC})}{2} = \frac{V}{v} \times \frac{5}{2} 10^{-4} = 0{,}025_{\text{m}}.$$

Dans ce cas, même pour une petite base de microphone de 2—5 m., l'erreur totale de mesure serait beaucoup moindre que celle obtenue dans les mesures faites.

5. On peut, en principe, accroître la sensibilité de la méthode, en

augmentant la base des microphones. Mais, si on l'augmente trop, on peut introduire des erreurs à cause des vitesses inégales de la propagation du son sur les trois directions OA, OB et OC. Cette inégalité peut être produite, soit par la valeur différente des composantes de la vitesse du vent sur ces trois directions, soit par toute autre différence d'homogénéité de l'atmosphère.

Les réflexions et les sons parasites embrouillent et rendent difficile l'intrépretation des résultats.

6. Les avantages de cette méthode sont :

a. Elle est objective.

b. Elle peut déterminer la position d'une source. même si l'émission du son ne dure qu'un fraction de seconde,

c. Une fois l'appareil mis en place et les déterminations avec la source de position connue, faites, une mesure ne dure qu'une fraction de seconde.

d. Elle peut déterminer une série continue de positions pour une source sonore mobile, de sorte qu'on arrive à connaître la trajectoire et la vitesse en chaque point.

On croit que cela permet de nombreuses utilisations pratiques.

Laboratoire de Machines à vapeur de
l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 19 Novembre 1947)

O EXPLICAȚIE SIMPLĂ A EFECTULUI – FARADAY

de

TEOFIL T. VESCAN

In această scurtă notă vrem să arătăm că efectul lui Faraday poate să fie tratat prin mijloace cu totul elementare.

Intr'adevăr să considerăm o configurație de electroni, așezată în poziția de echilibru $CC_1C_2...$ dealungul axei Ox. Această configurație poate să fie asimilată unei coarde vibrante, care la un moment dat ajunge în poziția $AA_1A_2...$

Fiecare lungime Δx a acestei coarde vibrante va avea massa (inertă): $\varrho\Delta x$ și va fi prevăzută cu sarcina electrică $e\Delta x$.

Punctele configurației se găsesc sub acțiunea unei tensiuni — forțe P și două puncte așezate la distanța Δx vor avea diferența de fază $\Delta\varphi$, convenind a reprezenta mișcarea lor cu ajutorul unor cercuri, de rază a, perpendiculare axei de echilibru $CC_1C_2..$, conform uzanțelor din mecanica vibrațiilor.

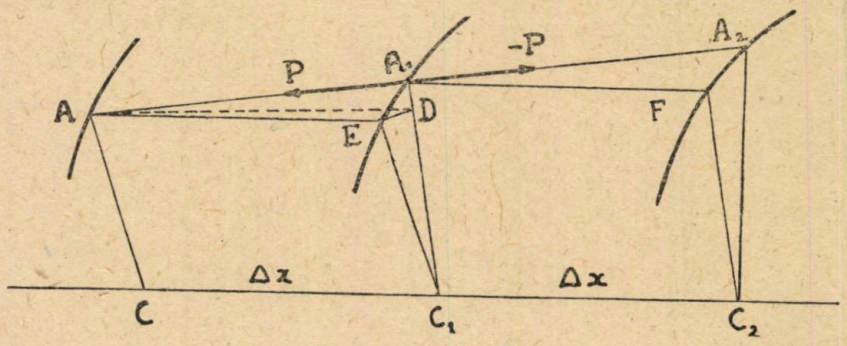


Fig. 1.

Să proectăm forțele care lucrează asupra punctului A_1, pe raza vectoare C_1A_1. Aceste forțe sunt, pe de o parte:

I) *forța centrifugă:* $a\omega^2\varrho\Delta x$; pe de altă parte

II) *componentă radială a tensiunii:*

$$P \sin A_1 AD - (-P) \sin A_2 A_1 F = 2P \sin A_1 AD$$

și

III) *acțiunea electrodinamică* ce se exercită asupra sarcinei electrice:

$$\pm \frac{v}{c} H(e\Delta x) = \pm \frac{a\omega}{c} He\Delta x.$$

Insă

$$\sin A_1 AD = \frac{A_1 D}{AA_1} \cong \frac{A_1 D}{\Delta x} = \frac{C_1 A_1 - C_1 D}{\Delta x} = \frac{a - EC_1 \cos EC_1 D}{\Delta x} =$$

$$= \frac{a - a \cos \Delta\varphi}{\Delta x} \cong \frac{a}{2} \frac{(\Delta\varphi)^2}{\Delta x} = \frac{a(\omega\Delta t)^2}{2\Delta x} = \frac{a\omega^2}{2v^2} \Delta x.$$

In aceste formule am ținut seamă de faptul că defazajul

$$\Delta\varphi = \widehat{A_1 C_1 E} = \widehat{FC_2 A_2}$$

este foarte mic și am notat cu

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

viteza de propagare.

Deci:

$$\varrho \Delta x \, a \, \omega^2 = \frac{Pa\,\omega^2}{v^2} \Delta x \pm \frac{a\omega}{c} He\Delta x$$

sau, simplificând cu $a\,\omega\,\Delta x$ și pe urmă înmulțind cu $\frac{v^2}{\varrho\omega}$,

$$v^2 = \frac{P}{\varrho} \pm \frac{Hev^2}{c\varrho\omega}.$$

Procedând cu aproximații succesive, avem prima dată prin neglijarea termenului în $\frac{1}{c}$

$$v^2 = \frac{P}{\varrho}$$

(formula clasică cunoscută) și pe urmă

$$v^2 = \frac{P}{\varrho} \pm \frac{He}{c\varrho\omega} \frac{P}{\varrho}$$

adică

$$\boxed{v_{12} = \sqrt{\frac{P}{\varrho}\left(1 \pm \frac{1}{c} \frac{He}{\varrho\omega}\right)}}$$

Obţinem deci două viteze deosebite pentru cele două lumini polarizate circular (în sensuri opuse). Ori, această deosebire, corespunde la o diferenţă de timp

$$\frac{e}{v_1} - \frac{e}{v_2}$$

adică la o diferenţă de fază

$$\left(\frac{e}{v_1} - \frac{e}{v_2}\right)\frac{2\pi}{T}$$

care exprimă o rotaţie a planului de polarizare a luminii, sub acţiunea câmpului magnetic H, adică tocmai efectul-Faraday.

Laboratoire de Physique et Mécanique de l'Université hongroise „János Bolyai" de Cluj

(Reçu le 30 Mars 1947)

Une explication simple de l'effet de Faraday.

Résumé. L'auteur expose, surtout dans les buts didactiques, à l'aide des indications qu'on peut suivre sur la figure et par les développements donnés ci-dessus, un des moyens élémentaires permettant d'aboutir par le calcul à une explication simple de l'effet de Faraday.

LAMPE À VAPEUR DE MERCURE FONCTIONNANT COMME OSCILLATEUR À RELAXATIONS

par

ALEX. CIŞMAN et E. LUCA

Résumé. Etude d'une lampe à arc symétrique à deux anodes en fer et une cathode à mercure, dans laquelle la décharge, sautant d'une anode à l'autre, peut produire des oscillations de relaxation de fréquence controlable. Oscillogrammes et conditions de fonctionnement.

Dans deux mémoires antérieurs [1]) un modèle original de lampe à vapeur de mercure a été étudié, comme modulateur de courant et comme générateur d'oscillations entretenues.

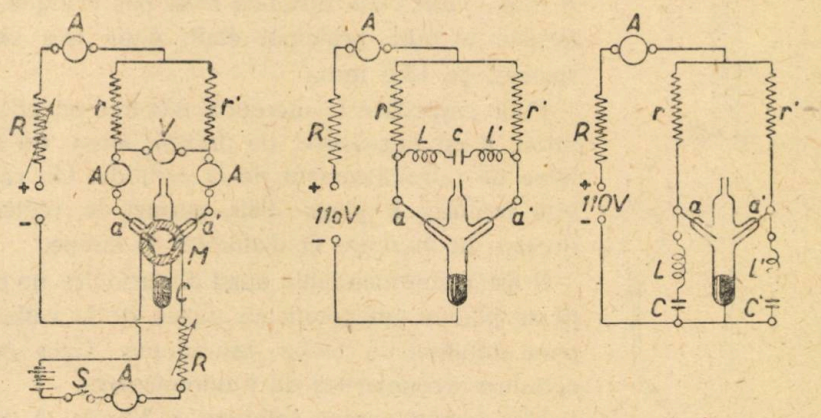


Fig. 1.

L'arc électrique passait entre une cathode à mercure et deux anodes symétriques *a* et *a'*, en série avec les résistances *r* et *r'* (Fig. *1a*).

Un champ magnétique, perpendiculaire au plan de la figure peut

1) Th. V. Ionescu – Annales Sc. Université de Jassy T. XIV, p. 280, 1926; Alex. Cişman et Th. V. Ionescu – Annalen der Physik *5*, Bd. 20, pag. 123, 1934.

dévier le courant et faire augmenter l'intensité dans l'une des anodes au détriment de l'autre.

On peut alors spéculer la différence de potentiel qui apparaît ainsi entre les deux anodes, car, si les bobines du champ sont convenablement orientées, elles agissent par réaction sur la décharge, qui entretient les oscillations dans le circuit *L C* (Fig. *1b* et *c*).

Au cours du deuxième des travaux cités, nous avons observé que la lampe entretenait des oscillations même en absence de tout couplage magnétique entre l'arc et les bobines du circuit oscillant et que *ces oscillations continuaient de se produire quand on supprimait complètement le circuit oscillant extérieur.*

Dans ce dernier cas elles avaient le caractère des oscillations à relaxation et c'est l'étude de ce régime qui constitue l'objet de ce travail.

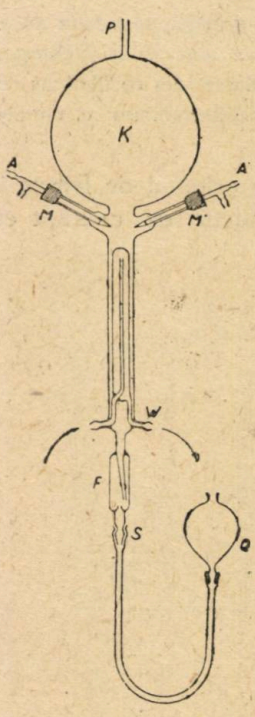


Fig. 2.

Nous nous sommes servis à cet effet d'une lampe en verre ordinaire du même modèle que précédemment (Fig. 2).

Les deux anodes en fer, pourvues d'un sistème de refroidissement à courant d'eau, étaient fixées par mastiquage. Leur distance en regard était de 5 mm., mais cette distance n'est pas critique. La largeur tu tube principal était, dans nos expériences, de 18,5 mm.

Pour empêcher le mercure d'entrer en ébouillition, il est nécessaire de prévoir aussi un système de refroidissement de la cathode. Un réservoir mobile, à piège d'air, permet de régler le niveau du mercure et d'allumer la lampe.

Il est recommandable aussi d'introduire un petit fil de platine, émergeant au milieu de la cathode, pour stabiliser la tache cathodique. Ceci évite certaines irrégularités de fontionnement.

Une bonne pompe rotative à l'huile, à deux étages, nous a servi pour faire le vide. Elle était maintenue tout le temps en fonction. Nous avons d'abord tracé la courbe caractéristique, pour étudier la variation de la différence de potentiel entre l'une des anodes et la cathode, en fonction de l'intensité du courant. (Fig. 3).

La longueur de l'arc étant de 17 cm., nous avons trouvé une courbe qui montre que, pour des intensités inférieures à 6 Amp. la

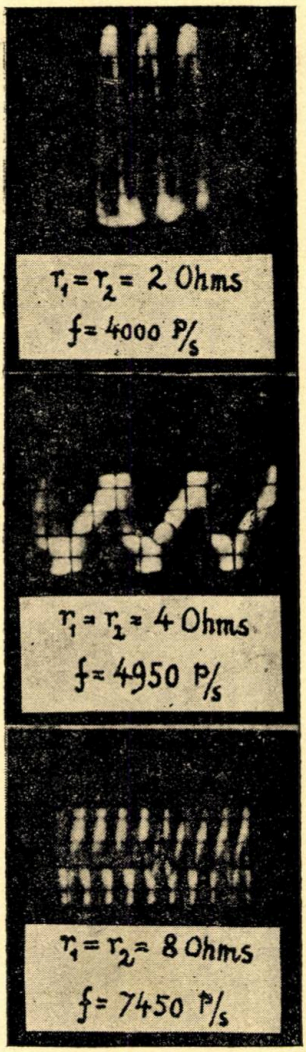

$r_1 = r_2 = 2$ Ohms
$f = 4000$ P/s
$r_1 = r_2 = 4$ Ohms
$f = 4950$ P/s
$r_1 = r_2 = 8$ Ohms
$f = 7450$ P/s

Fig. 5.

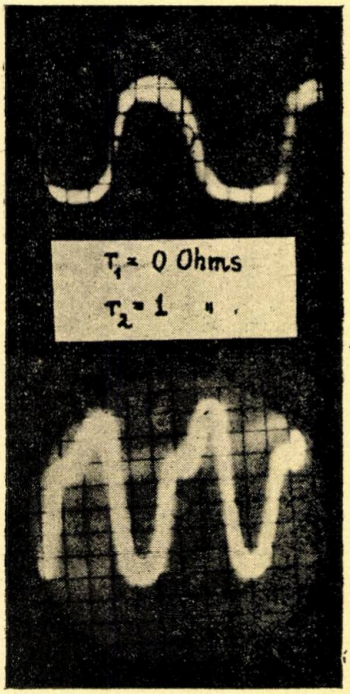

$r_1 = 0$ Ohms
$r_2 = 1$

Fig. 8.

résistance de la décharge $\rho = \frac{dv}{di}$ est négative, une augmentation de l'intensité entraînant une diminution de la différence de potentiel aux bornes de l'arc.

Pour des intensités plus grandes, la courbe remonte et la résistance devient positive.

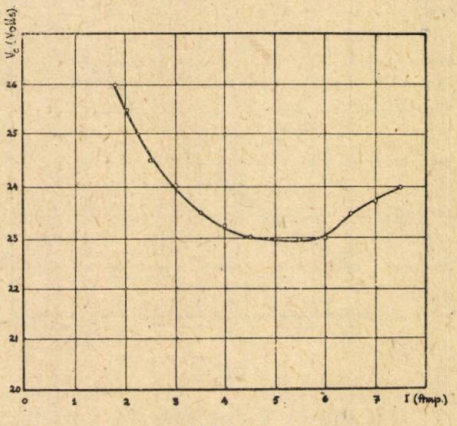


Fig. 3.

Le schéma du montage correspond à la fig. 4. L'alimentation en courant continu se fait à travers un rhéostat principal R et deux résistances en dérivation r et r'. Ces deux résistances étant égales, le courant se divise à intensités égales, entre les deux anodes.

La tension de la source étant constante, supposons remplie la condition $\rho < 0$.

Une augmentation accidentelle, infiniment petite di de l'intensité dans l'une des anodes entraîne une augmentation correspondante de la chute de potentiel, le long de la résistance r et le potentiel de l'anode réspective baisse de $r\,di$.

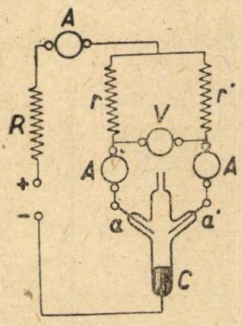


Fig. 4.

La résistance négative de l'arc intervient alors et fait augmenter l'intensité de la décharge d'une nouvelle quantité. Ceci produit une nouvelle baisse du potentiel de l'anode réspective et le phénomène se poursuit, jusqu'à ce que l'une des anodes arrive à monopoliser le courant total, au détriment de l'autre anode.

Mais, à cause de la symétrie du montage, ce déséquilibre ne peut durer et la situation bientôt se renverse.

Il résulte ainsi un phénomène de relaxation, la décharge oscillant sans cesse d'une anode à l'autre.

Ces oscillations se produisent dès que la longueur de l'arc devient assez grande, pour faire place à la colonne positive et leur fréquence reste invariable quand on continue de l'allonger.

Leur forme, ainsi que leur fréquence, dépend, pour une même lampe, exclusivement de la valeur des résistances en dérivation r et r'. Elles sont strictement sinusoïdales et de fréquence 4000 per / sec. pour $r = r' = 2$ ohms.

Quand ces résistances, tout en restant égales, augmentent, la fréquence augmente aussi pour monter à 9000 per/sec avec $r = r' = 10$ ohms, mais les oscillations, tout en augmentant en ampiltude, perdent en même temps le caractère sinusoïdal, pour épouser la forme „*en dent de scie*“ (Fig. 5). Avec un appareil de réception ordinaire nous avons pu alors mettre en évidence des harmoniques supérieurs jusqu'à 1200 mètres de longueur d'onde.

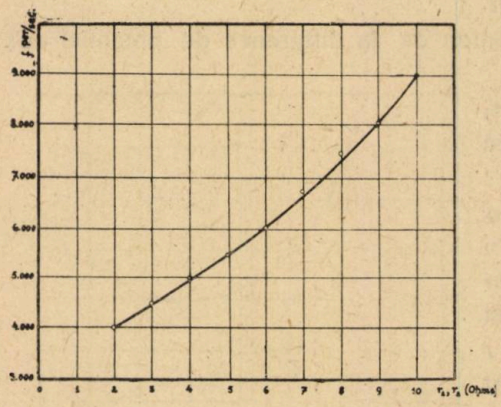


Fig 6.

La figure 6 montre la variation de la fréquence, en fonction des résistances $r = r'$. Cette courbe correspond à l'équation

$$f = a\, r^{\alpha}\, e^{rK}$$

où

$$a = 3250 \; ; \quad \alpha = -\frac{1}{18} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{8} \cdot$$

L'influence des résistances r et r' sur la fréquence des oscillations pourrait s'interpréter ainsi :

Quand ces résistances sont petites, une variation donnée du courant d'une anode se traduit par une variation de moindre importance de son potentiel. Le passage de la décharge d'une anode à l'autre se fait alors plus lentement et le phénomène atteint la limite de renversement en un temps plus long. C'est le contraire qui arrive avec des résistances plus grandes, car les variations du potentiel d'anode sont alors de plus en plus brutales, et la fréquence augmente.

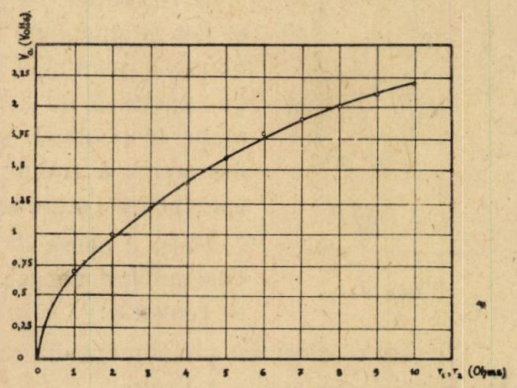


Fig. 7

La tension alternative efficace v_a entre les deux anodes dépend aussi de la valeur des résistances r et r'. La courbe fig. 7 montre cette variation. Elle a pour équation

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{r}{2}}$$

c'est-à-dire un arc de parabole.

Quand les résistances r et r' ne sont plus égales, la dissimétrie du montage entraine une dissimétrie de l'oscillogramme réspectif et l'amplitude de l'oscillation s'exagère alors du coté de la plus grande résistance (Fig. 8).

Nous avons essayé aussi d'augmenter la capacité mutuelle entre les deux anodes, ainsi que de l'espace anode-cathode, par insertion de capacités supplémentaires. Ceci diminue l'amplitude des oscillations mais n'influe pas d'une manière visible sur leur fréquence.

De même, nous avons essayé de remplacer les résistances r par des bobines de self, mais ces bobines, même couplées entre elles, n'influent que par la valeur de leur résistance ohmique.

Dans un article à suivre nous exposerons les résultats d'un autre travail en cours d'exécution sur l'emploi de la même lampe comme amplificateur de basse fréquence.

Ecole Polytechnique de Jassy
Laboratoire de Physique générale

(Reçu le 25 Décembre 1947)

(Travail exécuté dans le cadre de l'Institut National de recherches techniques en Roumanie).

CONTRIBUTION A LA CONNAISSANCE DE L'HUILE DE CHÈNEVIS

par

GH. ALEXA et CRISTOFOR SIMIONESCU

Dans un travail antérieur: „Etude de la capacité d'autoxydation de quelques huiles végétales de provenance roumaine" (Bull. Inst. Nat. de Recherches Techn. Nr. 5 (1947) Bucarest), dans lequel nous adoptions la méthode Mackey, modifiée par U. J. Thuau et D. Lisser pour la classification de quelques huiles végétales indigènes au point de vue de leur capacité d'autoxydation, nous avons admis comme critérium de classification de ces huiles, l'indice d'oxydation interne tel qu'il a été défini par U. J. Thuau et D. Lisser [1]).

D'après cette classification nous remarquons que l'huile de chènevis se comporte d'une manière speciale. En effet, cette huile présente une inertie dans le déclenchement de la réaction, qu'on ne pourrait expliquer, si l'on considère son indice d'iode et la quantité d'acides gras nonsaturés, contenant des liaisons doubles conjugées, en proportion de 73,2%.

En utilisant comme support dans l'appareil Mackey de l'asbeste finement divisé et un tamis à 210 mailles au cm.^{2}, l'huile de chènevis se place après l'huile de noix qui possède un indice d'iode plus petit et à côté de l'huile de maïs, l'élévation d'un degré de température entre 95-96° C. demandant une heure.

Ci-dessous, nous donnons le tableau des températures atteintes par l'huile de chènevis:

TABLEAU I

Temps en minutes	10	20	30	40	50	60	70	80	120	140	160	170	175	180	190
Température en degré C.	56	78	88	92	93^5	94	94^5	95	96	97	100	107	117	153	212

La conclusion qui s'impose donc est que l'indice d'oxydation in-

terne*) est égal à 373,3; ce chiffre est assez petit, comparé à ceux obtenus avec les huiles de l'in et de noix, mais reste cependant, comparativement égal à celui obtenu avec l'huile de maïs.

D'autre part, à cause de la plage présentée par la courbe durée-température, entre 95-96° C., l'indice d'oxydation totale**) est très petit, étant égale à 112.

Cette comportation de l'huile de chènevis aux essais à l'appareil Mackey est due, probablément, à la présence dans les matières insaponifiables, d'un corps à action inhibitrice. Il est possible que la présence d'un alcaloïde, signalé par Husemann[2]), dans les grains de chènevis et même dans la plante entière, influence la comportation signalée plus haut; mais cette supposition fera l'objet d'une étude future, notre attention étant attirée sur les matières insaponifiables de cette huile.

Cependant, il faut remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'une action antioxydante, comme celle exercitée par les phénols en général.

Nous donnons ci-après, la manière dont se comporte à l'autoxydation des mélanges d'huile de chènevis et d'essence de térébenthine.

L'essence utilisée est de couleur jaune, ayant un indice de réfraction $n_D^{15} = 1{,}4837$. L'huile de chènevis a les constantes: Indice d'iode d'après Hannus $= 148{,}80$; $n_D^{15} = 1{,}4800$.

Les déterminations ont été executées en utilisant la même méthode (support asbeste et un tamis à 210 mailles au cm[2]).

Nous avons obtenu les résultats suivants:

TABLEAU II.

Proportions de mélange	L'indice d'oxydation		Durée de la détermination en minutes
	interne	totale	
Huile de chènevis . . .	373,3	112	190 min.
1 p. essence pour 10 p. huile	381,6	228,1	94 „
2 p. „ „ „ „	393,1	233,4	89 „
3 p. „ „ „ „	420	259,5	79 „
4 p. „ „ „ „	439	275,3	73 „
5 p. „ „ „ „	400	255,1	80 „

*) L'indice d'oxydation interne représente le rapport, multiplié par 100, entre la température maximum, qui dépasse 100° C., et la durée entre le moment quand la température atteint 100° et la température maximum.

**) L'indice d'oxydation totale représente le rapport, multiplié par 100, entre la température maximum atteinte pendant la détérmination et la durée maximum en minutes.

De ces données expérimentales, ainsi que du graphique durée-température (fig. 1), on voit qu'en ajoutant pour 1 partie d'essence 10 parties d'huile, la durée de la détérmination est réduite à la moitié, la température maximum étant atteinte seulement après 94 minutes.

L'addition de l'essence à l'huile, agrandit l'indice d'oxydation interne ainsi que celui d'oxydation totale, jusqu'à une proportion de 4 p. d'essence pour 10 p. d'huile.

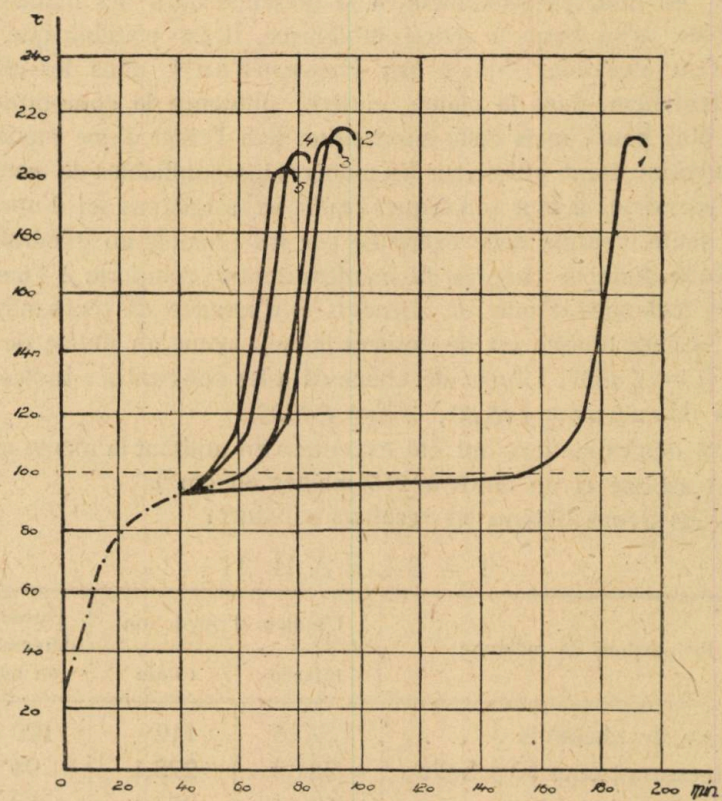


Fig. 1

Si l'on dépasse cette proportion limite on ne remarque plus aucune réduction du temps de la réaction.

Conclusions. L'huile de chènevis présente à l'autoxydation une inertie qui se manifeste dans les détérminations à l'appareil Mackey par une plage dans l'intervalle de température 95-96° C. Il ne s'agit pas de la présence dans l'huile d'un antioxydant de nature phénolique, mais d'un corp, qui se trouve dans les insaponifiables de l'huile, qui possède une action retardatrice.

Si l'on ajoute de l'essence de térébenthine, la durée de la détermination est réduite à moitié et l'indice d'oxydation interne et surtout celui d'oxydation totale croissent jusqu'à une proportion limite de 4 p. d'essence pour 10 p. d'huile.

Laboratoire de Chimie Technologique Organique de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 19 Août 1947)

Travaux cités

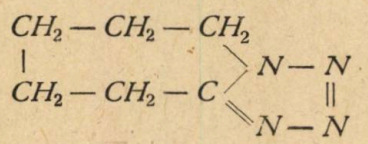
1) U. J. Thuau et D. Lisser, *Le cuïr technique*, 1939, *28*, pag. 264, 282, 309.
2) Husemann-Hilger, *Die Pflanzenstoffe*, II-ème ed. I, 512, cité d'après: Ubbelohde's *Handbuch der Chemie und Technologie der Öle und Fette*, II (1929), S. Hirzel, Leipzig, 23.

NOUVELLES RÉACTIONS MICROCHIMIQUES POUR L'IDENTIFICATION DU CARDIAZOL.

par

N. I. IOANID et G. D. BORȘ

Parmi les médicaments connus récemment, ayant des propriétés analeptiques, tonifiant la circulation et stimulant la réspiration, se trouve de même le cardiazol :



pentametylen, tétrazol, cyclopentametrazol, metrazol, corvis, camphenin, cordizan, etc.,) découvert par K. F. Schmidt [1]).

Le cardiazol se présente sous forme de cristaux fusibles *à* $+59^0$, ayant le gout faiblement amère, la solution aqueuse est neutre au tournesol ; soluble dans la majorité des disolvants organiques.

La bibliographie de spécialité indique quelques réactions pour l'identification du cardiazol, ainsi, parmi les réactions les plus caractéristiques, nous rappellons la suivante : par l'addition d'une solution saturée à froid de sublimé corrosif à une solution aqueuse de cardiazol, nous obtenons immédiatement un précipité blanc très peu soluble dans l'eau.

Ce précipité est un produit d'addition à une molécule de $HgCl_2$ aux valences partielles du noyau tétrazolique et il a le *p. f.* $+175^0$ [2]).

D'après Zwikker [3]), le cardiazol donne avec les solutions chlorhydriques de $[Fe(CN)_6]\ K_4$ ou $[Fe(CN)_6]\ K_3$, des microcristaux. D'après le même auteur, si on mélange la solution de cardiazol à une solution de $CuCl_2$, en présence du bisulfite de soude et de l'acide clorhydrique $4/N$, on obtient un précipité à cristaux birefringents. La réaction est très sensible pouvant être décelé même $1 : 40.000$ de cardiazol.

Stewart [4]) donne une réaction pour la recherche microchimique

du cardiazol dans les solutions aqueuses. D'après le même auteur, on ajoute à une solution de cardiazol une solution de sulfate d'ammonium et on l'extrait ensuite par l'éther acétique [5]). Après l'évaporation du liquide extractif, le résidu est pris avec du chloroforme et agité avec une solution de 5% $CuCl_2$ en obtenant des cristaux caractéristiques.

MM. Mihalovici et Ullmann [6]) étudiant plusieurs iodobismuthats, sont parvenus à préparer de même l'iodobismuthate de cardiazol. Par l'addition du réactif bismuthique*) à une solution de cardiazol, les auteurs ont obtenus des cristaux en forme d'aiguilles et de couleur rouge foncée, mesurant 1,5 cm. de longueur d'iodobismuthate de cardiazol.

Dans la Pharmacopée Roumaine, V-ème édition, sauf la réaction avec le sublimé corrosif et celle de Stewart (loc. cit.) on indique aussi les réactions suivantes: 1) La solution aqueuse de cardiazol traitée avec le molybdate d'ammonium, ayant été acidulée avec l'acide azotique, dépose un précipité blanc. 2) La solution de cardiazol 1/10 traitée avec l'acide tannique donne de même un précipité blanc. Ce sont les seules réactions que nous avons trouvées dans la littérature de spécialité.

* * *

Ayant rencontré dans notre pratique chimico-légale, un cas rare d'empoissonnement accidentel avec le cardiazol [7]), nous nous sommes proposé, tout spécialement, à rechercher des nouvelles réactions microchimiques facilement applicables dans l'identification du cardiazol.

Dans ce but nous avons fait appel aux découvertes de Lüdy-Tenger [8]), pour obtenir des nouveaux complexes hallogèno-métalliques, nous avons essayé d'appliquer les réactifs indiqués par l'auteur, dans la recherche du cardiazol.

Deux de ces réactifs, seulement, c'est-à-dire, le réactif iodo-bismuthique (bismuth carbonique 0,50 gr, acide chlorhydrique officinal 1 gr, iodure de potassium 3 gr, dans 10 cmc d'eau distillée), et le réactif iodo-argentique (nitrate d'argent 0,30 gr. acide azotique conc. VII gouttes, iodure du potassium 5,4 gr. dans 10 cmc d'eau distillée), nous ont donné des résultats très satisfaisants.

Lüdy-Tenger estime le réactif iodo-bismuthique comme une

---

*) Le réactif iodo-bismuthique a été préparé ainsi: 12,50 gr. bismuth carbonique, 35 cmc, acide chlorhydrique 25%, dans 120 amc d'eau distillée. Après le dégagement du bioxide de carbon on ajoute 62,5 gr. d'iodure de potassium, et après la dissolution de cette dernière on complète le réactif avec de l'eau distillée jusqu'à 250 cmc.

simplification et en même temps comme une sensibilisation du réactif de Dragendorff. Pour la recherche du cardiazol par le réactif iodo-bismuthique nous avons procédé de la manière suivante : sur le résidu de l'évaporation sur une lame de microscope d'une goutte d'une solution 10% de cardiazol dans le chloroforme on ajoute une goutte de réactif. A la zone de contact se forme, après deux-trois minutes, des cristaux en forme d'aiguilles jaune-orange, disposés en étoile. La réaction est très sensible pouvant s'obtenir des cristaux même avec 0,00005 gr. de cardiazol (fig.1).

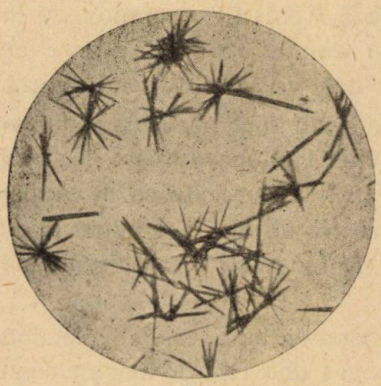


Fig. 1

En procédant de la même manière avec le réactif iodo-argentique on obtient des cristaux incolores en forme d'aiguilles fines, disposés en faisceaux (fig. 2). Cette réaction permet d'obtenir des cristaux même avec 0,0005 gr. de cardiazol.

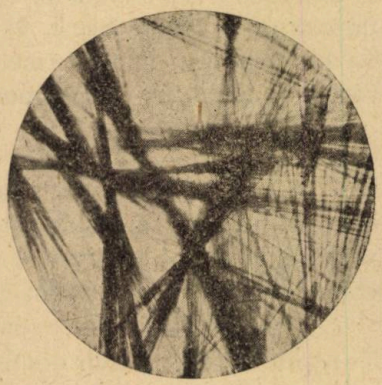


Fig. 2

Avec les autres réactifs préparés par Lüdy-Tenger, les résultats ont été tout-à-fait négatifs. Tout de même, en obtenant avec l'un des réactifs de Lüdy-Tenger (solution de perchlorure de fer 3 gr, acide chlorhydrique conc. 1 gr. iodure de potassium 3 gr, dans 10 cmc d'eau distillée), un précipité huileux, nous nous sommes proposé de modifier ce réactif, en vue d'obtenir la preuve positive même avec le cardiazol.

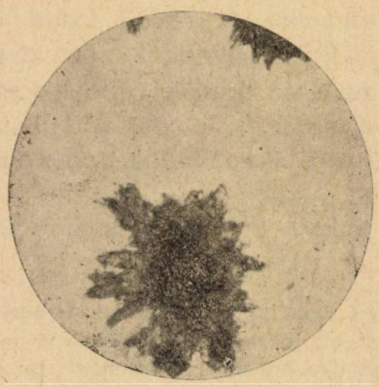


Fig. 3

Après plusieurs essais, en remplaçant l'iodure de potassium du réactif mentionné ci-dessus, nous sommes parvenus à préparer un réactif (solution de perchlorure de fer 1/1, 3 gr. acide chlorhydrique offic. 1 gr, iodure d'ammonium 3 gr, dans 10 cmc d'eau distillée), qui permet des réactions microchimiques de cristallisation avec le cardiazol. Les cristaux obtenus ont la forme d'ursines (fig. 3). En recherchant la sensibilité de ce réactif, nous

avons pu obtenir des microcristaux même avec 0,0005 gr. de cardiazol, par le procédé décrit ci-dessus. Dans l'intention de découvrir d'autres réactions microcristallines, applicables au cardiazol, nous avons obtenu les preuves positives suivantes:

Si, sur le résidu de l'évaporation, sur une lame de microscope d'une goutte d'une solution chloroformique de cardiazol 10% on ajoute une goutte d'une solution aqueuse d'acide silicotungstique 10% on obtient des cristaux à forme d'aiguilles (fig. 4). Par cette réaction on a pu identifier 0,00005 gr. de cardiazol

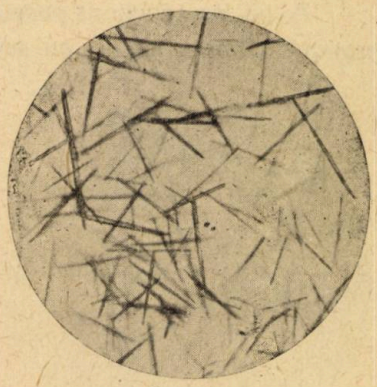


Fig. 4

En agissant, comme nous l'avons décrit ci-dessus, mais en remplaçant l'acide silicotungstique par une solution aqueuse d'acide phosphotungstique 2,5%, on obtient immédiatement, même avec 0,00005 gr. cardiazol, des petits cristaux parallélipipédiques (fig. 5).

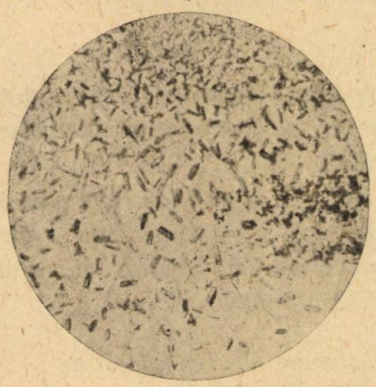


Fig. 5.

Si sur le résidu de l'évaporation de la solution chloroformique de cardiazol 10%, on ajoute une goutte d'une solution aqueuse d'iodure de cadmium 5%, on obtient des cristaux à forme d'aiguilles, fins et longs, très caractéristiques, même avec 0,0005 gr. de cardiazol (fig. 6).

En agissant de la même manière, mais avec une solution aqueuse d'iodure d'ammonium 5%, on obtient des cristaux en forme d'étiole (fig. 7), la réaction étant très sensible même pour 0,0005 gr. de cardiazol.

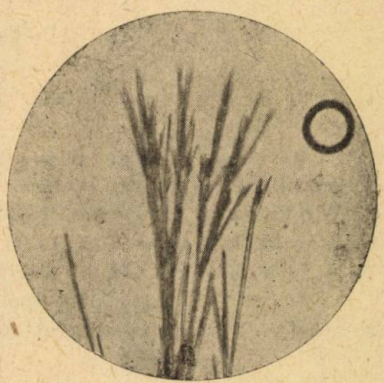


Fig. 6

On obtient de même des microcristaux, si sur une goutte de solution aqueuse 10% de cardiazol, on ajoute une goutte de solution acqueuse 10% de chlorure d'or. Au début, on obtient un précipité huileux, qui à peu de temps se transforme dans des cristaux en plumes (fig. 8), la réaction étant très sensible même pour 0,005 gr. de cardiazol.

A l'aide des réactions descrites plus haut, on a pu déceler la substance pure autant que celle extraite des organes.

Avec les réactions susmentionnées on remplit un vide de notre pratique chimico-légale, au sujet de l'identification du cardiazol.

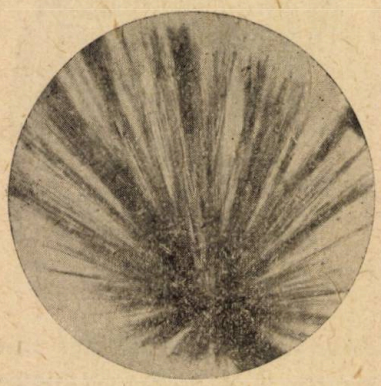


Fig. 7

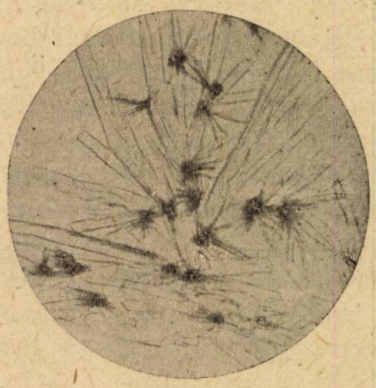


Fig. 8

Les réactions que nous venons d'indiquer sont, d'après ce que nous avons vu, suffisamment sensibles, elles ne se trouvent mentionnées nulle part dans la littérature de spécialité.

Les micro-photographies exécutées par nous ont été obtenues à un objectif de 0,40/17, et un oculaire de 12,5, elles représentent des cristaux agrandis 213 fois. Par la réproduction de clichés, agrandis $2\,^1/_2$ fois, ça signifie que les cristaux ont été agrandis 522 fois.

Laboratoire de Toxicologie de l'Université de Bucarest

(Reçu le 26 Novembre 1947)

Travaux cités

1) K. F. Schmidt - Klinisch. Wschr. 1678, 1925 ; Münch. Med. Wsch. 37, 1489, 1935.
2) Lebeau et Courtois - Traité de Pharmacie Chimique, 2, 1117, 1938.
3) Zwikker - Pharm. Weekbl. 71, 1170, 1934; C. Z. Blatt 1, 1587, 1935.
5) Wölner u. Machett - Chem. Z. Blatt, 1, 2919, 1938.
6) Ar. Mihalovici şi L. Ullmann - Curierul farmaceutic No. 2, 1936.
7) N. Ioanid et G. Borş - Un caz rar de otrăvire accidentală cu cardiazol. Acta Med. Rom. 1-2, 83-87, 1947.
8) Lüdy-Tenger - Pharm. Acta Helv. 11, 385, 1944.

SUR UN NOUVEAU PROCÉDÉ DE PRÉPARATION DE QUELQUES BAINS GALVANIQUES À L'AIDE DU COURANT ALTERNATIF

par

C. CALISTRU

Généralement, on emploie le courant électrique continu pour la production de diverses réactions électrochimiques Dans certains cas on peut aussi employer le courant alternatif. Le Blanc et Schick ont étudié la dissolution de quelques métaux dans une solution de cyanure de potassium sous l'influence du courant alternatif en faisant varier la fréquence par minute de 0,5 à 20.000.

A. Brochet et J. Petit [1]) ont répété les essais de Le Blanc et Schick et ils ont trouvé des résultats analogues aux leurs D'après eux, la réaction qui se produit à la solution du cuivre est la suivante:

$$2Cu + 8CNK + 2H_2O = Cu_2CN_2, 6KCN + 2KOH + 2H.$$

On peut ainsi obtenir en abondance du cyanure de cuivre et de potassium répondant à la formule ci-dessus. Quant au rendement, il ne baisse que lentement et c'est seulement lorsque le liquide est saturé de cuivre que la chute est brusque.

Le zinc et le nickel se comportent de la même façon et permettent d'arriver à un sel double de la forme MCN_2, $2CNK$.

Le Blanc et Schick admettent que la dissolution du cuivre dans la cyanure de potassium sous l'influence du courant alternatif est due à la formation d'un ion complexe qui arrête une nouvelle déposition de cuivre. A. Brochet et J. Petit ne voient dans cette dissolution qu'un fait analogue à la dissolution du zinc dans l'acide sulfurique.

En étudiant la variation du rendement en fonction de la densité de courant pour diverses fréquences, ils ont constaté (le cas *Ni*) qu'au-dessous de 100 périodes par seconde, le rendement s'élève brusquement, passe ensuite par un maximum et décroit d'autant plus rapidement que la fréquence est plus basse.

En employant le courant alternatif du réseau de lumière de notre ville, nous avons entrepris, en tenant compte de ce que nous venons de dire, une modeste étude sur la solution obtenue par la dissolution du cuivre dans le cyanure de potassium.

Après une série d'expériences, nous avons remarqué, que la solution obtenue se prête, dans certaines conditions, à son emploi comme bain pour en obtenir des dépôts galvaniques.

Nous signalons plus bas les résultats obtenus concernant la réalisation de quelques bains de cuivrage respectivement de laitonnage par contact.

Pour la dissolution du cuivre nous avons employé le courant alternatif du réseau de lumière transformé à l'aide d'un réducteur de courant à 9v.

Nous avons fait passer ce courant par un bac électrolithique contenant une solution de *CNK* à concentrations variables (0,25 gr. $^0/_0$ jusqu'à une solution saturée) en employant des électrodes formés de plaques de cuivre et une densité de courant à l'électrode de cca 7 amp./dm.^{2} Nous avons fait varier le temps de passage du courant par le bac de 15 minutes jusqu'à 8 heures.

La solution obtenue chauffé à 90^0C et même à l'ébulition (quand l'intensité employée est assez grande, le bain chauffe automatiquement par l'effet du passage du courant même par le bac) est un bain excellent pour le cuivrage par contact. Comme métal de contact nous avons employé l'aluminium. Nous avons obtenue des dépôts remarquables, adhérents et brillants sur des objets de fer, d'acier et de zinc.

On peut cuivrer les objets d'aluminium et même de zinc par leur simple introduction dans le bain.

Pour le cuivrage uniforme des objets plans et d'extension, nous avons fait mouvoir le métal de contact, pris sous forme de fil ou de plaque, sur leur surface.

Nous avons cuivré les objets de forme oblongue en les enveloppant d'une spirale de fil d'aluminium et en les introduisant dans le bain pendant quelques minutes.

Les fils de fer introduits dans ces bains et touchés avec un fil ou une plaque d'aluminium se cuivrent rapidement en se couvrant d'un dépôt assez beau et résistent.

Pour la préparation d'un bain de laitonnage par contact, nous avons remplacé un des électrodes de cuivre du bac mentionné, par un électrode de zinc. Le temps de passage du courant alternatif et du remplacement de l'électrode est fonction de la couleur du dépôt que nous voulons en obtenir. On peut encore obtenir le bain de laitonnage

par l'emploi d'un bain de cuivre au cuivrage du zinc. La couleur du dépôt obtenue varie en rapport avec la quantité de zinc passée en solution.

Les dépôts obtenus selon les procédés spécifiés à l'operation du cuivrage, sur les mêmes métaux, ont une belle couleur et sont assez adhérents et résistants.

Laboratoire d'Electrochimie
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 26 Octobre 1947)

Travaux cités

1. a) A. Brochet et J. Petit — Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 138 (1904), p. 419, t. 139 (1904), p. 1421, t. 139 (1904), p. 193.
b) Jean Escard — *Les industries électrochimiques*, p. 25—30. Paris, éditeur Gh. Béranger (1907).
c) W. Phanhauser — *Die elektrolytischen Metallniederschläge*, Berlin, Julius Springer p. 433 - 469, (1928) ;
d) A. Levasseur — *L'électrochimie et l'électrométallurgie*, Paris, Dunod, t. 1 p. 177—188 (1939).

NOUVELLE THÉORIE SUR L'ORIGINE DE L'ÉNERGIE DANS UN SYSTÈME CHIMIQUE

III

par

I. N. CIOCHINĂ et V. ABABII

6. – *L'énergie totale dans un système à deux ions.*

Dans la première partie de cette étude, l'un de nous [1]) a affirmé que c'est à l'effet Stark qu'on doit attribuer un rôle important dans ce qui regarde l'origine de l'énergie dans un système chimique. Dans la même étude, à la page 77, on est arrivé à l'équation (20) qui est :

$$h(\nu' - \nu) = -2n\mu_0 H\cos\alpha,$$

laquelle, par sa structure, représente l'énergie magnétique qui lie les deux ions, c'est-à-dire, l'énergie de l'affinité chimique. C'est à cette énergie magnétique qu'on doit l'état des corps, la coloration, la valence ou l'existence des composés chimiques nés de toute réaction chimique. Cette existence est le premier événement dans toute sorte de réaction chimique.

Conformément au raisonnement, fait à l'occasion de la discussion des formules (13), (14) et (15) par l'un de nous [2]), cette énergie représente seulement la moitié de l'énergie potentielle variable dans le système. L'autre moitié, est l'énergie qui se manifeste dans les réactions chimiques sous forme de „chaleur chimique de formation". Aux réactions plus violentes la fréquence de l'énergie radiante émise dans un système chimique, peut croître jusqu'à la fréquence correspondante aux rayons lumineux.

Au vecteur électrique du champ électromagnétique on doit les radiations lumineuses. Implicitement, au champ électrique devons-nous attribuer le deuxième événement important d'une réaction chimique, la chaleur chimique.

---

1) *I. Ciochină*, Nouvelle théorie... Ce „Bulletin", I, fasc. 1 (1946), p. 76.

2) Ibidem, p. 75.

L'un de nous [3]) a conçu le schéma le plus simple d'un système à deux ions et un électron duquel naissent des émissions électromagnétiques, dues au freinage et à l'accélération provoquée par le choc d'induction. Ces émissions nous les mesurons par la voie calorimétrique ou spectroscopique.

Par l'effet de Stark, les orbites électroniques reçoivent un supplément d'énergie ΔE, qui est donné par la formule d'Epstein, qui est :

$$\Delta E = -\frac{3h^2 n F}{8\pi^2 m e}(K_1 - K_2) \quad (1)$$ [4]),

où F est le champ électrique fort et variable et K_1 et K_2 sont des quanta azimutales.

C'est sous la forme ci-dessus que le formule (1) s'applique parfaitement au système électrodynamochimique (Ciochină), pour une charge nucléaire $Z = 1$.

Exprimons cette équation (1) dans des unités électromagnétiques, comme il suit :

$$\Delta E = -\frac{3h^2 n F}{8\pi^2 m e C_v}(K_1 - K_2). \quad (2)$$

Parce que :

$$C_v = \frac{e_1\ (\text{u. e. s.})}{e_2\ (\text{u.e.m.})} \quad (3)$$ (e_1 et e_2, les charges électriques élémentaires),

on remplace la valeur de C_v de (3) dans (2) et après la décomposition dans des termes mesurables, on obtient :

$$\Delta E = -3n\,\frac{h e_2}{4\pi m}\,\frac{h}{2\pi e^2}\,F(K_1 - K_2), \quad (4)$$

parce que : $e = e_1$.

L'équation (4) peut s'exprimer plus simplement ainsi :

$$\Delta E = -3n\mu_0 F\,\frac{h}{2\pi e^2}(K_1 - K_2). \quad (5)$$

où μ_0 est le magnéton de Bohr.

L'énergie totale correspondante aux deux événements de la réaction est, ainsi, donnée par la somme :

$$\Delta E_{\text{totale}} = 2n\mu_0 H\cos\alpha + 3n\mu_0 F\,\frac{h}{2\pi e^2}(K_1 - K_2), \quad (6)$$

qui a une structure strictement électromagnétique.

3) Ibidem, p. 72–73.

4) *Gaetano Castelfranchi.* Fisica Moderna, Milano (1945), p. 514.

L'un des nous[5]) a demontré l'identité entre le champ électrique F et la force électromotrice de décomposition électrolithique qui peut être exprimé par la formule:

$$F = E_{\lim} \text{ volt/cm} . \tag{7}$$

Pour justifier l'existence du magnéton et du moment angulaire $\frac{h}{2\pi}$, auquel on doit la polarisation de la lumière nous voulons montrer que dans toute perturbation d'un système électrodynamique ondulatoire nous les trouvons aussi, soit ensemble, soit le magnéton lui seul.

Dans les formules (30), (32) et (34) de l'un des nous[6]), nous constatons l'apparition du μ_0 et du $\frac{h}{2\pi}$. Si nous complétons le raisonnement fait à l'occasion de l'établissement de ces trois formules, on obtient:

a. – Si dans la formule de Bohr qui est:

$$\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 C_v}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{8}$$

on multiplie les deux membres de la formule (8) par $4C_v$ et on obtient après l'opération:

$$\nu = \frac{8\pi^2 me^5}{h h e_2 4 h C_v^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{9}$$

On obtient après la décomposition dans des termes mesurables l'expression suivante:

$$\nu = \frac{2\pi}{h}\,\frac{4\pi m}{h e_2}\,\frac{e^5}{4 h C_v^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{2\pi}{h} K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{10}$$

où si au lieu de ν nous prenons sa valeur, c'est-à-dire:

$$\nu = \frac{C_v}{\lambda}$$

et si on remplace cette valeur dans (10), on peut exprimer:

$$\frac{C_v}{\lambda} = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{2\pi}{h} K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{11}$$

et, enfin, on peut exprimer l'équation (11) dans des termes mesurables et observables, comme par exemple:

---

5) *I. Ciochină* et *G. Calistru*, Ce „Bulletin", I_2 (1946), p. 339.
6) *I. Ciochină*, Ce „Bulletin", I_1 (1946), p. 71. 80.

$$\lambda = \mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{C_v}{K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}. \tag{12}$$

b. Opérons sur l'équation suivante:

$$E = \frac{2(n^2+n)}{r^2 e} \mu_0 \frac{h}{2\pi}, \tag{13}$$

où on remplace r par sa valeur trouvée par l'un de nous [7]).

Après l'opération respective et après la décomposition de l'expression dans des termes mesurables ou observables on obtient:

$$E = \frac{2(n^2+n)}{\left(\frac{4n^2}{e_3}\mu_0 \frac{h}{2\pi}\right)^2 e} \mu_0 \frac{h}{2\pi} = \frac{(n^2+n)\,e^5}{n^4} \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{h}. \tag{14}$$

Si on prend: $E = h\nu = \frac{h C_v}{\lambda}$ alors on peut exprimer l'équation dans des termes mesurables et observables, comme il suit:

$$\frac{h C_v}{\lambda} = \frac{(n^2+n)\,e^5}{n^4} \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{h}, \tag{15}$$

d'où

$$\lambda = \mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{n^4 h C_v}{(n^2+n)\,e^5}. \tag{16}$$

c. – Dans le cas qu'on assimile l'atome d'hydrogène à un roteur solide, l'expression (13) se simplifie et s'exprime comme il suit [8]):

$$E = \frac{2n^2}{r^2 e} \mu_0 \frac{h}{2\pi}. \tag{17}$$

Si on remplace r par la même valeur de l'équation (14), après l'opération respective, on obtient:

$$E = \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{h} e^5. \tag{18}$$

Selon le même raisonnement fait à l'occasion de la discussion de la formule (15) on obtient:

$$\lambda = \mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{h C_v}{e^5}. \tag{19}$$

d. – L'équation entre les deux fréquences ν et ν' et entre la ra-

7) I. Ciochină, Ce „Bulletin", I_1 (1946), 79 et 80.
8) I. Ciochină, Ce „Bulletin", I_1 (1946), p. 79 et 80.

diation X primaire d'un côté et la radiation diffusée sous un angle donné d'autre côté dans l'effet Compton, est donnée par l'expression connue qui est la suivante:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{m C_v^2}(1 - \cos\theta)}. \tag{20}$$

Si nous remplaçons C_v^2 de (20) par sa valeur de (3) on obtient:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{m\frac{e_1^2}{e_2^2}}(1 - \cos\theta)}; \tag{21}$$

si on accorde l'attribut de la polarisation en divisant les deux membres de l'équation (21) avec $\frac{h}{2\pi}$ on obtient:

$$\frac{2\pi\nu'}{h\nu} = \frac{1}{\frac{h}{2\pi} + \frac{h e_2}{2\pi m e_1 C_v} h\nu(1 - \cos\theta)} = \tag{22}$$

$$= \frac{1}{\frac{h}{2\pi} + \mu_0 \frac{h\nu}{C_v e_1}(1 - \cos\theta)},$$

et si on fait passer 2π et $h\nu$ du premier membre dans le deuxième membre de l'équation (22) et on décompose en termes mesurables, on obtient:

$$\nu' = \frac{1}{\mu_0 \frac{2\pi}{C_v e_1}(1 - \cos\theta)}. \tag{23}$$

En multiipliant avec h, la constante de Planck, pour obtenir l'énergie émise avec la fréquence ν', on obtient:

$$h\nu' = \frac{1}{\mu_0} \frac{h}{2\pi} \frac{C_v e_1}{(1 - \cos\theta)}. \tag{24}$$

L'énergie de l'électron perturbé par l'effet Compton est donnée par la formule connue:

$$E_{cin} = h\nu \frac{1 - \cos\theta}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} = h\nu \frac{2\alpha\cos^2\theta}{(1 + \alpha)^2 \cos^2\theta}; \tag{25}$$

où α et implicitement E_{cin} peuvent être exprimés en fonction du magnéton, comme il suit:

$$\alpha = \frac{h}{m\, C_v \lambda}. \tag{26}$$

Si on remplace C_v de (26) par sa valeur de (3), on peut exprimer l'équation (26) comme il suit :

$$\alpha = \frac{h}{m \dfrac{e_1}{e_2} \lambda}. \tag{27}$$

Divisons les deux membres de l'équation (27) avec 2π et faisons passer 2π du premier membre dans le deuxième membre. Après, on décompose en termes observables et mesurables

$$\alpha = 2\mu_0 \frac{2\pi}{e_1 \lambda}, \tag{28}$$

où μ_0 est le magnéton de Bohr.

Maintenant il est facile de comprendre que si nous opérons, d'après le même raisonnement dans la formule fondamentale de l'effet Compton qui est :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m C_v}(1 - \cos\theta), \tag{29}$$

nous arrrivons à une expression en fonction du magnéton si nous mettons l'équation (29) sous la forme suivante :

$$\lambda' - \lambda = \frac{he_2}{me_1}(1 - \cos\theta). \tag{30}$$

Après la multiplication des deux membres de l'équation (30) par 2π et après avoir fait passer 2π du premier membre dans le deuxième et, enfin, après la décomposition de l'expression reçue en termes observables et mesurables on obtient :

$$\lambda' - \lambda = \frac{he_2}{2\pi m} \frac{2\pi}{e_1}(1 - \cos\theta) = 2\mu_0 \frac{2\pi}{e_1}(1 - \cos\theta). \tag{31}$$

e. – La formule de la longueur d'onde du corpuscule-onde a la structure de la formule de l'effet Compton, pour $\cos\theta = 0$ et, cela signifie qu'on peut exprimer cette formule de Louis de Broglie aussi, en fonction du magnéton.

Ainsi :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad \text{(Louis de Broglie)}. \tag{32}$$

Pour pouvoir l'exprimer en unités électromagnétiques, on doit raisonner comme il suit.

Parce que $\nu = \frac{C_v}{\lambda}$ il résulte que $\lambda = \frac{C_v}{\nu}$. Remplaçons cette valeur de λ dans (32) et on peut écrire:

$$\frac{C_v}{\nu} = \frac{\hbar}{m v} \tag{33}$$

Après le passage de C_v dans le deuxième membre, on obtient:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\hbar}{m v C_v} \tag{34}$$

Si on remplace C_v par sa valeur de (3) et qu'on multiplie les deux membres de l'équation (34) par $\frac{\hbar}{2\pi}$ et enfin qu'on opère, on obtient l'expression:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\hbar e_2}{2\pi m} \frac{2\pi}{e_1 v} = 2\mu_0 \frac{2\pi}{e_1 v}. \tag{35}$$

Si nous divisons les deux membres de l'équation (35) avec $\hbar$, la constante de Planck, et inversons l'expression obtenue, on aura:

$$\hbar\nu = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\hbar}{2\pi} e_1 v, \tag{36}$$

ou

$$\frac{\hbar C_v}{\lambda} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\hbar}{2\pi} e_1 v, \tag{37}$$

d'où on obtient:

$$\lambda = 2\mu_0 \frac{2\pi}{e_1} \frac{C_v}{v}. \tag{38}$$

Parce que v croit jusqu'à C_v à l'occasion de l'émission d'onde. Il faut faire la remarque suivante: le magnéton trouvé dans toutes les formules discutées plus haut, implique, dans sont existence d'entité caractéristique et invisible, des quantités déterminées e et m qui sont caractéristiques pour l'électron et $\hbar$ et C_v caractéristiques pour le photon.

Dans sa structure on trouve le spin $\pm\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2\pi}$ ou le moment angulaire $\frac{\hbar}{2\pi}$ qui est l'attribut spécifique du rayonnement visible. Alors il est bien explicable qu'il apparait partout où il s'agit de l'énergie magnétique, électrique, calorique, lumineuse et il est encore plus explicable si on lui attribue un rôle capital dans les systèmes tel qu'est le système à deux ions conçu par l'un de nous [9]).

9) I. Ciochină, Ce „Bulletin" I_1 (1946), p. 72–73.

On sait que, les oscillations des grains d'énergie impliquées dans le système sont des harmoniques simples des oscillations de celui-ci.

Les modifications qu'elles impliquent sont proportionnelles aux modifications de la grandeur cos $(2\pi\nu t + \varepsilon)$.

Pour éliminer la phase inobservable ε on a fait appel au théorème de Moivre, qui permet à la fois l'incorporation de toutes sortes de vibrations du système dans une matrice unique (Heisenberg).

Pour des raisons de simplification nous avons adopté un système à deux ions qui est symétrique par rapport aux deux cordonnées x, y.

Pour être conforme à la nature de l'événement il faut adapter une représentation symétrique par rapport aux quatres coordonnées x, y. z et ict du continuum et pour répondre à la question posée par la mécanique quantique moderne sur la probabilité qui existe qu'une particule se trouve dans un point donné ou se dirige sur une direction déterminée, il faut adopter le raisonnement suivant :

L'équation correspondante à ict a la forme donnée par Heisenberg comme il suit :

$$m C_v^2 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dt}; \tag{39}$$

En fournissant à chacun des deux membres de l'équation (39) un symbole sur lequel on puisse opérer, on a obtenu l'équation suivante :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2\pi i m C_v^2}{h}\psi, \tag{40}$$

avec sa solution par rapport à ψ qui est :

$$\psi = Ce^{-2\pi i \frac{m C_v^2}{h} t}. \tag{41}$$

Si on remplace la valeur de C_v par celle trouvée en (3), on obtient l'expression de ψ en fonction de magnéton comme il suit :

$$\psi = Ce^{-it\left(\frac{2\pi m \frac{e_1^2}{e_2^2}}{h}\right)} = Ce^{-it\left(\frac{2\pi m e_1^2}{h e_2^2}\right)} = Ce^{-it\left(\frac{2\pi m}{h e_2}\right)e_1 C_v}, \tag{42}$$

ou mieux :

$$\psi = Ce^{-it\left(\frac{2 C_v e_1}{\mu_0}\right)}. \tag{43}$$

Maintenant, il est facile de trouver l'expression de l'équation ondulatoire en fonction de magnéton, comme il suit :

Introduisons dans l'équation de Schrödinger, la valeur du ψ trouvée en (43) et on obtient :

$$(44) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Ce^{-it\left(\frac{2}{\mu_0} C_v e_1\right)}+$$

$$+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\, Ce^{-it\left(\frac{2}{\mu_0} C_v e_1\right)}=0.$$

Le terme $\frac{8\pi^2 m}{h_2}$ reçoit une signification plus précise et devient une expression opérative si on le multiplie et on le divise avec e_2 (u. e. m.).

Ainsi, on obtient de nouveau l'apparition de μ_0 et, cette fois-ci du $\frac{h}{2\pi}$ aussi, c'est-à-dire :

$$(45) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Ce^{-it\left(\frac{2}{\mu_0} C_v e_1\right)}+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h} e_2 (E-V)\, Ce^{-it\left(\frac{2}{\mu_0} C_v e_1\right)}=0.$$

Si on veut opérer sur la différence $E-V$, nous avons besoin de r, le rayon de l'orbite électrique exprimé en fonction du magnéton [10]. Ainsi :

$$(46) \qquad r=\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^2}\,(\text{Bohr}).$$

Dans notre système $Z=1$.

Si on exprime en u. e. m. et on multiplie les deux membres de l'équation de plus haut par 2, on obtient, après l'opération et après la décomposition en termes mesurables et observables, comme il suit :

$$(47) \qquad r=\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2 C_v}=\frac{n^2 h^2 e_2}{4\pi^2 m e^2 e_1}=\frac{h e_2 h}{4\pi m 2\pi}\,\frac{2n^2}{e_3},$$

10) *I. Ciochină*, Ce „Bulletin", I, fasc. 1(1946), p. 79, formule (34).

ou :

$$r = \mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}.$$

D'après le postulate de Bohr, on aura égalité entre la force centrifuge et l'attraction coulombienne, c'est-à-dire :

$$\frac{m v^2}{\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}} = \frac{e^2}{\left(\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}\right)^2}, \tag{48}$$

L'énergie cinétique de l'électron sera exprimé par l'équation suivante :

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{e^2}{\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}}, \tag{49}$$

et l'énergie potentielle V sera donnée par l'expression,

$$V = - \frac{e^2}{\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}}. \tag{50}$$

Donc

$$E_{\text{totale}} = \frac{e^2}{\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{4n^2}{e^3}} - \frac{e^2}{\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}} = - \frac{e^2}{\mu_0 \frac{\hbar}{2\pi} \frac{4n^2}{e^3}} \tag{51}$$

ou

$$E_{\text{totale}} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^5}{4n^2} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^5}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^2. \tag{52}$$

Si on a : $Z \neq 1$ alors on aura :

$$E_{\text{totale}} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^5}{4} Z \left(\frac{1}{n}\right)^2. \tag{53}$$

Ainsi la différence $E - V$ devient :

$$E - V = - \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^5}{4n^2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^5}{2n^2}. \tag{54}$$

Si on introduit dans (45) la valeur de $E - V$ trouvée dans (54), on obtient l'expression électrodynamo-ondulatoire suivante :

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) C e^{-it\left(\frac{2}{\mu_0} C_v e_1\right)} + \tag{55}$$

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

$$+\frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h}e_2\left[-\frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h}\frac{e^5}{4}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h}\frac{e^5}{2n^2}\right]Ce^{-it\left(\frac{2e_1}{\mu_0}C_v\right)}=0\,,$$

qui représente l'énergie transportée par les oscillations provoquées par l'émission électromagnétique d'un système tel qu'il a été conçu par l'un de nous [11]).

* * *

11) *I. Ciochină*, Ce „Bulletin", I, fasc. 1 (1946) p. 72—73.

IV*)

7. Si dans notre système, les deux deux ions transmettent réciproquement des radiations et si on suppose que s'est établi entre eux un état stationnaire (entropie maximum), au moins sur la direction (distance) la plus courte d'entre eux, alors c'est la formule de Planck qui peut être appliquée à un pareil cas.

Nous voulons exprimer cette formule en fonction du magnéton.

L'un de nous [12]) a trouvé pour la vitesse augulaire ω l'expression suivante

$$w = \frac{2\pi}{h}\frac{4\pi m}{h}\frac{\pi e^4}{hcn^3}. \tag{1}$$

Si on remplace au lieu de $2\pi\nu$ la valeur de (1), dans la formule de Planck, qui est:

$$\Delta E = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \tag{2}$$

on obtient:

$$\Delta E = \left(\frac{2\pi}{h}\frac{4\pi m}{h}\frac{e^4}{hcn^3}\right)^2 \frac{2\pi\nu}{c^3}\frac{h d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}. \tag{3}$$

Si on remplace $2\pi\nu$ dans (3), par sa valeur de (1), on obtient:

$$\Delta E = \left(\frac{2\pi}{h}\frac{4\pi m}{h}\frac{e^4}{hcn^3}\right)^3 \frac{\pi}{c^3}\frac{h d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}. \tag{4}$$

Si on multiple les deux membres de l'équation (4) par e^3 (u. e. m.), on obtient:

---

*) Par I. N. Ciochină et Radu Vasiliu.

12) I. Ciochină, Ce „Buletin", I_1 (1946), p. 80.

(5) $$\Delta E = \left(\frac{2\pi}{h}\frac{1}{\mu_0}\frac{e^5}{\hbar c}\right)^3 \frac{\pi}{n c^3} \frac{\hbar d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}$$

où $\mu_0 =$ le magnéton de Bohr.

8. *La chaleur spécifique des éléments et des composés chimiques.*

On sait que l'énergie cinétique d'un corps qui tourne autour d'un axe est donnée par la formule : $1/2\ I\ \omega_1^2$ (ω, la vitesse angulaire de rotation c'est-à-dire, l'angle décrit dans une seconde et I est le moment d'inertie par rapport à l'axe du système).

D'après la théorie des quanta on a :

(1) $$\int I\omega^2\, dt = nh$$

et comme : $\omega = 2\pi\nu$,

il est permis d'écrire :

(2) $$\int I\omega^2\, dt = I\, 4\pi^2\nu^2 \frac{1}{\nu} = nh$$

or (3) $$I\, 4\pi^2\nu^2 = n\hbar\nu;$$

nous obtenons pour ν l'expression suivante :

(4) $$\nu = \frac{nh}{4\pi^2 I}.$$

Si on veut exprimer ν en nombre d'ondes par cm., on peut écrire :

(5) $$\nu = -\frac{nh}{4\pi^2 cI}.$$

Pour obtenir la valeur d'une énergie on multiplie les deux membres de l'équation (5) par nh et on aura ainsi l'énergie de rotation qui est :

(6) $$\Delta E_r = -\frac{n^2\hbar^2 e_2}{4\pi^2 e_1 I}$$

or $I = mr^2$, si on remplace cette valeur dans (6), on obtient [13] :

(7) $$\Delta E_r = -\frac{n^2\hbar^2 e_2}{4\pi^2 e_1 m r^2}.$$

L'équation (7) s'écrit :

(8) $$\Delta E_r = -n^2 \frac{\hbar e_2}{4\pi m}\frac{\hbar}{2\pi}\frac{2}{r^2 e_1}.$$

13) Ibidem, I_1, p. 80.

La formule (8) représente la variation totale de l'énergie, on obtient l'énergie radiante, en divisant (8) par 2. Ainsi on aura :

$$\Delta E_r = -n^2 \frac{h e_2}{4\pi m} \frac{h}{2\pi} \frac{1}{r^2 e_1}. \tag{9}$$

Si on remplace r par sa valeur trouvée par l'un de nous [14]) ; c'est-à-dire :

$$r = \mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{2n^2}{e^3}$$

on obtient :

$$\Delta E_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{2\pi}{h} \frac{e}{4n^2}. \tag{10}$$

Le nombre de rotations par seconde est :

$$\nu = n\mu_0 \frac{C}{2\pi r^2 e_1} = n \frac{1}{2\pi r^2 e_2} \tag{11}$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$

et $e_2 =$ u. e. m.

Des vitesses intermédiaires sont exclues.

La valeur $\frac{\mu_0}{2\pi r^2 e_2}$ représente un seuil. Si ce minimum ne peut pas être réalisé par la force de translation, l'énergie de rotation des molécules des gaz ne peut pas croître.

9. *La chaleur spécifique des éléments et des composés chimiques solides.*

Le nombre des vibrations transversales dans les corps solides est donné par l'expression : $\frac{8\pi}{v_1^3} \nu^2 \, d\nu$ et le nombre des vibrations longitudinales est donné par l'expression : $\frac{4\pi}{v_2^3} \nu^2 \, d\nu$. Si nous considérons que ces vibrations sont (absorbées) ou émises par les systèmes rotatoires électroniques dans lesquels $\omega = 2\pi\nu$, on obtient pour le nombre total des vibrations l'expression suivante :

$$\frac{8\pi}{v_1^3} \nu^2 \, d\nu + \frac{4\pi}{v_2^3} \nu^2 \, d\nu = 2 \left[\left(\frac{2}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right) \left(\frac{2\pi}{h} \frac{4\pi m}{h} \frac{\pi e^2}{hc} \frac{e^2}{n^3} \right) \right] \nu \, d\nu. \tag{1}$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation (1) par e (u. e. m.), on obtient :

14) Ibidem, *I*, p. 79.

$$(2)\qquad \frac{8\pi}{v_1^3}\nu^2 d\nu + \frac{4\pi}{v_2^3}\nu^2 d\nu = 2\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\left(\frac{2\pi}{h}\frac{1}{\mu_0}\frac{\pi e^2}{hc}\frac{e^3}{n^3}\right)\right]\nu\, d\nu$$

où μ_0 est le magnéton et v_1 et v_2 sont les vittesses de propagation. D'après la théorie de Debye, toutes ces vibrations sont valables pour un domaine $0 - \nu_m$ (ν_m est la fréquence maximum) et leur nombre est $3N$ ($3N$ degrés de liberté).

Par analogie, la somme de toutes vibrations possibles est donnée par la relation :

$$(3)\qquad 3N = 2\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\left(\frac{2\pi}{h}\frac{1}{\mu_0}\frac{\pi e^2}{hc}\frac{e^3}{n^3}\right)\right]\int_0^{\nu_m}\nu d\nu .$$

En intégrant dans le deuxième membre on obtient :

$$(4)\qquad 3N = \left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\left(\frac{2\pi}{h}\frac{1}{\mu_0}\frac{\pi e^2}{hc}\frac{e^3}{n^3}\right)\right]\nu_m^2 .$$

Etant donné qu'à chaque fréquence correspond d'après Planck, une énergie élémentaire :

$$(5)\qquad E_0 = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1} .$$

L'énergie totale possedée par le corps est donnée par le produit :

$$(6)\qquad E_t = 2\int_0^{\nu_m}\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\left(\frac{2\pi}{h}\frac{1}{\mu_0}\frac{\pi e^2}{hc}\frac{e^3}{n^3}\right)\right]\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}\nu d\nu$$

où μ_0 est le magnéton, qui apparait aussi dans la théorie de Debye.

10. — *Les spectres des molécules chimiques.*

Prenons en considération une molécule biatomique qui représente le cas le plus simple.

Comme on sait, l'énergie de celle-ci est donnée par la somme de l'énergie du complexe électronique E_e, l'énergie de mouvement d'oscillation du noyau E_n et l'énergie de rotation de l'ensemble, E_r.

Parce que l'oscillation donne lieu à une serie des états stationnaires, exprimée par la formule :

$$(1)\qquad E = n h \nu_0$$

avec les valeurs discontinues pour $n = 1,2,3,4,\ldots$, tandis que la rotation, comme on l'a déjà vu, donne lieu à la série :

$$(2)\qquad E_r = \frac{h^2 n^2}{8\pi^2 I}$$

où I est le moment d'inertie de la molécule et du noyau.

Si nous opérons dans (2) d'après le raisonnement de l'un de nous [15]), appliqué plus haut, on obtient pour l'énergie de rotation pour la molécule biatomique la valeur donnée par la formule suivante :

$$E_r = \frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h}\frac{e^5}{4n^2}. \tag{3}$$

C'est ainsi que l'énergie totale de la molécule, en fonction du magnéton est donnée par la formule :

$$E_t = E_e + nh\nu_0 + \frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h}\frac{e^5}{4n^2} \tag{4}$$

où μ_0 est le magnéton de Bohr.

Si nous mettons la formule (30) de l'un de nous [16]), sous la forme suivante :

$$\nu = \frac{4\pi m}{he_2}\frac{2\pi e^2}{hc}\frac{e^3}{4h}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{5}$$

et nous multiplions les deux membres de l'équation (5) par h, la constante de Planck, on obtient :

$$h\nu = \frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi e^2}{hc}\frac{e^3}{4}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{6}$$

On constate que dans la formule (6) on a le terme $\frac{2\pi e^2}{hc}$, qui est la constante de la structure fine, qui peut se calculer en fonction du magnéton comme suit :

$$\frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{4\mu_0 h\nu}{e^3\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)} = 7{,}28.10^{-3}. \tag{7}$$

* * *

15) I. Ciochină, Ibidem, I, 79 (formule 32). aussi Chap III, II, fasc. 2 (1947).
16) Ibidem, I_1, 79.

V.*)

1. – Nous avons considéré un ion autour duquel tourne un seul électron et que nous approchons de celui-ci, à une distance convenable, un ion chargé d'électricité de signe contraire.

A la suite de l'exposé fait par moi [17]), ou en colaboration avec mes élèves, l'image du système doit être décrit comme plus bas.

Le champ électrique entre les deux ions de signe contraire sera inhomogène si on considère les ions avec une forme sphérique et volume limitatif.

L'électron avec son spin, (Goudsmidt et Uhlenbeck), en s'approchant de l'ion voisin, aura à supporter de la part de celui-ci un effet accélérant ou ralentissant conformément au signe de sa charge élecrique et simultanément l'ion voisin sera influencé d'une manière correspondante en supportant un choc d'induction.

L'attraction ou la répulsion de l'électron equivaut à un déplacement vers le noyau ou en sens contraire.

Etant donné que le champ électrique créé par l'ion voisin es inhomogène, le circuit électronique supportera, lui aussi, un choc d'induction et le spin à son tour sera sérieusement perturbé.

En un mot, les deux ions auront à supporter des modifications énergétiques qui sont proportionnelles à l'intensité du champ pérturbateur.

La direction du mouvement de l'électron par rapport au ion voisin changeant et, tout-à-la-fois, intensité du champ dans lequel „l'électron-aimant" se déplace, variant sensiblement, on notera la naissance d'un champ magnétique perturbateur du système entier.

Les deux ions se perturbent réciproquement par l'intensité, direction et sens du champ produit réciproquement, et le résultat de cette influence se manifeste par des phénomènes chimiques ou chimiques-physiques caractéristiques.

---

*) Par I. N. Ciochină.

17) I. Ciochină, Ce „Bulletin".

Il s'agit ainsi d'un système électrodynamique dont nous voulons établir le fonctionnement et l'application à la chimie.

Réduit à l'image la plus simple et la plus exacte, *notre système est un „électron-aimant" rotante dans un champ magnétique ou électrique inhomogène.*

La force exercée par le champ électrique inhomogène, F, qui domine l'espace d'entre les deux ions est rendue par la formule :

(1) $P = e\,dF$ (e = charge élémentaire d'électricité)

dF = la variation du champ F.

Pendant la traversée du champ F il se produira un champ magnétique soit qu'il s'agit d'une accélération ou d'un ralentissement de l'électron.

A partir de ce moment l'électron marquera les effets électromagnétiques de l'inertie, c'est-à-dire ; la masse m.

Cette masse décrira, sous l'influence du champ magnétique un segment de trajectoire parabolique, sur la traversée, comme un objet qui tombe sous l'influence du champ de gravitation.

L'image étant identique, nous exprimerons son accélération sur ce segment comme on exprime l'accélération de gravitation, c'est-à-dire :

$$\gamma_g = \frac{eF}{m}. \tag{2}$$

Si le champ magnétique H ou F agit d'une manière continue, la trajectoire prendra nécessairement une forme circulaire ou par rapport à l'action de l'ion voisin, une forme elliptique.

L'éxistence d'une orbite circulaire est l'attribut d'un champ magnétique. Mais sur une orbite circulaire, l'accélération est rendue par la formule :

$$\gamma_u = \frac{w_1 - w}{dt} \quad \text{et} \quad \gamma_{ur} = \frac{rw_1 - rw}{dt}, \tag{3}$$

où γ_{ur} = l'accélération angulaire pour le rayon r et w_1 et w représentent la vitesse finale et initiale de l'électron.

En tenant compte des considérations faites sur la formule (2) on peut déduire :

$$\gamma_g = \gamma_{ur}. \tag{3'}$$

Si on opère dans les formules (2) et (3) conformément à la formule (3'), il résulte :

$$m\gamma_g = e\,dF \quad \text{et} \quad \frac{m(rw_1 - rw)}{dt} = e\,dF\,r$$

ou, après le passage du dt dans le deuxième membre l'on obtient:

(4) $$m(rw_1 - rw) = e\,dF\,r\,dt.$$

Des champs maxwelliens sont marqués par les formules suivantes:

(5) $$F = H = \frac{e\gamma}{C^2 d} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{rw_1 - rw}{dt} \text{(Hertz)}$$

Alors, il est tout-à-fait juste de remplacer F par H dans la formule (4) et l'on obtient:

(6) $m(rw_1 - rw) = e\,dH\,r\,dt.$ $dH =$ la variation du champ H.

Si on multiplie, les deux membres de la formule (6) par rw et si l'on considère avec grande approximation (qui sera corrigé ulrérieurement) que: $rw_1\,rw = rw_1^2$ et $rw^2 \neq rw^2$, on obtient la différence des deux énergies, c'est-à-dire:

(7) $$m(rw_1)^2 - m(rw)^2 = e\,dH\,r^2\,w\,dt.$$

et comme $dt = 1$, la formule (7) se simplifie comme suit:

(8) $$m(rw_1)^2 - m(rw)^2 = e\,dH\,r^2\,w.$$

Pour rendre la formule (8) susceptible d'intérpretation par la voie quantique et ondulatoire, il faut procéder comme suit:

En partant de la formule (8), on constate que le deuxième membre représente la force gagnée ou perdue par l'électron à la suite de l'accélération ou à la suite du ralentissement dans le champ magnétique.

C'est cette force qui provoque le deplacement ou la „saute" de l'électron vers le noyau ou dans le sens contraire, alternativement, provoquée par la force de rappel sur l'orbite stationnaire et parce que on a à faire à des champs ayant direction et sens, nous sommes obligés d'écrire l'équation (8) comme suit:

(9) $$m(rw_1)^2 - m(rw)^2 = \pm e\,dH\,r^2\,w.$$

Pour remplacer l'impulse mécanique du moment de rotation, nous l'éliminons provisoirement, en divisant les deux membres de la formule (9) par mr^2w et l'on obtient:

(10) $$w_1 - w = \pm \frac{e}{m}\,dH,$$

mr^2w est lié au nombre quantique secondaire l par la relation suivante:

(11) $$mr^2w = l\,\frac{h}{2\pi}.$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation (10) par $\frac{lh}{2\pi}$ pour

obtenir l'équation d'une différence d'énergie quantifiée, on obtient:

$$(12) \qquad \frac{lh}{2\pi}(w_1 - w) = \pm \frac{lh}{2\pi}\frac{e}{m} dH$$

or $\frac{w}{2\pi} = \nu$ l'équation (12) peut être exprimée plus simplement:

$$(13) \qquad \frac{h(\nu_1 - \nu)}{c} = \pm \frac{he}{2\pi mc} dH$$

c = la vitesse de la lumière et ν est exprimé en nombre d'ondes par centimètre.

La formule (13) représente la variation totale de l'énergie cinétique de l'électron dans un champ magnétique H. Or, d'après le postulat de Bohr, c'est seulement la moitié de cette variation qui se transforme en énergie radiante, l'autre se transforme en énergie potentielle. En conclusion: la variation de l'énergie de l'électron rotante dans un champ magnétique est également partagée entre le corpuscule et l'onde qui l'accompagne.

Par conséquent, il résulte de (13) que le quantum qu'on doit attribuer au corpuscule est rendu par la formule:

$$(14) \qquad E_c = \frac{h(\nu_1 - \nu)}{2c} = \pm \frac{1}{2}\frac{he}{2\pi mc} dH,$$

et le quantum qu'on doit attribuer à l'énergie radiée est rendu par l'expression identique qui se confond avec l'expression du corpuscule comme l'onde se confond avec celui-ci, c'est-à-dire:

$$(15) \qquad E_r = \frac{h(\nu_1 - \nu)}{2c} = \pm \frac{1}{2}\frac{he}{2\pi mc} dH.$$

Le deuxième membre de cette formule contient la caractéristique $\frac{h}{2\pi}$ de la polarisation ou $\pm \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, le spin, les caractéristiques de l'électron e et m, et c laquelle avec $\frac{h}{2\pi}$ sont les caractéristiques du photon.

L'ensemble de ces caractéristiques c'est-à-dire $\frac{he}{4\pi mc}$ représente le magnéton, caractéristiques des phénomènes magnétiques.

L'équation (15) peut être exprimée sous une forme plus simple comme suit:

$$(16) \qquad E_r = \frac{h(\nu_1 - \nu)}{2c} = \pm \mu_0 \, dH.$$

ou μ_0 = le magnéton de Bohr.

Un autre fait surprenant est que, si on divise les deux membres de l'équation (16) par h, la constante de Planck, on obtient:

$$(17) \qquad \frac{\nu_1 - \nu}{2c} = \pm \frac{\mu_0}{h} dH,$$

où, le deuxième membre de l'équation représente de la manière la plus fidèle, l'effet Zeemann, c'est-à-dire:

$$(18) \qquad \pm \frac{\mu_0}{h} dH = \pm \frac{e}{4\pi m} dH$$

or, comme on a vu [18]);

$$F \equiv H (F \text{ en u. e. s et } H \text{ en u. e. m.})$$

et d'après (1)—(15) on aura pour l'effet Stark:

$$(18') \qquad \frac{\nu_1 - \nu}{2c} = \pm \frac{\mu_0}{h} dF.$$

Vérifions maintenant le raisonnement énoncé plus haut:

a. Dans un champ magnétique d'intensité H, on doit rapporter le mouvement de l'électron à un système de comparaison animé d'un mouvement uniforme (ou précession) de vitesse angulaire, $w = \frac{eH}{2mc}$ (e en u. e. s.). pour avoir les orbites que l'on a en l'absence de champ. Pour la fréquence ν d'un pareil système, exprimée en nombre des vibrations par cm nous aurons:

$$(19) \qquad \frac{\nu}{c} = \frac{e\,dH}{4\pi m c}.$$

Pour une variation de la fréquence de $\frac{\nu_1}{c}$ à $\frac{\nu}{c}$ on aurs:

$$(20) \qquad \frac{\nu_1}{c} - \frac{\nu}{c} = \frac{eH'}{4\pi m c} - \frac{eH}{4\pi m c} = \frac{e}{4\pi m c}\left(H' - H\right) = \frac{e\,dH}{4\pi m c}.$$

Pour obtenir l'équation d'une énergie on doit multiplier les deux membres par h, la constante de Planck, et on obtient:

$$(21) \qquad \frac{h(\nu_1 - \nu)}{c} = \frac{he}{4\pi m c} dH \text{ ou } \frac{h(\nu_1 - \nu)}{c} = \mu_0 \, dH.$$

18) Ibidem, Chap III.

Si on veut préciser que .

$$\frac{h(\nu_1 - \nu)}{c} = E_r \ (E_r = \text{l'énergie radiante du système})$$

il faut exprimer :

$$\frac{h(\nu_1 - \nu)}{2c} = \frac{he}{4\pi mc} dH = \mu_0 dH \tag{22}$$

La formule (22) est identique à la formule (16) de plus haut.

b. Dans le même champ magnétique H, le rayon ou la demi-valeur du grand axe de l'ellipse sur laquelle l'électron-aimant se déplace est donné par la méthode des spectres corpusculaires.

Appliquons-la à nos calculs, comme suit. Le rayon r a la valeur :

$$r = \frac{mv}{He}. \tag{23}$$

Du moment que l'„électron-aimant" dans son mouvement sur une direction quelconque est solicité par un champ magnétique variable dH, v, devient rv = vitesse angulaire et la valeur du rayon est exprimée plus précisément par l'expression suivante :

$$r = \frac{mrv}{dHe} \tag{24}$$

Si on remplace la valeur de r de la formule (24) dans la formule (6) on obtient :

$$\frac{m^2 w_1^2}{dHe} = \frac{m^2 w^2}{dHe} = mw\,dt. \tag{25}$$

Pour obtenir la différence de deux énergies, c'est-à-dire la variation de l'énergie dans le système, multiplions par le produit :

$$\frac{mw}{He} - \frac{He}{mc} = \frac{w}{c} = \frac{dHe}{mc^2}, \tag{26}$$

et on obtient ;

$$\frac{mw_1^2 - mw^2}{c^2} = \frac{w\,dHe\,dt}{c^2} \tag{27}$$

ou plus simplement :

$$\frac{mw_1^2 - mw^2}{c^2} = \frac{w\,dHc}{c^2}. \tag{28}$$

Divisons les deux membres de l'équation (28) par mw et si on

note avec grande approximation que $m w_1 w = m w_1^2$ et quand même $m w_1^2 \neq m w^2$, on obtient :

$$\frac{w_1 - w}{c^2} = \frac{d H e}{m c^2}, \tag{29}$$

et si on multiplie les deux membres de l'équation (29) par c^2, on obtient une équation encore plus simple, c'est-à-dire :

$$w_1 - w = \frac{e}{m} d H . \tag{30}$$

Si on multiplie les deux membras de l'équation (30) par l'impuls du moment de rotation quantifié on obtient :

$$\frac{h}{2\pi}(w_1 - w) = \frac{h}{2\pi}\frac{e}{m} \cdot d H \tag{31}$$

On sait que $\frac{w}{2\pi} = \nu$, ainsi on peut exprimer :

$$\frac{h(\nu_1 - \nu)}{2c} = \frac{he}{4\pi mc} dH = \mu_0 dH . \tag{32}$$

Si on divise les deux membres par 2 et si on exprime ν en nombre des vibrations par cm, on obtient :

$$\frac{h(\nu_1 - \nu)}{2c} = \frac{h e}{4\pi m c} d H = \mu_0 d H. \tag{33}$$

L'expression (33) est identique à l'expression (16) et (22) qui ont étés obtenues par des voies différentes, ce qui signifie que le raisonnement fait autour de la formule (16) est parfaitement juste. Pour le cas où dans le plan de révolution de l'électron il existe n ions ou électrons, (n champs inhomogènes), la fréquence de l'onde qui nait du système croît aussi, c'est-à-dire ;

$$\nu_1 - \nu = \pm 2 n c \frac{\mu_0}{h} d H, \tag{34}$$

et en général, quand la direction des plans de révolution de l'électron fait un angle „α" avec la direction du champ perturbateur, on embrasse tous les cas possibles si on met, l'équation (16), (22) ou (33), sous la forme :

$$h(\nu_1 - \nu) = \pm 2 n \mu_0 c d H \cos\alpha , \tag{35}$$

où $n = n_2 - n_1$.

Par la voie spectroscopique et avec la formule (16) on aurait,

dans le cas de l'hydrogène, la possibilité de controler le champ perturbateur H, or, si on connaît celui-ci de calculer μ_0 et $\hbar$.

2. – Par différentes démonstrations, nous avons prouvé, que la valeur du champ H dans les molécules (ions) chimiques est de l'ordre du 10^8. Le rayon r de la trajectoire de l'électron dans un champ magnétique est donné par la formule connue :

$$r = \frac{mv}{He} \tag{36}$$

En passant de l'état stationnaire à l'état de transition l'électron-aimant tournant doit varier sa vitesse v en croissant jusqu'au maximum possible, c. Alors, à l'état de transition il est permis d'écrire la relation (36) sous la forme :

$$r = \frac{mc}{He}, \text{ d'où } H = \frac{mc}{re} (e, \text{ en u.e.s.}). \tag{37}$$

En sachant que le champ H est atribué à un couple de deux ions on multipliera le résultat de (37) par la moitié du nombre d'Avogadro et, on divisera par 22412 cc, pour obtenir la valeur de H en Gauss /cm^3 qui pour le système (analogue à l'hydrogène) est exactement de l'ordre du 10^8.

3. – *La théorie de l'émission quantique dans un champ magnétique.*

Si nous considérons que les deux ions de notre système transmettent réciproquement des radiations et que, entre eux, s'est déjà établi un état stationnaire (entropie maximum), au moins sur la distance la plus courte qui les réunit, on pourra décrire l'événement par la formule de Planck laquelle sera modifiée d'une manière correspondante comme suit :

$$\Delta E/_{cm^2} = \frac{8\pi\nu^2}{C^3} \hbar\nu \frac{d\nu}{e^{\frac{\hbar\nu}{KT}} - 1} \tag{38}$$

et si on remplace la valeur de $2\pi\nu$ de la formule (38) par sa valeur en fonction de la variation du champ magnétique dH, c'est-à-dire $v = \frac{e\,dH}{2mc}$, on obtient :

$$\Delta E/_{cm^2} = \frac{e\,dH}{2mc} \frac{4\nu}{C^3} \hbar\nu \frac{d\nu}{e^{\frac{\hbar\nu}{KT}} - 1}. \tag{39}$$

Or, aqrès la multiplication par 2π, on obtient :

$$\Delta E/_{cm^2} = \frac{h\,e\,dH}{4\pi m c}\,\frac{8\pi\nu^2}{C^3}\,\frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}. \tag{40}$$

ou, enfin :

$$\Delta E/_{cm^2} = 2\mu_0\,d\,H\,\frac{4\pi\nu^2}{C^3}\,\frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}. \tag{41}$$

Comme on le voit il apparait le magnéton μ_0.

4. – *La chaleur spécifique des éléments chimiques solides.*

Ailleurs [19]) nous avons affirmé que : „le problème de la chaléur spécifique des éléments et des composés chimiques peut être élucidé si l'on considère que la chaleur spécifique est dans le domaine des radiations caloriques ce que la couleur est dans le domaine des radiations visibles.

C'est-à-dire, par l'interférence sélective des rayons caloriques incidentes avec les ondes atomares il résulte la chaleur spécifique", cela a été éxposé en detail dans cette même étude [20]).

La couleur et la chaleur spécifique des éléments ont la même définition physique.

On a vu [21]), que le nombre total des vibrations (transversales et longitudinales) dans un corps solide pour l'intervalle $\nu - \nu + d\nu$, est donné par l'expression connue :

$$n_t = \frac{8\pi}{v_1^3}\nu^2\,d\nu + \frac{4\pi}{v_2^3}\nu^2\,d\nu, \tag{42}$$

v_1 et v_2 sont les vitesses de propagation.

Si on remplace $2\pi\nu$ par la valeur de la vitesse angulaire dans un champ magnétique on obtient le nombre de vibrations possibles :

$$\frac{8\pi}{v_1^3}\nu^2\,d\nu + \frac{4\pi}{v_2^3}\nu^2 d\nu = 2\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\frac{e\,dH}{2mc}\right]\nu d\nu. \tag{43}$$

D'après la théorie du Debye toutes les vibrations ont un domaine pour les fréquences de $0 - \nu_m$ (ν_m est une limite maximum) et leur nombre total est $3N$, ($3N$ degrés de liberté). La somme de toutes les vibrations possibles est donnée alors par l'expression suivante :

19) Ibidem, I, (1946), p. 87.

20) Ibidem, p. 81.

21) „ Chap. IV.

$$(44)\quad 3N = 4\pi\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\int_0^{\nu_m}\nu^2 d\nu = 2\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\frac{dHe}{2mc}\right]\int_0^{\nu_m}\nu d\nu$$

Après l'intégration, on obtient:

$$(45)\quad 3N = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\nu_m^3 = \left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)\frac{dHe}{2mc}\right]\nu_m^2.$$

Conformément à la théorie de Planck, chaque vibration avec une x fréquence ν aura l'énergie moyenne, donnée par la formule:

$$(46)\quad E_{mo} = \frac{h\nu}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}-1}}.$$

Ainsi, l'énergie totale possedée par le corps sera donnée par le produit:

$$(47)\quad E_t = 2\int_0^{\nu_m}\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^2}\right)\frac{he}{2\pi mc}dH\right]\nu d\nu\,\frac{h\nu}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}-1}} =$$

$$= 2\int_0^{\nu_m}\left\{\left[\left(\frac{2}{v_1^3}+\frac{1}{v_2^3}\right)2\mu_0\, dH\right]\right\}\nu d\nu\,\frac{h\nu}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}}-1}.$$

Voilà la nouvelle formule qui résulte de la théorie du Debye après l'application de notre raisonnement. Cette formule représente mieux la réalité physicochimique et conduit à des résultats aussi exacts que ceux de la formule de Debye.

La chaleur spécifique aux gaz.

Si dans le raisonnement que nous avons fait dans ce même Bulletin [22] nous remplaçons r par sa valeur conditionnée du champ magnétique H, on obtient pour l'énergie du seuil l'expression suivante:

$$(48)\quad \Delta E = 4n^2\mu_0^3\, dH^2\,\frac{2\pi}{h}\,\frac{1}{he_1},$$

Les spectres molécullaires.

Si on utilise le même principe dans notre raisonnement, on obtient pour l'énergie de rotation limite, l'expression suivante:

$$(49)\quad \Delta E_r = 4n^2\mu_0^3\, dH^2\,\frac{2\pi}{h}\,\frac{1}{he_1},$$

(48) est identique à (49).

5. – *L'énergie totale dans nôtre système à deux ions.*

Dans les réactions chimiques on a à faire à deux événements importants; L'un qui consiste dans le changement de l'état physique des corps entrés en réaction, c'est-à-dire la naissance de nouveaux corps à la suite de l'action de „l'affinité chimique".

Cet événement est dû à l'énergie magnétique et sa structure est representée par la formule suivante:

$$h(\nu_1 - \nu) = -2n\mu_0 \, dH \cos\alpha. \tag{50}$$

Comme on l'a vu, c'est seulement la moitié de la transformation de la variation de l'électron-aimant dans un champ magnétique variable dH; l'autre moitié se transforme en énergie radiante, qui est en général, la chaleur chimique de formation et qui correspond au deuxième événement important qui a fréquemment lieu, dans toute réaction.

C'est au vecteur électrique qu'on attribue la polarisation et c'est au champ électrique variable dF qu'on doit attribuer la chaleur chimique de formation et l'expression la plus simple de cet événement parfaitement semblable à celui qui se passe dans le champ magnétique et déduite de la formule d'Epstein, comme on l'a vu déjà:

$$h(\nu_1 - \nu) = -3n\mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{dF}{e}(K_1 - K_2). \tag{51}$$

La variation totale de l'énergie dans une réaction des deux ions sera:

$$\Delta E_{tot} = 2n\mu_0 \, dH \cos\alpha + 3n\mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{dF}{e}(K_1 - K_2) \quad (dF, \text{ en u. e. s.}) \tag{52}$$

où

$$2n\mu_0 \, dH \cos\alpha = -3n\mu_0 \frac{h}{2\pi} \frac{dF}{e}(K_1 - K_2).$$

La formule (52) représente un événement symétrique par rapport à deux coordonnées, x et y. Si nous adoptons l'événement réel qui est symétrique par rapport à quatre coordonnées x, y, z et ict du continuum, on a, d'après Heisenberg, l'équation correspondante sous la forme suivante:

$$mc^2 = -\frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dt}, \tag{53}$$

si on fournit à chaque membre de l'équation (53) un symbole sur lequel ils peuvent opérer, on a obtenu:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2\pi i m c^2}{h} \psi, \tag{54}$$

22) v. Chap. III.

ou, d'après ce que nous avons exposé jusqu'ici, la formule (54) peut être mise sous la forme suivante :

$$(55) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{2\pi i m c}{h e_2} e_1 \psi \,, \quad (e_2 \text{ en u. e. m. et } e_1 \text{ en u. c. es.})$$

avec sa solution par rapport a ψ qui est :

$$(56) \qquad \psi = Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)}.$$

Le calcul des matrices est basé sur un système à deux entrées qui n'est pas seulement semblable, mais coïncide parfaitement avec notre système à deux ions pulsatoires, qui par l'émission quantique s'influencent réciproquement.

Pour décrire l'état circulatoire quantique entre les deux stations, les deux ions, on peut faire appel à la formule de Schrödinger modifiée d'uné manière correspondante.

Ainsi, on obtient l'expression suivante :

$$(57) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\, Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)} = 0$$

la terme $\frac{8\pi^2 m}{h^2}$ devient une expression de facteurs observables si on le multiplie est on le divise par e_2 (u. e. m.). Après l'opération et la décomposition en termes observables on obtient :

$$(58) \qquad \frac{8\pi^2 m e_2}{h^2 e_2} = \frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h} e_2 \,,$$

On remplace la valeur de $\frac{8\pi^2 m}{h^2}$ de (58) dans (57) et on obtient :

$$(59) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)} \frac{1}{\mu_0}\frac{2\pi}{h} e_2 (E - V)\, Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)} = 0.$$

Parce que pour le cas le plus simple et $\cos\alpha = 1$ on a :

$$E = 2\mu_0 dH + 3\mu_0 \frac{h}{2\pi}\frac{dF}{e_1}$$

et comme $V = -\mu_0 dH$ alors : $-V = +\mu_0 dH$.

La différence $E - V$ devient :

$$(60) \qquad E - V = 3\mu_0 dH + 3\mu_0 \frac{h}{2\pi}\frac{dF}{e_1}.$$

Si on remplace la valeur de $E - V$ de (60) dans (59) on obtient :

$$(61)\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)}+3\left(\frac{2\pi}{h}e_2\,dH+\frac{dF}{C_v}\right)Ce^{-it\left(\frac{2e_1 C_v}{\mu_0}\right)}=0.$$

La formule (59) est la formule ondulatoire d'un système électrodynamique à deux ions.

Laboratoire d'Electrochimie
près de la Faculté de Chimie Industrielle
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 3 Septembre 1947)

NOTES SUR LA BIOLOGIE ET LES MOYENS DE DESTRUCTION DU TANYMECUS DILATICOLLIS GYLL

(„Gârgârița porumbului")

par

CLEOPATRA CATRINICI

Il s'agit d'un Cuculionide qui fut découvert en 1834 par Gyllhardt et mentionné ensuite par Reitter (13), Steiner (15) et Winkler (16).

En Roumanie ce sont Fleck (7) et Montandon (10) qui l'ont signalé dans quelques localités de la Munténie et de la Dobroudja, et le premier auteur donne, dans un travail manuscrit, une esquisse sur la distribution de cette espèce chez nous.

A nos connaissances il n'existe dans la bibliographie que peu de données concernant la biologie de ce Curculionide. Les auteurs ont montré en échange beaucoup d'intérêt pour la répartition géographique et pour les dégâts produits par cet insecte.

Nous avons entrepris en 1941 des recherches sur le développement postembryonnaire, la biologie et les moyens de destruction de cet insecte si nuisible aux cultures de maïs. Nous avons publié de 1942 à 1944 une partie des résultats de nos recherches concernant surtout: la détermination des stades larvaires (3), les caractères morphologiques du I-er stade larvaire, la répartition géographique (4) et les dégâts causés par cet insecte (5), qui est un ennemi redoutable du maïs. En effet, lorsque les invasions sont massives, les ravages produits sont tellement grands, qu'on doit remplacer complètement par d'autres plantes de culture le maïs semé sur des vastes étendues.

Vulgairement appellé „gândac cenușiu", „gârgârița de porumb" ou „rățișoară" (= caneton, petit canard), *Tanymecus dilaticollis* Gyll, n'est pas la seule espèce du genre vivant en Roumanie, où l'on a constaté le présence de trois autres espèces voisines. Ce sont: *Tanymecus palliatus F*, *Tanymecus montandoni* Reitt. et *Tanymecus sitonoides* Solari.

La première espèce (*T. palliatus*) a été signalée chez nous par différents auteurs, comme le sont: Borcea (1) Cămărăşescu (2) Fleck (loc. cit.), Ionescu-Siseşti (8), Knechtel (9), Montandon (loc. cit.) et Peneke (11). Les deux autres espèces ont été signalées par Winkler (16).

Tanymecus dilaticollis a été jusqu'à présent mentionné en Asie-Mineure, en Turquie, en Grèce et en Roumanie. Dans ce dernier pays il a été trouvé dans les provinces suivants: Munténie (départements de Brăila, Ilfov, Dâmboviţa, Vlaşca, Ialomiţa, Romanaţi, Mehedinţi), Moldavie (départ. de Tutova et de Covurlui), Dobroudja (départ. de Tulcea et de Constanţa).

Ce petit insecte, mesurant de 5 à 8 mm de long, a une coloration cendrée, un corps ovoïde allongé, une tête et un rostre courts, un corselet sous-trapézoïde. Il vit sur le maïs en association avec l'espèce voisine *T. Palliatus* dont il se distingue, entre autres, par sa taille plus petite, le premier article de l'antenne plus court, ainsi que par la forme sous-trapézoïde du pronotum. Nous remarquerons aussi que le nombre des écailles est plus grand que celui des poils (fig. 1 et 2) chez *T. dilaticollis*. Il est souvent représenté par un nombre tellement grand d'individus, qui envahissent le maïs, par rapport à l'autre espèce qui vit sur la même plante hôte, qu'on est obligé d'admettre qu'il est beaucoup plus nuisible.

Biologie

Dans les environs de Bucarest les premiers individus adultes font leur apparition dans la seconde moitié du mois d'avril ou au début du mois suivant. Dans les régions à végétation plus précoce comme par exemple la plaine du Bărăgan (départ. de Ialomiţa) l'époque de l'apparition des adultes coïncide avec le mois de mars.

Les imagos se trouvent soit isolés soit en grouppes de 4 à 12 individus, à la base des tiges de maïs ou cachés sous les mottes de terre. Ils se déplacent en marchant, on ne les a jamais vu voler. Lorsqu'Ils sont accrochés aux plantes, au moindre frôlement ils se laissent tomber brusquement à terre, comme le font d'ailleurs beaucoup d'autres insectes. Quelquefois il suffit d'un petit frôlement pour qu'ils deviennent immobiles, en état de mort apparente, attitude qu'ils conservent un certain laps de temps, pour se remettre ensuite de nouveau en mouvement.

Par leur coloration cendrée, tachetée et zébrée de bandes plus claires, ils se distirguent fort difficilement des mottes de terre. Leur homochromie est donc remarquable.

En ce qui concerne la réaction de l'insecte à l'influence de certains facteurs physiques, nous avons constaté les faits suivants.

Les larves de ces insectes qui passent leur vie en terre et qui périssent rapidement lorsqu'elles sont amennées à la surface du sol, ont un *géotropisme positif.* Les adultes par contre, qui vivent normallement à la surface du sol, montrent un *géotropisme négatif.* Ces der-

Fig. 1. Tanymecus pollíatis F. Adultul.

Fig. 2. Tanymecus dilaticollis Gyll. Adultul.

niers manifestent également un *phototropisme positif,* ils cherchent d'habitude la lumière solaire. Les individus adultes ainsi que les larves montrent une préférence pour la chaleur, ils ont donc un *thermotropisme positif.* Une chute brusque de température, un peu plus prolongée, peut tuer les adultes ainsi que les larves.

L'humidité trop grande détermine un *hygrotropisme négatif* chez les larves ainsi que chez les imagos. Par contre une humidité légère, un sol à peine humécté, détermine un *hygrotropisme positif* tant chez les larves que chez les adultes.

Nourriture. Le maïs, l'avoine, le blé, le sorgho et d'autres grami-

nées, la betterave à sucre, la luzerne, la sparcette, attirent les adultes, qui menifestent pour ces plantes un *trophotropisme positif.* La plante qui constitue la nurriture préférée est le maïs et en second lieu viennent le sorgho, le blé, l'orge, l'avoine et d'autres graminées, la betterave à sucre, la sparcette, la luzerne. En Roumanie l'insecte a été signalé aussi sur le tabac, le grand soleil.

On peut mentionner parmi d'autres plantes de culture attaquées: *Vicia faba, Vicia sativa, Lens esculenta, Cicer arietinum, Salvia verticilata, Panicum miliaceum, Phleum pratense, Setaria varidis.*

Parmi les plantes spontanées, l'insecte prefère les suivantes: *Cirsium arvense, Convolvulus arvensis, Lactuca sativa, Plantago major, Taraxacum officinalis, Lamium album, Amaranthus retroflexus, Urtica dioica.*

Suivant nos observations les adultes font des migrations peu étendues dont le déterminant principal est le besoin de nourriture. L'insecte se déplace-t-il toujours vers les cultures des plantes qui lui offrent des conditions optimum de développement. L'on constate quelque fois chez cet insecte le choix de la nourriture. En effet, lorsqu'il existe dans le voisinage plusieures plantes à sa disposition, il se dirige vers les plantes préférées et dans l'ordre de la préférence.

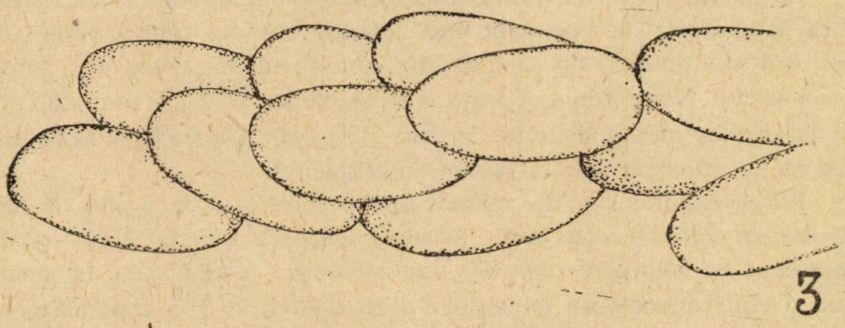
Dans un assolement triénnal blé-maïs-petit poix, les insectes se sont chaque année déplacés vers la parcelle cultivée avec du maïs, ou ils se rencontraient en grand nombre, par contre dans les autres parcelles cultivées avec du blé ou avec du petit pois ils ne se trouvaient ni même sporadiquement.

Nombre de générations. Il n'y a qu'une seule génération annuelle, car le développement est assez lent, c'est-à-dire la durée de chaque stade évolutif (larve, nymphe, imago) est assez grande par rapport à celle d'autres insectes.

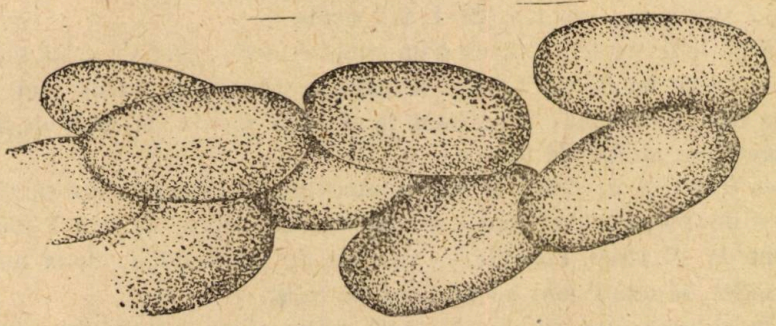
Vitalité et dégâts causés. Tandis que les larves se nourrissent de racines sans causer de trop grands dégâts, les adultes en échange produisent de véritables ravages dans les champs du maïs (fig. 6). Les dégâts accusés sont en relation étroite avec la vitalité de l'ensecte qui est à son maximum le printemps (avril et mai). La mortalité est à cette époque-ci de 1 à 2%. A partir d'environ 15 juin la mortalité commence à augmenter, arrivant bientôt à 25 ou 30%, pour atteindre 50% à la fin de juin. De 15 à 20 juillet la mortalité atteint 75%. Le nombre des adultes baisse considérablement. Ils disparaissent presque complètement à la fin de juillet. Le mois suivant on ne les voit plus.

Nous mentionnons qu'en 1942 ils ont détruit les cultures de maïs du département de Brăila et en 1943 ils ont ravagé les cultures de

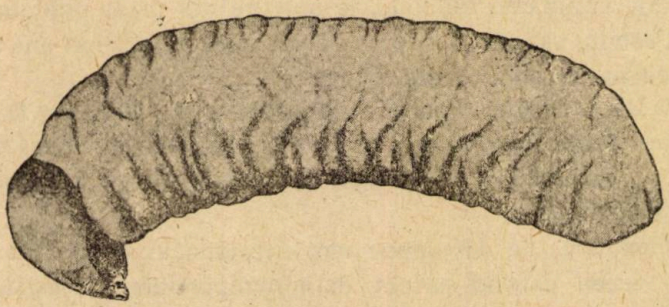
cette plante dans le département de Covurlui. En 1940 ces insectes ont détruit les cultures de maïs de Petroşani (départ. de Vlaşca).



3



4



5

Fig. 3. Ouă imediat după ecloziune.
Fig 4. Ouă mature
Fig. 5. Larvă de Tanymecus dilaticollis Gyll.

Ponte, prolificité. Suivant nos observations, les femelles déposent leurs oeufs fin avril-commencement de mai dans des petits trous

faits en terre. Les oeufs noirâtres se confondent facilement avec les petites particules de terre.

En liberté les oeufs sont déposés exclusivement dans le sol, tandis qu'au laboratoire ils peuvent être déposés sus des petites mottes de terre, sur des feuilles du papier-filtre, ou directement sur les parois du récipient. Nous remarquerons que la plupart (75%) sont déposés sur des petites mottes de terre, le reste (25%) sur des feuilles du papier-filtre ou directement sur les parois du cristallisoir.

Nous expériences de culture ont montré que la prolificité des femelles est variable. Les unes peuvent déposer de 250 à 300 oeufs. D'autres n'en déposent que 100. Enfin d'autres sont stériles. Le maximum d'oeufs déposés au laboratoire a été d'environ 330. Il paraît qu'en liberté les femelles produisent de 300 à 500 voire même 600 oeufs, Nous avons constaté qu'une femelle peut déposer par jour jusqu'à 9 oeufs, en moyenne 4 oeufs par jour. Plus fréquemment le nombre est de 4 à 7 par jour, rarement de 1 à 2 oeufs.

La période de la ponte est d'un mois et demie jusqu'à deux mois. Elle commence au début de mai et continue jusqu'à la fin de juin. La majorité des oeufs sont pondus dans la seconde moitié du mois de mai et la première moitié de juin.

Les femelles ne pondent pas continuellement! Après deux ou trois semaines de ponte active suit une période de répos de 5 à 7 jours, rarement de 10 jours. Lorsque la période de ponte est de deux mois, les périodes de répos sont au nombre de trois.

On constate que certains facteurs météorologiques, comme le sont la température, l'humidité, exercent une influence assez grande sur la prolificité des individus femelles. En effet, lorsque la température baisse, ou lorsque l'humidité diminue, le nombre des oeufs diminue sensiblement. L'action simultanée de ces deux facteurs produit une diminution plus accusée du nombre des oeufs.

Un autre facteur important qui influe la prolificité est la nourriture. Parmi les plantes favorisant la prolificité, le maïs est certes en premier rang et en second lieu : *Plantago major, Convolvulus arvensis, Taraxacum officinalis.*

Incubation. Le développement embrionnaire dure de 1 à 3 semaines. La vitesse dépend surtout de la température environnante et de l'humidité.

L'incubation des oeufs pondus en mai est plus lente, par rapport à ceux pondus plus tard lorsque la température est en augmentation et l'humidité en diminution. L'éclosion des oeufs pondus en mai dure environ 3 semaines, tandis que au moi de juin les larves évoluent en quel-

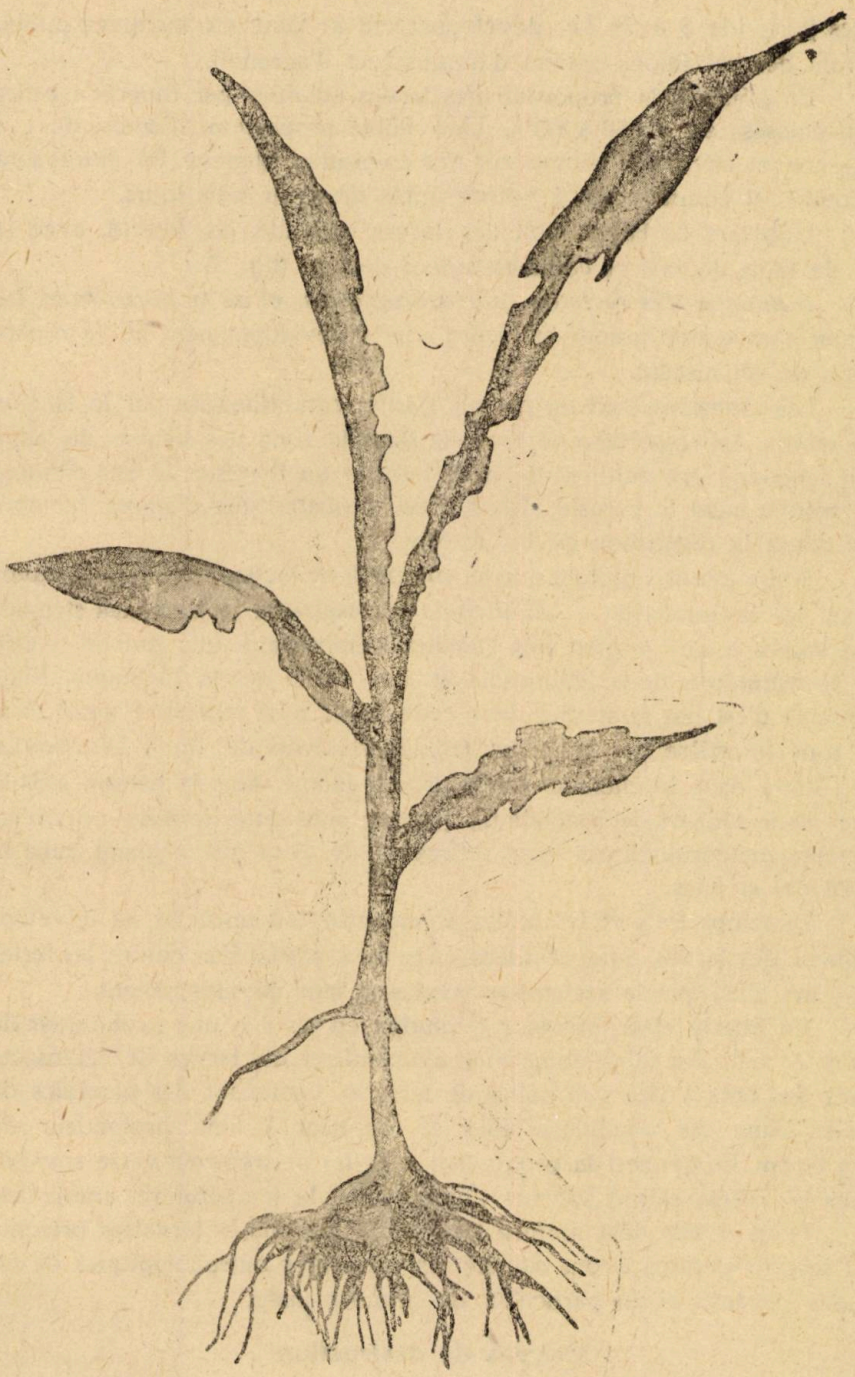


Fig. 6. Porumb atăcat.

ques jours (de 5 à 7). Le développement a lieue en terre, ce milieu offrant des conditions optima d'humidité et d'aération.

En général, la proportion des larves éclosées par rapport à celles non éclosésss est de 58 à 60%. Une faible proportion d'oeufs, de 1 à 2% restent stériles et conservent une coloration blanche, les autres sont fécondés et commencent à noircir après deux ou trois jours.

L'époque de l'apparition des larves coïncide, en liberté, avec la fin de mois de mai et commencement de juin (fig. 5).

Influence des facteurs météorologiques, et de la nourriture. Le climat exerce une grande influence sur la développement et la répartition de cet insecte.

Les invasions sont en grande partie conditionnées par le facteur nourriture. La répartition de l'insecte dans la zone des steppes du pays suit l'étendue des cultures de maïs. Partout ou il existe de ces cultures on trouve aussi le parasite. Mais il est probable que d'autres facteurs favorisent la répartition de cet insecte.

Nous avons constaté que le complexe de facteurs abiotiques favorisant les invasions de *T. dilaticollis* correspond à la zone des steppes, c'est-à-dire à une region très étendue, comprenant une grande partie de la Munténie, de la Dobroudja et une partie de la Moldavie. Mais l'insecte n'est pas cantonné dans cette zone, il se rencontre aussi dans la zone forestière par ex. dans les départements de Ilfov, Dâmboviţa et Tutova dans la chênaie. On le trouve même dans la hêtraie à Băile Herculane (départ. de Mehedinţi), quoique dans cette dernière région les facteurs météorologiques sont différents de ceux qui régnent dans la zone des steppes.

Le temps frais et les pluies abondantes sont nuisibles au développement des larves qui sont tuées en grande partie. Par contre, les fortes chaleurs ainsi que la sécheresse favorisent leur développement.

En liberté elles font leur évolution en terre à une profondeur de 15 à 20 cm. Au laboratoire nous avons élevé des larves de cet insecte dans des pots à fleurs remplies de terre et contenant des plantules de maïs. Dans ces conditions elles se tiennent à une profondeur de 8 à 15 cm. En général la profondeur où elles se trouvent varie souvent dans la même saison suivant l'humidité et la température ambiantes.

Nous avons déjà montré (3) combien de phases larvaires présente cet insecte et nous avons signalé les caractères morphologiques de ces stades larvaires et en particulier du premier stade.

Moyens de destruction

Moyens préventifs: 1. Les travaux du sol, et surtout le labourage,

faits dans des bonnes conditions, contribuent à la destruction de cet insecte en amenant les larves et les nymphes à la surface du sol où elles ne peuvent pas vivre, à cause des conditions défavorables et des oiseaux. 2. L'assolement, c'est-à-dire le remplacement, pour quelques années, du maïs par d'autres plantes de culture (haricots, petit poix, pommes de terre, etc.) qui ne sont pas attaquées par les larves de cet insecte est encore un moyen préventif de destruction. 3. Le temps des semailles lorqu'il est plus tardif, a comme effet la diminution de la période nocive des adultes, de sorte que les dégâts seront moins graves et ensuite le nombre des oeufs sera bien entendu plus réduit. 4. Les soi-disants „cordons marginaux" ou „cordons-pièges" de maïs, consistant en bandes assez étroites de maïs bordant les champs de culture d'autres plantes favorisent le ressemblement sur une petite étendue des nsectes qui peuvent ainsi être plus facilement recueillis et tués par d'autres moyens. 5. Le fumage abondant des champs destinés à la culture du maïs tue la plupart des larves.

Moyens repressifs. Les experiences entreprises en employant divers insecticides ont montré que le *thanol*, une solution à base de nicotine, a une efficacité de 90 à 95%. On l'emploie à des concentrations faibles de 1 à 2% pour ne pas être nocif aux plantes. Une autre substance dont l'efficacité est de 95 à 100%, est la „Katakilla", poudre à base de „Derris", qui produit la paralysie de l'insecte. On l'emploie en conc. de 1 kg. poudre par 160 l. d'eau ou 0,250 kg. poudre pour 40 l. d'eau.

Ministère de l'Agriculture
Bucarest

(Reçu le 26 Novembre 1947)

Travaux cités

1) Borcea I. – *Rapport sur les insectes nuisibles à l'agriculture en Roumanie et moyens pour les combattre.* Ann. Scient. Universit. Jassy, Tome XVI, 1930.

2) Cămărăşescu I. – *Cultura porumbului.* Bucureşti, 1933.

3) Catrinici Cleopatra – *Die Bestimmung der Larvenstadien des Rüsselkäfers Tanymecus dilaticollis Gyll.* Bull. Acad. Roum. Tome XXVI N. 9, Buc. 1944.

4) „ – *Studiu morfologic şi biologic asupra Curculionidului Tanymecus dilaticollis Gyll.* Ann. Acad. Roum. Tome XVIII, Mém. 3, Buc. 1942.

5) „ – *Tanymecus dilaticollis Gyll ein Schädling der Maiskulturen Rumäniens.* Bull. Acad. Roum. Tome XXIV. Nr. 9, Buc. 1942

6) Ferla A. – *Contributo alla conoscenza del Cleono del Carciofo (Cleonus piger Scop).* Boll. del Lab. di Ent. Agrar. Portici, V. III, 1939-1940.
7) Fleck Ed. *Die Coleopteren Rumäniens.* Bull. Societ. St. 1905,
8) Ionescu-Siseşti – Agrotehnica. Cultura porumbului 1942. Bibl. agric. a ziar. Univ. 1936.
9) Knechtel W. K. – *Insectele vătămătoare din România şi mijloacele de combatere a lor,* Bucureşti, 1909.
10) Mantandon A. E. – *Notes sur la faune entomologique de la Roumanie.* Bull. Societ. St. V. XVII, XVIII. p. 67.
11) Penecke K. A. – *Die Curculioniden (Rüsselköfer). Fauna der Bucovina* Bull. Facult. Şt., Cernăuţi. Bd. II. Fasc. 2, 1928.
12) Reitter E. – *Fünf neue Curculionidae aus Palaearctischen Fauna.* Coleopt. Rundschau 1915. N. 4-5.
13) „ – *Bestimmung Tabellen der europäischen Coleopteren Curculionidae Tanymecini.* Ht. LVIII, 1903.
14) Solari Angela e Ferdinando – *Curculionidi della Fauna palaearctica.* Boll. della Società. entom. ital. Firenze 1908.
15) Steiner A. – *Beitrage zur Kenntnis der Schädlingefauna Kleinasiens.* Zeitsch. angew. ent. V. 24.
16) Winkler A. – *Catalogus Coleopterorum regionis palaearcticae.* Wien, 1924-1932, p. 1898.

SUR L'EXAMEN MICROSCOPIQUE ET HISTOCHIMIQUE DES TISSUS AFFECTÉS PAR LA GELÉE

par

M. CELAN et P. BABALEAN

L'hiver rigoureux de 1946 – 1947 a causé un véritable désastre parmis les arbres fruitiers de la région de Jassy, fait qui nous a permis d'entreprendre une étude sur les différentes variétés de poirier, du point de vue de leur résistance au froid. [1]).

On sait que les altérations des cellules et des tissus chez les plantes atteintes par la gelée sont dues à la destruction du protoplaste; d'une part les cristaux de glace formés dans les espaces intercellulaires exercent une pression sur les protoplastes deshydratés des cellules voisines; de l'autre, des cristaux de dimensions extrêmement réduites, invisibles au microscope, peuvent se former à l'intérieur même du protoplasme cellulaire. L'altération et la mort que s'ensuivent peuvent ensuite se transmettre de proche en proche, plus ou moins rapidement à l'ensemble des tissus d'un organe par une sorte de diffusion des substances nocives se formant dans les cellules mortes. (Heilbrunn, 1928).

L'horticulteur – praticien sait, que les endroits ainsi affectés par la gelée d'un rameau se reconnaissent facilement sur une coupure fraîche grâce à la coloration brune, plus on moins accusée de ses tissus.

Cependant seul l'examen microscopique peut nous renseigner sur la nature et l'importance des dégâts produits, car seul cet examen permet d'identifier les tissus morts ou plus ou moins altérés et de localiser d'une manière très exacte les éléments altérés ou necrosés d'un tissus.

En général, on est suffisamment renseigné sur l'etendue des dégâts produits par l'examen des coupes à main levée, pratiquées dans du materiel frais. Dans ce cas les coupes, aussitôt faites, sont montées

---

1) P. Băbălean et M. Celan – Observaţiuni asupra efectelor îngheţului la câteva varietăţi de păr. Rev. „Horticultura Românească" (sous presse).

dans une goutte de glycérol ; ce dernier milieu empêche la brunification des tissus frais, brunification consécutive à l'exposition à l'air ou à la conservation et montage dans l'eau.

Si cependant on se propose une étude plus détaillée et plus approfondie des tissus affectés par la gelée, si on veut se rendre compte de la réaction des tissus sains environnant l'endroit nécrosé, ou si tout simplement, il s'agit de distinguer d'une manière sûre et précise tout ce que est sain et vivant de ce qui est altéré dans un tissu donné, on est contraint de recourir à l'emploi des méthodes cytologiques et microchimiques.

La coloration brune des tissus affectés par la gelée est due aux phlobaphènes. En effet, les phlobaphènes sont des substances caractéristiques pour les cellules necrosées et résultent de l'oxidation des tannins incolores extrêmement abondants, comme nous avons pu le constater, dans les tissus du poirier.

En effet la vaniline chlorhydrique recommandée entre autre pour la détection des phlobaphènes donnent aussi bien au niveau des tissus altérés et necrosés qu'au niveau des tissus sains une coloration d'une rouge vif. Ceci démontre que la réaction n'est nullemnt spécifique au phlobaphènes et prouve en même temps la présence des tannoïdes pyrocatéchiques ou phloroglucidiques dans les cellules des tissus sains.

Le traitement de coupes par une solution de tetraoxyde d'osmium donne, comme on le sait, une superbe coloration noire des vacuoles, mais cette dernière réaction, pas plus que la première ne nous a pas permis d'obtenir une différenciation optique permettant de distinguer les éléments necrosés des éléments sains dans un tissu donné.

Néanmoins, si les essais d'élaborer une technique permettant cette distinction technique, basée sur des différences d'ordre chimique, existantes entre les tannoïdes oxydés et non oxydés, ont echoué, ils ont révelé quelques fais intéressants. La série des réactions essayées par nous et qu'il est inutile d'énumérer ici, a mis en évidence la repartition très inégale des tannoïdes dans les différents tissus d'un organe et dans les divers éléments d'un même tissu. La coloration par les réactifs propres aux tanoïdes, est surtout celles des phlobotanins, est particulièrement intense au niveau des rayons médullaires, surtout dans leur partie libérienne, de même qu'au niveau du méristème cambiale ; dans l'écorce de cellules extrêmement riches en tannins voisines avec des cellules pauvres en ces mêmes substances. Cette inégale teneur en tannins, qui traduit d'une manière évidente des différences de chimisme, se superpose en fait de l'inégale résistance à la gelée des différents élé-

ments du tissus en question et permet, il nous semble, de l'expliquer.

Dans le même ordre d'idées notons la grande résistance à la gelée presentée par les cellules des rayons médullaires, quoique ici la teneur élevée en tannoïdes doit être considérée du point de vue des relations qui peuvent être établies entre la présence des tanoïdes d'une part et des glucides d'autre part, présents eux aussi en abondance dans ces mêmes cellules.

Dans l'étude des tissus affectés par la gelée, le problème fondamental qui se pose est celui de trouver le moyen le plus efficace qui nous permette de distinguer les éléments morts des éléments vivants d'un tissu.

Or, parmis les méthodes que la cytologie nous propose dans ce but, la plasmolyse et la coloration vitale sont les seules qui peuvent être considérées comme sûres; elles sont les seules, en particulier la méthode de coloration vitale, qui nous ont permis d'obtenir des résultats positifs.

Nous croyons inutile de nous arrêter à l'éxposé des résultats peu satisfaisants obtenus par d'autres méthodes que la coloration vitale et à la critique de certaines de ces méthodes (par exemple la méthode de „Lebendfällung", basé sur la précipitation des tanoïdes dans les cellules vivantes, ou celle qui consiste dans la réduction du nitrate d'argent par de cellules vivantes); nous ne ferons que rappeller que toutes les méthodes permettant de distinguer les cellules mortes des cellules vivantes sont facilement applicables dans le cas de végétaux unicellulaires ou des végétaux inférieurs de structure très simple. Quand il s'agit de tissus complexes, comme ceux des végétaux supérieurs, même la méthode de la coloration vitale, seule applicable dans notre cas, demande beaucoup de discernement en ce qui concerne les résultats obtenues.

Nous avons pensé néanmoins que si la méthode de la coloration vitale est une méthode délicate, difficile à manier, il n'est pas impossible de rendre son emploi accessible aux travailleurs même moins expérimentés. C'est ce que nous allons tenter de faire dans ce qui suit en supposant cependant de la part de ceux qui voudront se servir de nos indications, au moins l'habitude de l'examen microscopique et une connaissance des tissus végétaux, ainsi que de l'organisation cellulaire.

L'examen des tissus colorés vitalement nécessite la confection des coupes à main levée. Les coupes doivent être assez épaisses pour contenir des cellules non lésées. Il est préférable de se servir de coupes longitudinales, notamment longitudinales radiales, car les tissus de la tige contiennent de nombreux éléments allongés dans la direction de

l'axe (tissus libériens, le bois, le méristème cambiale). Au contraire, la coloration vitale des rayons médullaires, de l'écorce peut être suivie, aussi bien sur des coupes longitudinales, que sur les coupes transversales ; il est même profitable de compléter les observations effectuées sur des coupes longitudinales par l'examen des coupes transversales.

Aussitôt faites, les coupes sont plongées dans le colorant. Les colorants vitaux le plus couramment employés sont le *rouge neutre*, le *bleu de crésyle* et le *bleu de Nil*. On peut préparer les solutions colorantes avec de l'eau de source ; cependant il est préférable de se servir du liquide de Ringer, dans lequel les tissus peuvent rester longtemps vivants, tandis que dans l'eau de source ils s'altèrent rapidement. Les colorants cités à une concentration d'environs 1/20.000, 1/10.000 nous ont donné des très bons résultats.

Il y a avantage à procéder de la manière suivante : on plonge les coupes pour commencer dans une solution beaucoup plus faible de colorant, ensuite dès que la solution se décolore par suite de l'accumulation du colorant dans les cellules vivantes du tissu, on y ajoute quelques gouttes d'une solution concentrée en lui redonnant la nuance qu'elle avait au début.

La coloration commence au bout de 10 minutes ou d'un quart d'heure environ ; les coupes sont alors montées dans une goutte de colorant.

Les cellules ne se colorent pas simultanément, mais les unes après les autres, par groupes ou isolément. Les tissus restent vivants très longtemps et les progrès de la coloration doivent être suivis au moins chaque quart d'heure. Il est important de se rendre compte de la nécessité de cette surveillance continuelle des progrès de la coloration : dès le début on aura des éléments qui donneront une coloration caractéristique pour les cellules mortes ; dès le début il aura des cellules qui après avoir donné une coloration vitale, présenteront des signes d'une coloration sousléthale et ensuite la coloration post-mortem.

La coloration vitale consiste dans une accumulation du colorant dans la vacuole des cellules ; *le cytoplasme et le noyau des cellules vivantes restent incolores*. La coloration sera d'autant plus intense que le suc vacuolaire sera plus riche en colloïdes, dans notre cas, en tannoïdes. Comme la vacuole des cellules adultes chez les végétaux occupe presque toute la cavité cellulaire, les cellules colorées vitalement apparaissent comme si elles étaient entièrement colorées. Au contraire, les cellules mortes ont leur vacuole décolorée, tandis que la très mince couche cytoplasmique pariétale ainsi que le noyau se colorent. Dans les cellules mortes depuis longtemps le protoplaste apparait

contracté au milieu de la cavité cellulaire — phénomène de la fausse plasmolyse. — Enfin comme la coloration ne se produit pas d'un coup dans l'ensemble des tissus, on aura sur la coupe examinée un bon nombre de cellules *non colorées*. Ce sont des cellules bien vivantes, qui résistent mieux à la pénetration du colorant.

Le contenu des cellules mortes et plus ou moins brunifiées prend avec les colorants bleus, bleu de crésyl, bleu Nil, une coloration verdâtre, bien différente de la nuance bleue pure des cellules saines. Le rouge neutre donne une belle coloration rouge-framboise des vacuoles des cellules saines, nuance due à la présence des tannoïdes. Les cellules brunifiées mortes prennent avec le même colorant une nuance orangée.

Pendant l'observation on fera abstraction des cellules lésées par le rasoir, lesquelles dès le début auront leur cytoplasme coloré; ce sont notamment les cellules sur les marges de la coupe ainsi que celles qu'on aura au microscope sur le premier plan, et dont un nombre aura gardé son contenu cytoplasmique.

On n'obtient une belle coloration des tissus qu'au bout de 3-4 heures; cependant nous insistons sur la nécessité d'une surveillance continuelle des progrès de la coloration, car au fur et à mesure que les cellules des tissus demeurés sains se colorent vitalement, certaines d'entre ces mêmes cellules meurent, surtout si on emploie le colorant en concentration assez forte.

Il faut tenir compte du fait que l'action toxique du colorant s'accentue entre la lame et la lamelle de la préparation, où les cellules se trouvent en conditions d'asphyxie; le colorant est au contraire très bien supporté dans le récipient où les coupes plongent librement dans la solution colorante et où elles peuvent demeurer vivantes plus de 24 h. Au bout d'un certain temps il se forme des précipités vacuolaires intensivement colorés, sous forme de granulations ou d'un seul gros précipité globuleux.

En resumé: 1. - Toute cellule, ayant sa vacuole colorée et dont le protoplasme reste incolore, est une cellule vivante.

2. - Toute cellule, ayant le protoplasme coloré, est une cellule morte.

3. - Les cellules des endroits où le tissu apparait bruni et dont le contenu se présente sous l'aspect d'une masse compacte et brune, sont des cellules mortes.

4. - Les cellules dont le protoplasme est contracté, détaché de la parois cellulosique, simulant une plasmolyse, est une cellule morte.

La coloration vitale montre qu'un tissu brunifié n'est pas un tissu entièrement mort: pas mal de cellules dans un pareil tissu donnent encore une coloration vitale. En plaçant les coupes colorées vitalement

dans une solution plasmolysante, on obtient la plasmolyse des éléments vivants, rendue très visible, grâce à la coloration de la vacuole.

L'altération du protoplasme d'une cellule saine se manifeste tout d'abord par la désorganisation de la membrane cytoplasmique semiperméable - *la plasmalèmme*, et par conséquent par la perte de la semiperméabilité caractéristique de la cellule non altérée.

Si le noyau n'a pas été atteint, le protoplaste peut retrouver la semiperméabilité perdue (Chambers, 1928). C'est pourquoi la *réaction nucléale de Feulgen* constitue une excelente méthode de recherche chaque fois qu'il s'agit de se rendre compte de l'état des éléments composant d'un tissu du point de vue de leur parfaite intégrité. La réaction nucléale de Feulgen est la seule qui permet de décoler dans les moindres détails toute altération de structure et de l'état de la chromatine dans les noyaux cellulaires. Les noyaux altérés prennent notamment sur les coupes fixées et colorées l'aspect designé sous le nom de *pycnose* : le noyau se colore d'une manière homogène et la chromatine prend des teintes différentes du rouge pourpre caractéristique des noyaux normaux.

La réaction nucléale de Feulgen peut fournir de précieuses indications sur l'état du méristème cambiale qui joue un rôle si important dans le procès de régéneration des tissus atteints. L'emploi de cette méthode de recherche n'est cependant accessible qu'à des chercheurs ayant une parfaite connaissance des techniques cytologiques, ayant à leur disposition des laboratoires bien outillés.

Laboratoire d'Horticulture et le Laboratoire de Botanique de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 30 Juillet 1947)

Travaux cités

1) Chambres R. - *The physical state of protoplasma with special reference to its surface.* Amer. Naturalist, 72, 739, 1039. (cité d'après Toumanov) (9)
2) Dop P., Gautié A. - *Manuel de Technique Botanique.* Paris. Lamarre, éd. 1928.
3) Guilliermond A., Mangenot Cr., Plantefol L. - *Traité de Cytologie végétale.* Paris. Le Fraçois éd. 1933.
4) Guilliermond A., Gautheret R. - *Recherches sur la coloration vitale des cellules végétales.* Paris. Librairie générale de l'enseignement. 1940.
5) Heilbrunn L. V. - *The colloid chemistry of protoplasma.* Berlin. Borntraeger éd. 1928. (cité d'après Toumanov) (9).

6) Klein G. - *Handbuch der Pflanzenanalyse*, Wien. Julius Springer. 1931 - 33.
7) Michel - Durand E. - *Recherches sur les composés tanniques.* Paris Librairie générale de l'enseignement. 1929.
8) Schneider H., Zimmermann A. - *Botanische Microtechnik* Jena, Fischer ed. 1922.
9) Toumanov J. - *Les bases physiologiques de la résistance au froid chez les plantes cultivées*, (en russe).

LES SABLES MOUVANTS DE VÂLCOV-JIBRIENI

par

NICOLAE N. TANASESCU

I. Considérations générales

Parmi les différents terrains improductifs d'une région, les sables peuvent apparaître avec des caractères fort divers: tantôt ils forment de véritables sols, lorsqu'à la suite d'une série de transformations naturelles ils ont pu être affectés à des cultures agricoles; tantôt comme des terrains naturellement fixés par la végétation, ils représentent un certain type de sol; tantôt mouvants, ils forment des terrains à l'aspect irrégulier.

Les sables peuvent occuper une superficie assez importante comme c'est le cas des sables marins de Vâlcov - Jibrieni (U. R. S. S.), situés au bord de la Mer Noire. Ces sables sont en partie fixés par la végétation, en partie meubles.

La végétation herbacée déjà assez pauvre, le plus souvent a été détruite par un pâturage intensif, pratiqué depuis longtemps, de sorte que le sable privé de la protection du tapis végétal est redevenu peu à peu mobile.

Comme conséquence de l'agrandissement de la superficie des sables mouvants, il y avait une série de graves inconvénients pour l'économie de la région en question:

1. - La route Vâlcov-Jibrieni, le seul moyen de communication par voie de terre de Vâlcov avec le reste du département de Chilia, a été ensablé rendant la circulation presque impossible;

2. - L'action d'ensablement étant très active, tous les terrains et même les maisons de la périphérie du bourg de Vâlcov étaient continuellement menacés d'être couverts par le sable.

3. - Les sables - terrains improductifs - n'apportaient aucun bénéfice dans le pauvre budget communal de Vâlcov.

Afin de parer à cette série d'inconvénients et pour mettre en

valeur ces terrains, un programme de fixation des sables par des plantations forestières fut établi, programme que j'ai été chargé de conduire. J'ai obtenu les premiers résultats positifs à la fin de la deuxième année en sorte que, à la fin de 1943, la première série de travaux concernant la fixation des sables était terminée, tandis que la seconde, celle du boisement, était en train d'exécution.

* * *

Les sables mouvants de Vâlcov-Jibrieni situés dans le Delta du Danube se trouvent dans la partie Nord-Ouest du bourg de Vâlcov, en commençant à la limite même du bourg et s'étendant jusque dans le voisinage de la commune de Jibrieni; ils occupent ainsi toute la région entre ces deux communes.

Ils font partie d'une chaîne de petits ilôts de sable meuble ayant une superficie plus ou moins grande située au bord de la Mer Noire, dont la continuité peut être facilement suivie tant sur le terrain que sur une carte géographique.

Appartenant à un ancien cordon littoral, ces sables mouvants séparent les nombreux marais du littoral et les lagunes („liman") de la mer et on les trouve presque partout, sur tout le littoral de la Mer Noire dans sa région Nord-Ouest à partir de la lagune du Bug (URSS) jusq'à Constanța.

Les plus grandes étendues de sable marin se trouvent en Roumanie à Tuzla, Constanța, Mamaia, Carachioi, Gargalic, Caranasuf, Carahârman et Letea (16), continuées par celles appartenant à la Russie soviétique.

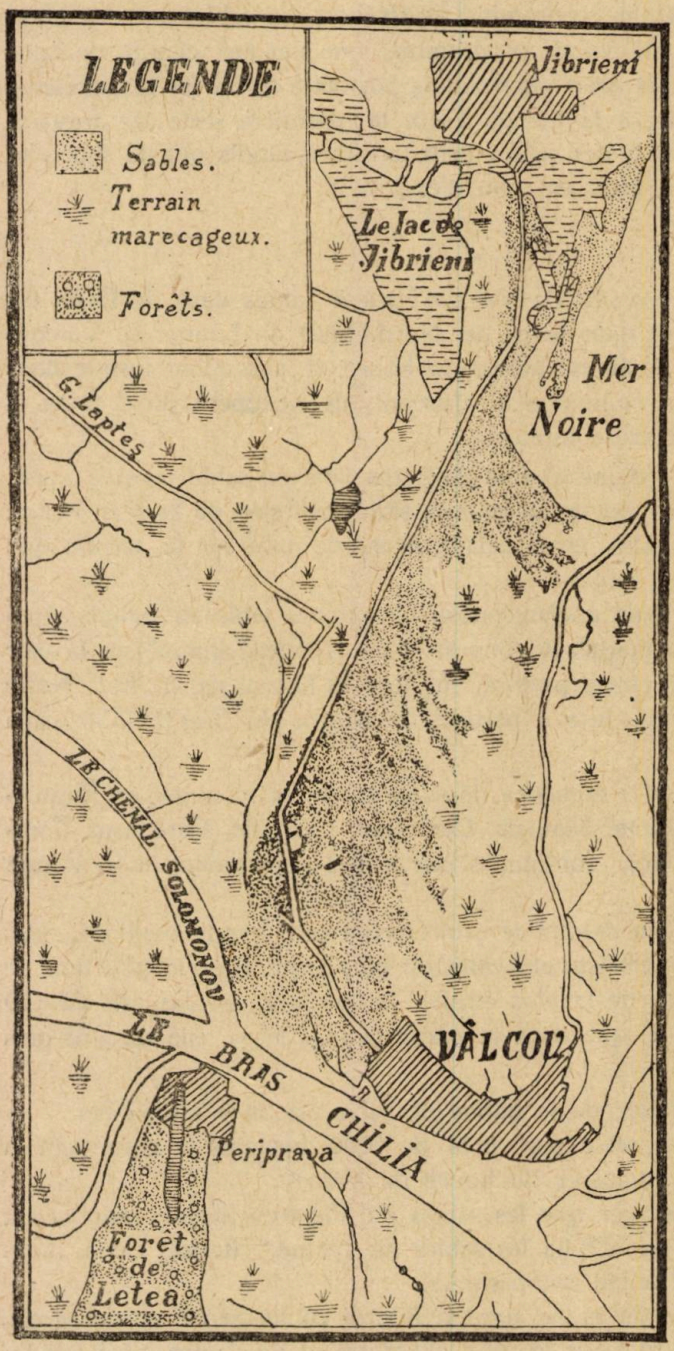
D'après le plan ci-joint le sable forme une bande continue, plus étroite du côté de Jibrieni et beaucoup plus large dans la direction de Vâlcov. Dans la partie la plus étroite, la bande a une largeur de 150 à 250 mètres, tandis que dans la partie la plus large elle mesure plus de 2 kilomètres.

La longuer totale de la bande de sable est de 9 kilomètres.

Sa superficie est à peu près de 1000 hectares et constituait la propriété presque exclusive du bourg de Vâlcov.

Il est à remarquer que les sables de Vâlcov - Jibrieni continuent au delà du bras de Chilia les sables du „grind" (tertre) Letea, auxquels ils sont tout à fait comparables.

Faisant partie du grand cordon littoral en forme d'arc de cercle, qui s'appuie d'un côté sur la ville d'Odessa et de l'autre côté sur les rochers de Caranasuf, la bande des sables monvants de Vâlcov - Jibri-



Echelle 1:100 000

eni peut s'inscrire dans un triangle rectangle, dont l'angle droit est situé à la confluence du canal Solomonov et du bras Chilia.

De même que le banc de sable (grind) de Letea, qui dans sa partie Nord s'appuie sur le village Periprava, tandis que dans sa partie Sud s'étale en forme d'éventail, les sables de Vâlcov-Jibrieni deviennent plus étroits dans leur partie Nord en s'appuyant sur le village de Jibrieni et ensuite, se dirigeant vers le Sud-Ouest-s'étalent à leur limite Sud vers le bras de Chilia.

* * *

Du point de vue écologique, cette région de sables mouvants peut être définie de la manière qui

suit, si on prend en cosidération les factures climat, sol et végétation.

Le climat. Le climat général appartient au climat de steppe aride (6) dont la formule est „B. S. a. x.", se caractérisant par une très grande sécheresse et par des précipitations inférieures à la limite de sécheresse donnée par la formule de Köppen $/ P_m = 2 (t + 14) /$. La plupart des précipitations tombent au début de la saison de végétation. En été le thermomètre monte sensiblement marquant en moyenne plus de 22^0 dans le mois le plus chaud.

Grâce à l'influence de la mer sur le climat, influence qui, dans le Delta, est de beaucoup plus grande qu'ailleurs, à la suite des conditions locales plus spéciales, les sables de Vâlcov-Jibrieni, situés au bord de la Mer Noire jouissent d'un climat local bien différent du climat général.

En effet, en été, la température, la nébulosité, l'humidité et les précipitations sont conditionnés par la brise (10), qui change de direction deux fois par jour ; en hiver les mêmes factures sont sous l'influence constante des vents du Nord-Ouest.

Les observations météorologiques pour Sulina et Volcioc *) entre lesquels se trouve située la région de Vâlcov-Jibrieni-montrent une moyenne de température annuelle qui varie de $10^0 8$ à $11^0 5$. Les hivers sont moins froids qu'ailleurs, la température du mois de janvier oscillant entre $- 0^0 8$ et $+ 1^0 2$.

Quantitativement les précipitations sont plutôt réduites: au plus 384,6 mm à Volcioc ou 389,32 mm à Sulina.

Les moyennes mensuelles et annuelles des précipitations et de la température

Station	Observations	Moyennes mensuelles												Moyenne annuelle
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
SULINA	Précipitations	25,7	21,9	26	29,4	32,8	49,1	34,9	29,6	34,1	39,3	38,2	28,2	389,2
	Température	0,8	0,4	4,2	9,4	13,1	19,6	21,8	21,3	17,4	12,6	6,5	2,1	$10^0 8$
VOLCIOC	Précipitations	13,6	16,9	10	24,7	21,5	59,2	23,4	69,3	44,3	47,8	22,0	34,4	384,6
	Température	1,4	1,2	4,6	10,2	15,2	20,6	24,6	23,2	16,9	12,3	7,1	0,5	$11^0 5$

Pour me rendre mieux compte de l'influence du climat sur la vé-

*) Les observations données pour Sulina représentant la moyenne pour 30 ans et peuvent par conséquent être considérées normales; celles pour Volcioc donnent la moyenne pour 3 ans, donc elles ne sont qu'approximatives.

gétation, j'ai cherché à établir *les indices d'aridité*, dont les valeurs mettent en évidence d'une manière très simple les rapports entre la pluie, la température d'un côté et la végétation de l'autre.

Les indices d'aridité établis d'après la formule de De Martonne $\left(I=\frac{P}{T+10}\right)$, montrent que les sables de Vâlcov-Jibrieni peuvent être situés à la limite entre la zone de *„steppe aride"* (les indices annuels compris entre 10 et 20) et celle de *„steppe sèche"* (les indices annuels compris entre 20 et 24) (Cernescu 6).

Les indices d'aridité mensuels et annuels d'après la formule de De Martonne

Station	Indices d'aridité mensuels												Indices d'aridité annuels
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
Sulina	32	25	22	18	17	20	13	11	15	21	28	28	19
Volcioc	14	18	8	15	10	23	8	25	20	25	15	67	18

En même temps, dans aucun mois de la période de végétation, les précipitations ne dépassent l'évaporation (les indices mensuels étant tous inférieurs à 24).

Parce que ces indices pendant la saison de végétation sont inférieurs à 20-25, indices qui marquent la limite entre la steppe et la forêt (6,22), il résulte que sur les sables de Vâlcov-Jibrieni aucune période de l'année ne présente pas les conditions requises pour la végétation forestière.

Pourtant les conditions climatiques des sables sont tout autres, grâce au microclimat qui résulte de la situation spéciale de la région dans le proche voisinage de la mer et au milieu des „bălți" (marais) du Delta du Danube.

Sous l'influence du soleil de sable se chauffe fortement pendant la journée, la température du sol pouvant atteindre 70° ou même plus (7), d'où il s'ensuit que la rare végétation xerofile est brûlée. Le chauffement du sable et par conséquent son assèchement se produit jusqu'à 20-30 cm en profondeur.

Mais de l'autre côté, la forte évaporation journalière pe l'eau à la surface de la mer et des „bălți" (marais) du Danube, maintient l'humidité relative de l'air à un degré assez élevé.

De sorte que *le coefficient hygrométrique „NS" du Mayer calculé* pour Sulina et Constanța nous montre que la région Vâlcov-

Jibrieni peut être considérée, au point de vue de l'humidité relative, parmi les régions de steppe à forêt, bien que les précipitations y fassent défaut.

En effet, le coefficient hygrométrique „N S" (6) pour Buzău, Sulina, Galaţi, Constanţa, Bucureşti, Focşani, stations situées dans des régions pouvant être considérées comme appartenant à la limite de la zone des steppes à forêt est respectivement de 165, 183, 193, 195, 197 et 207.

Outre la grande évaporation de l'eau de mer, l'humidité relative de l'air est augmentée aussi par la brise, dont l'action se manifeste à partir du moment où les sables sont chauffés au maximum (13).

Crâce à la brise les couches chaudes et sèches de l'air, qui se trouvent au niveau des sables, sont remplacées par d'autres plus froides et plus humides.

C'est à cause de la brise que la température diurne et l'humidité s'y trouvent dans un rapport de proportionnalité inverse: lorsque la température monte, l'humidité baisse et inversement: si l'humidité monte la température baisse.

L'action destructive du vent sur la végétation ligneuse mérite aussi d'être mentionnée: on en voit l'effet dans la forêt de Letea, où les chênes, les saules et les peupliers sont souvent déracinés ou brisés par le vent à cause de leur enracinement superficiel dû aux horizons superficiels d'argile alluvionnaire riches en sels, que les racines des arbres évitent (12).

Facteurs du sol. *Géologie.* La sable de Vâlcov-Jibrieni, de même que tout le Delta du Danube a son origine dans le quaternaire et a eu la même évulution que toute la région environnante.

Malgré les différentes hypothèses émises sur la formation géologique du Delta du Danube et de la région voisine, hypothèses qui en partie se contredisent, une chose est aujourd'hui bien précisée par les hommes de science: tous les sables littoraux ont une origine marine et font partie d'un ancien cordon littoral formé pendant le Diluvium le long du bord de la Mer Noire.

La formation du cordon littoral devant les golfes et les estuaires à l'embouchure des eaux qui se jettent à la mer et leurs transformations ultérieures en lagunes (liman), par suite de leur séparation de la mer par ce cordon littoral a été déterminée par la forme et la direction générale de la côte, par les vagues et les courants marins, par les vents dominants, par le relief et la nature du fond des estuaires et des golfes et par les dépôts charriés par les eaux.

Même aujourd'hui tous ces facteurs ont une influence constante sur la formation de la région (1).

Le relief. Dans son ensemble le relief des sables de Vâlcov-Jibrieni a un aspect assez régulier.

On peut distinguer une série de cinq chaînes de dunes uniformes qui sont parallèles au bord de la mer et ont une direction générale du Nord-Nord-Ouest vers le Sud-Sud-Est,

Sous l'influence de diffférents agents destructifs, le vent, le pâturage, la végétation, etc., les dunes ont subi de grands changements, en sorte qu'elles ne sont plus aujourd'hui continues. En effet, dans certains endroits les dunes ont été rongées et détruites partiellement ou complètement par les vents (fig. 2) et le sable charrié et déposé ailleurs, formant de véritables collines.

Fig. 1. Dune mouvante.

Ailleurs elles ont gardé au contraire leur forme et leur aspect initiaux (fig. 1)

Parmi ces cinq chaînes de dunes, les plus grandes sont celles du côté de la mer, tandis que la dernière disparaît dans les marais (bălți) du Danube.

Etudié plus en détail, le relief est assez irrégulier, le sable entre les dunes principales formant des dunes secondaires différemment orientées.

Dans les dépressions qui séparent ces diverses dunes, au printemps il se forme des mares, dont quelques unes gardent l'eau pendant longtemps, même jusqu'à l'automme.

L'altitude maximum des dunes est de 12 mètres au dessus de la mer au point géodésique (fig. 1) et l'altitude minimum de quelques dizaines de centimètres dans les dépressions.

Le sol. C'est l'insuffisance des précipitations qui, dans les sables de Vâlcov-Jibrieni, détermine et conditionne la nature, la formation et l'évolution du sol de même que la végétation.

Un surplus d'humidité dans le sol provoque tout de suite de grands changements dans l'aspect et dans la composition du sol et en même temps une plus grande variation en ce qui concerne la végétation.

En conséquence, des facteurs tels que le relief, le microrelief, l'exposition, etc. qui conditionnent l'humidité dans le sol ont dans la région, étudiée une influence primordiale et leur étude peut mener à distinguer dans ces sables plusieurs stations.

Les sables de toute la région sont en général très uniformes au point de vue du sol ; si en quelques endroits ils présentent une certaine variation dans leur constitution physique et chimique, variations qui nous aident à discerner certains états de leur évolution, celles-ci sont presque insignifiantes et sont dues seulement à une abondance plus grande de la végétation.

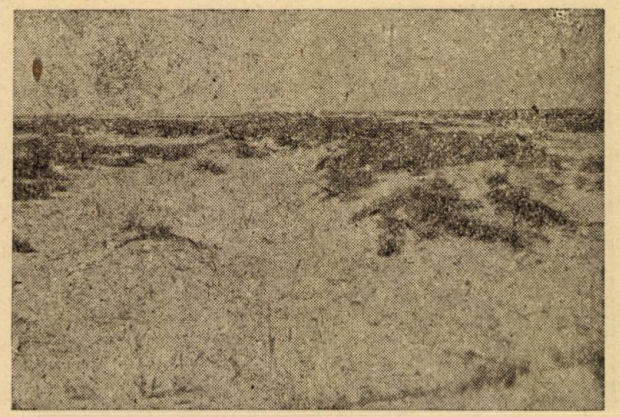


Fig. 2. Dunes fixées par la végétation ligneuse (Salix repens L.)

Au point de vue de leur fixation on peut distinguer :

a. *Du sable mouvant* formant des dunes très étendues sur lesquelles le sable, sous l'action du vent, est porté en long et en large en nuages de poussière (fig. 1).

Par les travaux que j'ai effectués, la plus grande partie des sables mouvants a été complètement fixée.

b. – *Du sable partiellement fixe* par une maigre végétation. Si la végétation est détruite par une cause quelconque, alors le sable devient mouvant. C'est le cas de beaucoup de dunes, dont la végétation est à présent en partie détruite (fig. 2).

c. – *Du sable très bien fixé* par une riche végétation, c'est le sable qui se trouve dans les dépressions entre les dunes et quelquefois sur les plus petites dunes. La fig. 8 montre l'aspect du sable bien fixé par la végétation.

Indifféremment si le sable est ou non bien fixé, il est constitué partout de la même façon, c'est un mélange de quartz et de sédiments de coquilles marines.

Les débris de coquilles ont été identifiés et se trouvent appartenir à des espèces de Cardium, Paludina, Planorbis, Lymnaea, etc. qui nous montrent d'ailleurs leur origine (2,18).

Le quartz entre dans la composition du sable en proportion de

60 à 70%, tandis que les débris calcaires des coquilles marines, dans une proportion de 30 à 40%.

Le sable est formé de particules très fines sans aucune cohérence, due à l'absence dans leur composition de l'argile, de l'humus, des sesquioxydes, etc.

Il ne présente pas de profil caractéristique, étant formé par une accumulation de matériel uniforme de couleur blanche sans aucune trace d'évolution vers un type défini de sol (7).

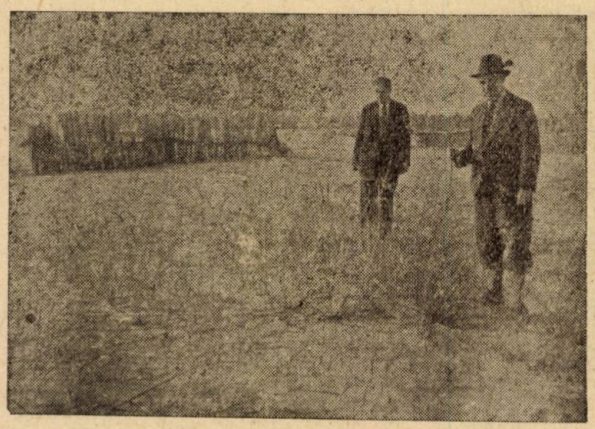


Fig. 3. Sable fixé par la végétation herbacée (Elymus sabulosus L.)

Le sol des sables marins est très pauvre et on n'y trouve que des traces de substance nutritives dues aux sédiments de coquilles.

Le sable étant sans agrégation, l'eau de pluie est rapidement filtrée en profondeur.

Le niveau de l'eau phréatique dans le sable de Vâlcov-Jibrieni se trouve à une profondeur de 40 à 50 cm dans les dépressions et de 6 à 10 m. sur les dunes. Elle continue certainement dans le sable le niveau de l'eau du Delta du Danube.

Des faits plus haut exposés on peut conclure que les sables mouvant constituent en général une station xerophyte typique, où pousse une végétation bien caractéristique.

La végétation. La végétation que j'ai trouvée sur les sables de Vâlcov-Jibrieni est une végétation arénicole parfaitement adaptée aux conditions des stations xérofites (19).

Elle peut être caractérisée par une série de plantes herbacées dont : *Euphorbia Gerardiana Jacq.*, *Elymus sabulosus L.*, *Holoschenus vulgaris Lk.*, *Cynodon dactylon Rich.*, *Aeluropus litoralis (Gou) Parl.*, et des espèces de Carex sont les plus connues (17).

La plupart sont des plantes à rhizomes ce qui en fait un bon moyen de fixation et de protection du sable (fig. 3).

Dans les déprssions d'entre les dunes, dans les endroits les plus humides j'ai trouvé le sable parfaitement fixé par différents espèces

de *Juncus*, parmi lesquelles *Juncus maritimus Lam.* et *J. acutus L.* sont les plus caractéristiques.

Quant à la végétation ligneuse, celle-ci est représentée par quelques espèces d'arbres et arbustes groupés en bouquets là où les conditions écologiques leur sont favorables.

Ainsi du côté de Jibrieni j'ai trouvé un bouquet de peupliers blancs *(Populus alba L.)* en association avec quelques exemplaires de saules *(Salix alba L.)* et d'argousier *(Hyppophäe Rhamnoides L.)* dont la végétation est très active (fig. 4).

J'ai trouvé aussi dans les sables quelques exemplaires *d'Ailanthus glandulosa Desf.* très mal venus à cause du pâturage et de toutes sortes de destructions. Les ailantes trouvés représentent les vestiges d'un ancien essai de fixation des sables, fait, il y a quelques dizaines d'années, par les forestiers russes. Ils étaient en plus grande quantité et d'après leurs souches assez épaisses ils étaient arrivés à un degré de développement assez avancé.

Par manque de surveillance la plupart d'entre eux a disparu et les survivants végètent mal, ayant le bois nécrosé ou les couronnes en partie détruites.

L'argousier occupe sur les sables des superficies plus étendues, formant des ilôts infranchissables, ce qui prouve un état de parfaite prospérité.

Fig. 4. Un bouquet de peupliers blancs et d'argousiers sur le sable.

Mais ce sont les saules rampants (*Salix regens L.)* qui trouvent les meilleures conditions de végétation sur les sables aussi bien sur les dunes, que sur les versants ou dans les dépressions.

Ils forment des buissons très épais et très étendus et grâce à leur système radiculaire très développé, ils fixent fortement le sable, rendant toute érosion impossible. A côté des saules rampants on trouve aussi le *Salix cinerea L.* là où l'eau forme pour quelque temps des mares.

Enfin les quelques petits bosquets de *Prunus spinosa L.* trouvés sur les sables de Vâlcov-Jibrieni terminent la liste de toutes les plantes ligneuses qui y poussent.

II. Les travaux pour la fixation et la mise en valeur des sables de Vâlcov - Jibrieni.

Indifféremment de la situation géographique et de la nature d'un sable mouvant, afin de la mettre en valeur il faut effectuer deux séries de travaux :

1. - des travaux de fixation du sable et

2. - des travaux pour la mise en valeur du terrain sablonneux par une culture quelconque.

* * *

1. - Selon l'urgence des travaux et l'étendue des sables, on arrive à les fixer à l'aide de différents obstacles arrangés d'une manière particulaire et qui ont le rôle de protéger le sable contre l'action d'érosion causée par le vent. Le sable protégé n'est plus transporté dans les régions voisines et par conséquent celles-ci ne sont plus ensablées.

On a à la disposition deux sortes d'obstacles :

Les obstacles mécaniques, qui sont les meilleurs, car ils servent à fixer immédiatement le sable mouvant et permettent d'effectuer en même temps d'autres travaux d'amélioration. Les matériaux qui servent à la construction des rameaux, des planches, de la paille, etc. Ils peuvent avoir des formes différentes et on peut les arranger d'une manière spéciale, soit en couvrant complètement le sol, soit en faisant des palissades, etc., pour atteindre le but proposé.

Les obstacles verts, sont constitués par des herbes semées sur toute la surface des sables ou par des saules rampants ou d'autres arbustes plantés d'après un plan spécial.

Dans le cas des obstacles verts, il est préférable d'employer les plantes à rhyzomes, car elles protègent le mieux le sable et peuvent fournir en même temps un bon fourage.

La fixation du sable par la végétation demande un certain temps, elle ne peut pas être réalisée immédiatement. Il se peut en effet que dans l'intervalle entre l'ensemencement des herbes et leur développement, le sable soit érodé et transporté par le vent et par suite les travaux compromis.

Le choix du procédé employé pour fixer le sable dépend du prix des matériaux qu'on trouve sur place.

Pour fixer le sable dans la région de Vâlcov-Jibrieni, j'ai utilisé des palissades de roseaux, qui se trouvent en très grande quantité dans le Delta du Danube.

Etant donné que les vents dominants n'ont pas une direction uni-

que, ce qui se voit d'ailleurs d'après l'orientation même des dunes, j'ai imaginé l'arrangement des obstacles en séries de compartiments, par quoi on arrive à annihiler complètement la force du vent d'où qu'il arrive.

Ces compartiments ont été réalisés de la manière suivante:

On a tracé des lignes parallèles à une distance de 25 m. l'une de l'autre, ayant la direction Est-Ouest. Sur chaque ligne on a construit des palissades discontinues, tous les 10 m. de palissade alternant avec 10 m. d'espace libre.

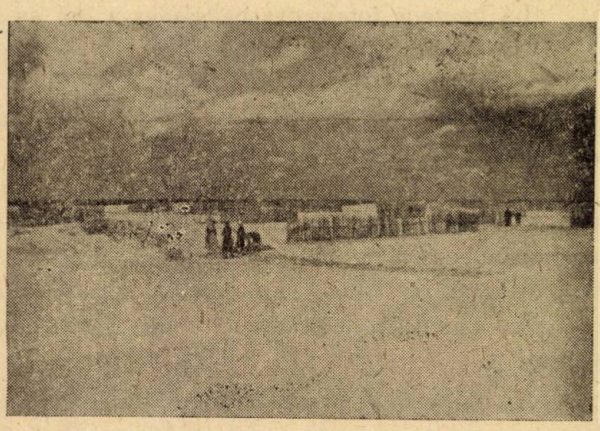


Fig. 5. La construction des palissades.

Dans les rangées voisines les espaces libres alternaient avec les palissades (fig. 5).

A l'aide de cette première série de palissades, j'ai cherché à annihiler l'action destructive des vents du Nord.

Entre ces rangées parallèles, d'autres rangées de palissades transversales ont été disposées ayant chacune une longueur de 15 m. et une direction oblique par rapport aux premières.

Fig. 6. Palissades en partie ensablées.

Dans la construction des obstacles transversaux on a gardé de même une alternance des palissades et espaces libres: une palissade transversale de chaque rangée oblique étant jointe à une palissade des rangées précédentes. Le rôle des palissades transversales a été de protéger le sable contre les vents de l'Ouest et de l'Est.

Les compartiments résultés de la construction de ces palissades avaient une forme quinconciale.

Pour que le roseau puisse opposer une plus grande résistance au vent, il a été enterré dans le sable jusqu'à 40-50 cm. de profondeur

et il a été solidement renforcé à l'aide des faisceaux de roseaux disposés transversalement et reliés à la palissade par des rameaux de saules à une hauteur de 1 m. du sol.

La hauteur totale des palissades a été au début de 1,50 m.

Ce système de protection du sable, imaginé pour la région de Vâlcov-Jibrieni, a donné de très bons résultats, car en moins de deux mois dans les endroits les plus exposés les palissades ont été en partie ensablées jusqu'à 20—30 cm. (fig. 3 et 6).

Dans un endroit où l'action du vent du Nord était trop forte pour que les palissades puissent seules protéger le sable, ce dernier fut en outre recouvert de roseaux, les tiges étant disposées dant la direction du vent du Nord, afin qu'elles ne soient pas éparpillées.

Au cours de la première année j'ai construit 125.000 mètres de palissades.

Les dépenses ont été minimes, les matériaux axant été mis gratuitement à notre disposition par le département de Chilia, tandis que les ouvriers faisaient partie des équipes affectées au service social.

En même temps j'ai récolté environ 150 kg. de semences de différentes espèces indigènes de jonc et de graminées, qui poussent à l'endroit même et dont j'ai ensemencé le sable meuble à l'intérieur des compartiments, dans le but d'accélérer la fixation.

Grâce à cette double intervention, le sable n'a plus été transporté par le vent.

Comme mesure générale de protection pour le sable, on a interdit le pâturage qui agit d'une manière destructive dans des terrains semblables.

* * *

2. - Les sables de Vâlcov-Jibrieni étant des terrains pauvres, la culture forestière paraît être celle qui convient le mieux à leur mise en valeur.

J'ai commencé le boisement des sables en 1942 au printemps en même temps que les travaux plus haut indiqués.

J'ai employé le peuplier nommé du Canada, le frêne, très peu le robinier et, dans quelqes endroits, j'ai planté aussi quelques exemplaires de chênes.

Le peuplier du Canada (*Populus Canadensis Moench.*) donne de très bons résultats, ce qu'on peut constater aussi dans les reboisements effectués par l'Etat dans la forêt domaniale de Letea. Sur les dunes dans la forêt de Letea, le peuplier arrive à une hauteur de 3 - 4 m. en 2 - 3 ans. J'ai planté à Vâlcov-Jibrieni des plants communs et de hautes tiges à une distance de 1.50 m. et de 1,50/1,50 mètres et les boutures à une distance de 1,00/1,00 m. (fig. 7).

Toutes les plantations ont été faites dans les dépressions là où l'humidité du sol est plus grande, dans le but de produire sur place le matériel nécessaire pour les travaux prochains et de mettre aussi sous les yeux des habitants de la région le plus rapidement possible les résultats de notre entreprise.

La réussite des plantations faites avec le peuplier du Canada a été parfaite.

Le frêne (*Fraxinus excelsior L.* et *Fraxinus americana L.*) *et* le chêne (*Quercus Robur L.*) (fig. 8) ont donné aussi de très bons résultats. J'ai fait les plantations à 1.00/1.50 m. de distance. Si on tient compte de la végétation de la forêt de Letea, on peut être sûr d'obtenir sur les sables de Vâlcov-Jibrieni de très beaux exemplaires de frênes et de chênes, comme il en existe d'ailleurs dans les environs, notamment dans les cours de quelques habitants de Vâlcov.

Fig. 7. Plantations de hautes tiges de peuplier du Canada Les pousses sont très vigoureuses.

Quant au robinier (*Robinia pseudoacacia L.*), cette espèce a été employée dans l'unique but de propagande, étant considérée comme une espèce transitoire.

Fig. 8. Dune fixée par des palissades, herbes et plantations de frênes, chênes et robiniers.

Avec de jeunes plants de robinier plantés à une distance de 1.00/1.00m. on a fait une bande de protection le long de la route de Vâlcov-Jibrieni, ayant une largeur de 17 m. et quelques petits bouquets dans les endroits les plus humides entre les dunes.

La première année les résultats ont été bons, mais je ne considère pas le robinier comme une espèce d'avenir dans la région.

Dans les endroits où l'on a effectué des plantations forestières, on a fait aussi des ensemencements avec *l'Amorpha fruticosa L*, pour enrichir le sol en azote. Le résultat en a été satisfaisant.

La première année j'ai planté en total 84 ha.

Bien qu'on n'ait effectué dans les plantations aucune culture intermédiaire, leur végétation est très active.

Pour intensifier le boisement des sables, j'ai remis en état de culture une ancienne pépinière de 2 ha et dans laquelle j'ai fait des semis de *Taxodium distichum* (*L*) *Rich.* d'Ailanthe et d'Amorpha et des repiquages de Taxodium, de *Gleditschia triacanthos L. d'Acer negundo L*, de frêne el de chêne

En même temps, j'ai récolté autre part de la semence de *Pinus nigra Arn. var. Pallassiana A. et G.*, que j'ai semée dans une pépinière pour avoir du matériel nécessaire aux plantations ultérieurs des sables.

Il faut noter que jusqu'à présent on n'a pas encore fait chez nous de grandes plantations dans les sables marins. On a essayé, il y a longtemps, le pin maritime (*Pinus maritima Mill*) dont les rélultats ont été désastreux – et récemment le peuplier du Canada et l'Aune glutineux dans le Delta du Danube, où ils paraissent être très indiqués pour les boisements.

Il semble que *l'Acer negudo* donne aussi de très bons résultats.

Les expériences faites par les hommes de sciences Soviétiques dans des régions dont les conditions écologiques sont comparables à celles de Vâlcov-Jibrieni, nous montrent (3, 11) que les meilleures espèces pour le boisement des sables sont d'abord les pins (*P. nigra Arn. var. Pallassiana A et G., P. silvestris L, P. nigra Arn. var. austriaca A et G., P. rigida Mill et P. Banksiana Lamb.*) et ensuite les peupliers (*P. Canadensis. P. Bolleana Mast.* et *P. nigra L.*). Dans les endroits les plus humides on peut cultiver très avantageusement l'aune (*Alnus glutinosa. L. Gërtn*) Enfin, sur les sables les plus riches on peut obtenir de bons résultats si on cultive le chêne, le gleditschia, le bouleau, le mûrier, et la micocoulier

Parmi les arbustes, les plus indiqués pour les sables sont : *Eleagnus augustifolia L., Caragana arborescens Lam, Tamarix Pallasii Desv. Amorpha fruticosa, Hippophäe rhamnoides,* et *Acer tataricum L.*

Il ne faut pas oublier d'accorder toute l'attention méritée aux arbustes et surtout à ceux qui ont la propriété de fixer par leurs racines l'azote de l'atmosphère.

III. Conclusions

Bien que les travaux de boisement dans les sables de Vâlcov-Ji-

brieni aient été à peine commencés, on peut en tirer quelques conclusions générales intéressantes pour la fixation des sables marins du Delta du Danube.

1.-Les sables marins de la région du Delta du Danube se trouvent situés dans un climat sec ; mais à cause du microclimat particulier ils peuvent être très bien mis en valeur par la culture forestière. Ceci est confirmé d'ailleurs par les bouquets de différentes espèces ligneuses qui végétent dans les sables de Jibrieni (fig. 4), d'une manière spontanée.

2. - Pour aboutir à des résultats satisfaisant en ce qui concerne la mise en valeur des terrains en question, il faut d'abord fixer le sable et ensuite faire les plantations forestières.

Le pâturage, qui produit de gros dégâts dans les forêts s'il est pratiqué régulièrement, constitue pour les sables une véritable catastrophe. Le pâturage met en mouvement le sable et en rend impossible la fixation.

L'interdiction du pâturage dans les sables est une des mesures les plus importantes et les plus urgentes à prendre.

En même temps il faut continuer, là où il sont nécessaires, les travaux pour fixer le sable ; le procédé utilisé par moi à Vâlcov-Jibrieni donne de bons résultats, il n'est pas couteux et peut être appliqué ailleurs aussi.

3. - L'évolution de la forêt, dont la plantation a été commencée, sera comparable en tout à l'évolution de la forêt de Letea, qui se trouve dans les mêmes conditions écologiques que les sables de Vâlcov - Jibrieni au milieu du Delta du Danube et qui ne sont séparés que par le bras Chilia du Danube.

Le premier aspect de la forêt, qui est en train de plantation aussi bien que la succession des peuplements dépendront des espèces introduites et de leur culture ultérieure.

Au début on a introduit sur une plus grande échelle le peuplier du Canada, qui d'après l'exposé fait semble donner les milleurs résultats - et aussi parce que son bois est apprécié dans l'industrie des allumettes.

Sur les plus hautes dunes, là où l'eau phréatique se trouve à une grande profondeur, c'est à dire là où les conditions de végétation son très difficiles, il serait recommandable de faire des boisements en utilisant des espèces plus rustiques et plus résistantes à la sécheresse.

Parmi celles-ci il ne faut pas oublier les différentes espèces de pins, expérimentées par les spécialistes Soviétiques et que je crois très indiquées à essayer chez nous aussi, c'est à dire : *Pinus nigra var. Pallassiana et var. austriaca, P. rigida Mill., P. Banksiana et P. Silvestris.*

MEZŐGAZDASÁGI MÚZEUM KÖNYVTÁRA

Dans les endroits les plus humides ou pourrait planter à côté du peuplier, l'aune, qui a si bien réussi dans la forêt de Letea.

Pour enrichir les sables en substances nutritives, on doit introduire par platation aussi des arbustes et spécialement les *Caragana arborescences et l'Ămorpha fruticosa.*

4. – Etant donné que, chez nous, le boisement des sables marins est encore dans la phase de début, l'affectation d'une certaine superficie aux recherches scientifiques s'impose.

Sur ces terrains affectés aux recherches la science et la pratique forestière trouveraient un vaste champ d'activité cherchant en premier lieu à définir les rapports existant entre le situation et la végétation forestière.

En même temps, par des études bien suivies nous pourrions nous rendre compte de la possibilité d'acclimatation d'un nombre d'espèces à grand rendement industriel, considérées jusqu'ici chez nous comme impropres à la culture.

Il suffit de visiter une seule région où l'on a depuis longtemps fait de pareils boisements, telles en France les Landes de Gascogne, pour se rendre compte de la richesse que ceux-ci peuvent représenter.

Mais on ne saurait y arriver en n'utilisant pour le boisement qu'exclusivent les espèces les plus appropriées à la station ; il faut rechercher aussi celles ayant de grandes possibilités de valorification par une culture forestière intensive.

C'ést ce qui revient à l'expérimentation forestière qui par toutes sortes d'essais, très circonspects au commencement, doit obtenir des renseignements précis sur la possibilité de culture des espèces exotiques, en vue de réaliser plus tard de grands travaux dignes d'un pays à culture forestière très intensive.

Faculté d'Agronomie
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Juillet 1947).

Travaux cités

1) Antipa Gr. – *Câteva probleme ştiinţifice şi economice privitoare la Delta Dunării.* Analele Ac. Române, 1914.
2) „ – *Marea Neagră.* Publicaţiile fondului V. Adamachi, Bucureşti, 1941.
3) Bacov V. P., Eftov S. F. – *Polizahinsnii lisovi smughi* (Perdelele de protecţie), Harcov 1937.
4) Brăileanu Al. – *Lacul Razelm.* Bul. Soc. Reg. de Geografie, 1938.
5) Brătescu C. – *Contribuţiuni la studiul Deltei Dunării.* Bul. Soc. Reg. de Geografie, 1921,

6) Cernescu C. N. – *Facteurs de climat et zones de sol en Roumanie*, Bucureşti, 1934.
7) Chiriţa D. C. – *Nisipurile dela Hanul Conachi*, Analele I. C. E. F. vol. III, Bucureşti 1937.
8) Chiriţa D. C. şi Balanica Th. – *Cercetări asupra nisipurilor din sudul Olteniei*. Analele I. C. E. F. vol. IV. 1938.
9) Cuzneţov A., Bachin I., Albenschi A. – *Lesnâie posadki v kolhozah* (Plantaţiile de pădure în colhozuri). Stalingrad, 1937.
10) Disescu C. A. – *Contribuţiuni la climatologia ţărmului Mării Negre*. Bul. Metereologic lunar, Mai 1928.
11) Eitingen K. G. – *Lesovodstvo* (Silvicultură), Moscova 1936.
12) Enculescu P. – *Zonele de vegetaţie lemnoasă din România*. Memoriile Inst. Geologic al României, vol. I. Bucureşti, 1924.
13) De Martonne Emm. – *Traité de géographie physique*, Paris, 1932–35.
14) Murgoci G. – *Cercetări geologice în Dobrogea Nordică*. Anuarul Inst. Geologic al României, Anul V. fasc. 2, Bucureşti 1912.
15) Perrin H. – *Notes du cours de sylviculture et de géographie forestière, professé à l'Ecole des Eaux et Forêts* (inédit) Nancy, 1937–38.
16) Prodan J. – *Flora nisipurilor din România*. Bul. Agriculturii, vol. III, Bucureşti 1925.
17) „ – *Die Flora der Dobrudscha und ein kurzer Überblick über die Flora der Meeresküste Rumäniens*. Bul. Minist. Agriculturii şi Domeniilor, vol. VI. Bucureşti 1931,
18) Săvulescu Tr. – *Călăuza pentru excursiuni în Delta Dunării*. Bucureşti.
19) „ – *Die Vegetation von Bessarabien*, Bucureşti 1927.
20) Scerbacov B. V. – *Extras din Pervaia Kniga po agrolesomelioratii* (Prima carte de ameliorăţiuni agro-silvice), Moscova 1933.
21) Tălăsescu A. – *L'agriculture et la colonisation italienne en Lybie*. Bucureşti 1941.
22) Tănăsescu N. – *Contributions à l'étude botanique et forestière des taillis sous futaie*. Nancy 1939.

LAMPE À VAPEUR DE MERCURE COMME AMPLIFICATEUR [1]

par

ALEX. CIŞMAN et E. LUCA

Résumé. – Etude expérimentale d'une lampe à vapeur de mercure à deux anodes symétriques, d'un modèle spécial, capable d'amplifier et de moduler les oscillations à basse fréquence et le courant continu. Caractéristiques et oscillogrammes de fonctionnement.

Dans trois mémoires antérieurs [2] [3] [4] un modèle spécial de lampe à vapeur de mercure a été étudié en vue de plusieurs applications pratiques, notamment comme générateur d'oscillations entretenues, à réaction ou à relaxation.

Comme nous l'avons déjà remarqué, dans les deux premiers articles publiés, la même lampe étant capable de fonctionner aussi comme amplificatrice, nous nous sommes proposé d'entreprendre son étude expérimentale à ce point de vue.

La lampe est constituée d'un tube de verre de 18.5 mm. diamètre intérieur, dans lequel sont fixées par mastiquage deux anodes en fer (fig. 1).

Pour éviter un chauffage exagéré, ces anodes, ainsi que le mercure de la cathode sont refroidis par circulation d'eau.

Le vide est assuré par une pompe rotative à l'huile, à deux étages, qui fonctionne sans interruption.

L'alimentation est faite en courant continu, sous 80 Volts, à travers le rhéostat principal R et deux résistances en dérivation r et r' (fig. 2).

La cathode est reliée directement au pôle négatif.

---

1) Travail exécuté sous les auspices de l'Institut National de Recherches Techniques en Roumanie.

2) Th. V. Ionescu – Annales Sci. Université de Jassy T. XIV, page 289, 1926.

3) Alex. Cişman et Th V. Ionescu – Annalen der Physik, **5**, 20. pag. 183, 1934.

4) Alex. Cişman et E. Luca – ce „Bulletin", 481-485.

Un champ magnétique, perpendiculaire au plan de la figure peut dévier la décharge et augmenter le courant dans l'une des anodes, au détriment de l'autre.

Ce champ magnétique joue donc le même rôle que la grille de commande dans une lampe triode ordinaire.

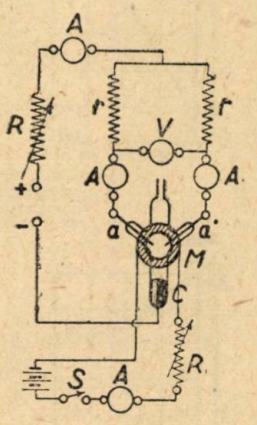


Fig. 1.

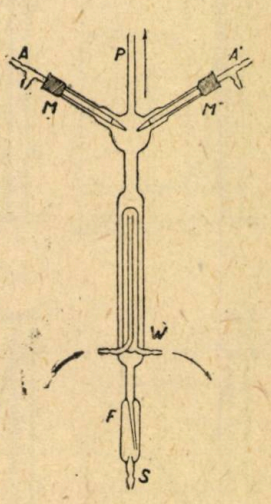


Fig. 2.

Dans nos expériences il était produit par deux bobines identiques ayant chacune 890 spires en fil de cuivre de 0,7 mm. diamètre.

La partie bobinée avait 40 mm. de longueur, sous 120 mm. de diamètre extérieur. La distance en regard des bobines était de 30 mm.

a) *L'aplification en courant continu.* Les bobines du champ étant alimentées en courant continu, par une batterie d'accumulateurs de 12 Volts, sous l'intensité variable i, nous avons d'abord tracé les courbes caractéristiques

$$I_1 = f(i)$$

et

$$I_2 = f(i)$$

des courants d'anode I_1 et I_2 en fonction du courant magnétisant i.

Les résistances r et r', tout en restant égales entre elles ont eu, pour ces mesures, successivement les valeurs

0,5; *1*; *2,5* et 5 Ohms.

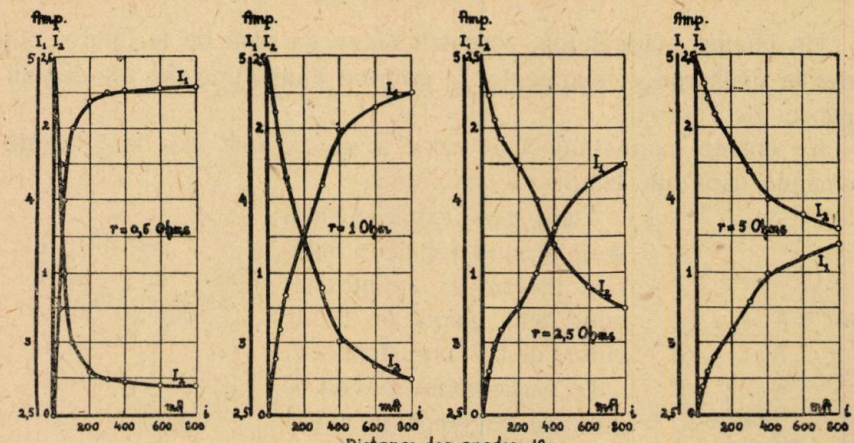
La longueur de l'arc a été de

40; *100* et *170* mm.

La distance en regard des anodes était maintenue à 18 mm. et l'intensité totale d'alimentation $I_1 + I_2$ était de 5 Amp. Les figures 3, 4 et 5 représentent les courbes obtenues.

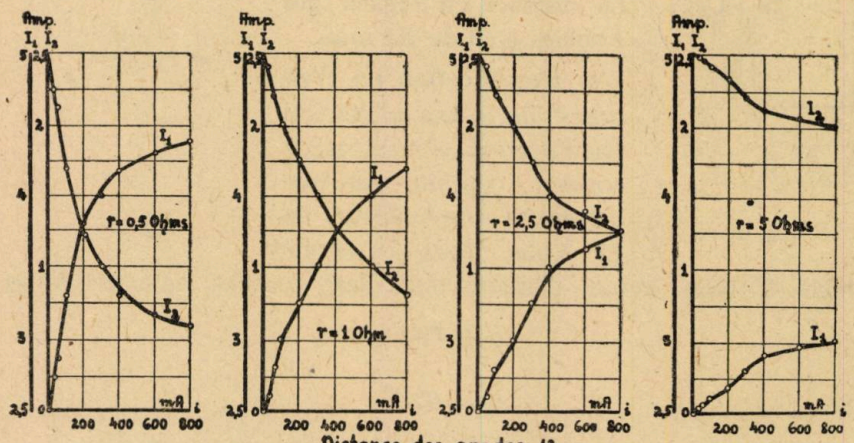
L'étude de ces courbes montre que l'amplification est rectiligne et d'autant meilleure, pour de petites valeurs des résistances r et r'.

Dans les mêmes conditions, nous avons répété les mesures, après avoir réduit à 5 mm. la distance des anodes. Pour une longueur d'arc de 170 mm. nous avons obtenu des courbes à peu près similaires. (Fig. 6)



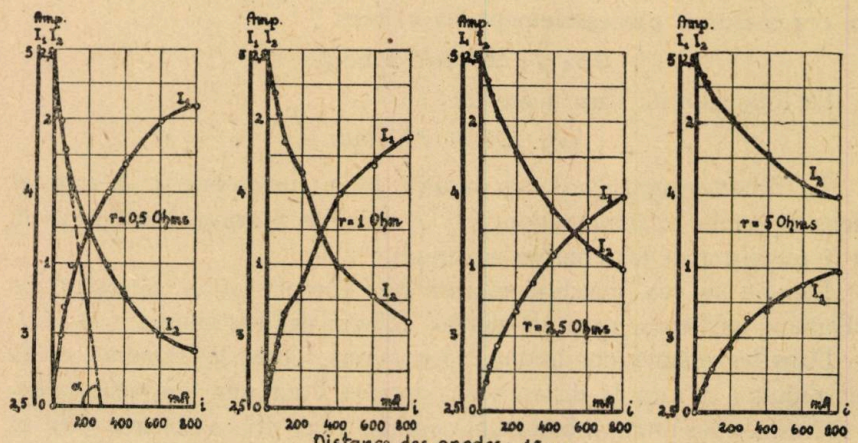
Distance des anodes: 18 mm
Longueur d'arc 40 mm

Fig. 3.



Distance des anodes: 18 mm
Longueur d'arc: 100 mm

Fig. 4.



Distance des anodes: 18 mm
Longueur d'arc: 170 mm

Fig. 5.

L'examen de ces courbes montre qu'il est plus avantageux, pour l'amplification, de ne pas trop rapprocher les deux anodes.

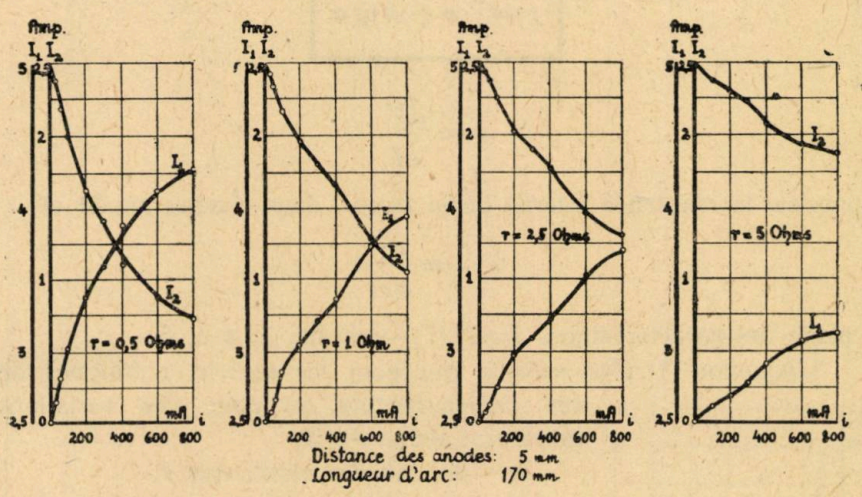


Fig. 6.

b) *Equation générale de la lampe.* L'intensité du courant I_0, dans chacune des anodes, dépend de la tension aux bornes V_0 et du champ magnétique de commande H_0.

Nous avons donc

$$I_0 = f(V_0, H_0).$$

Quand V_0 et H_0 subissent des variations infiniment petites v et h, on peut écrire

$$I_0 + j = f(V_0 + v,\ H_0 + h).$$

Ou, en développant,

$$I_0 + j = f(V_0, H_0) + \left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_0 v + \left(\frac{\partial I}{\partial H}\right)_0 h.$$

Par suite

$$j = \left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_0 v + \left(\frac{\partial I}{\partial H}\right)_0 h.$$

Mettons

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_0 = \frac{1}{\varrho}$$

et

$$\left(\frac{\partial I}{\partial H}\right)_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nous obtenons finalement

(1) $$\boxed{j = \frac{1}{\varrho} v + h \operatorname{tg} \alpha}$$

où

$$\varrho = \frac{dV}{dI}$$

représente la résistance interne de la lampe, dans chaque anode et

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dI}{dH}$$

la pente des caractéristiques $I = f(H)$ - voir fig. 3, 4 et 5.

L'équation (1) n'est valable que pour les régions rectilignes de ces caractéristiques, ou pour des variations infiniment petites v et h.

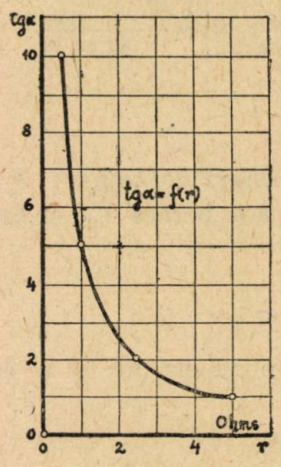


Fig. 7.

$\operatorname{tg} \alpha$ dépend des résistances r.

La figure 7 montre la variation de $\operatorname{tg} \alpha$, en fonction des résistances r.

On remarque immédiatement qu'on peut écrire

$$r \operatorname{tg} \alpha = N$$

où N est une constante qui, pour la lampe étudiée et la distance de 18 mm. entre les anodes, *a pour valeur $N = 5$.* Il est facile de calculer la différence de potentiel $2v$, qui apparaît entre les anodes, par l'effet du champ magnétique: La pente des caractéristiques, fig. 3, 4 et 5, étant positive pour une anode et négative pour l'autre, les résistances ϱ des deux ramifications de l'arc, déduites de la formule (1) sont respectivement

$$\varrho_1 = \frac{v}{j + h \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{et} \quad \varrho_2 = \frac{v}{j - h \operatorname{tg} \alpha}.$$

En écrivant que la différence de potentiel entre les points a et b (Fig. 8) est $2v$, on a, sur le circuit abc,

$$2v = 2rj$$

et, sur le circuit adb,

$$2v = j \frac{v}{j - h \operatorname{tg} \alpha} + j \frac{v}{j + h \operatorname{tg} \alpha}.$$

En égalant, il résulte

$$v = \frac{r}{j}(j^2 - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Ou, parce que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{N}{r}$

(2) $$\boxed{v = \frac{r}{j}\left(j^2 - h^2 \frac{N^2}{r^2}\right)}.$$

Cette formule n'est, bien entendu, valable que pour des valeurs infiniment petites des variations j, h et v ou pour les régions rectilignes des caractéristiques.

Elle est confirmée, en ligne générale, par l'expérience.

Pour l'interpréter il faut tenir compte du fait que

$$j = f(h)$$

et que cette fonction est définie par les courbes Fig. 3-6.

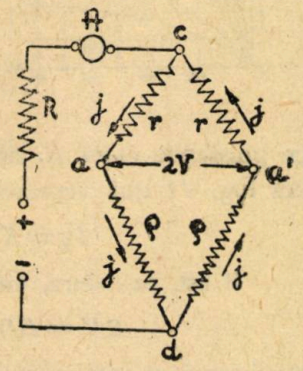


Fig. 8.

c) *Etude expérimentale de l'amplification en courant continu.* Les résistances extérieures r étant toujours égales entre elles, un courant i dans les bobines du champ magnétique détermine l'apparition d'une différence de potentiel $2V$ entre les anodes.

Les courbes Fig. 9 montrent la variation de $2V$, en fonction de l'intensité i, des résistances r et de la longueur de l'arc l.

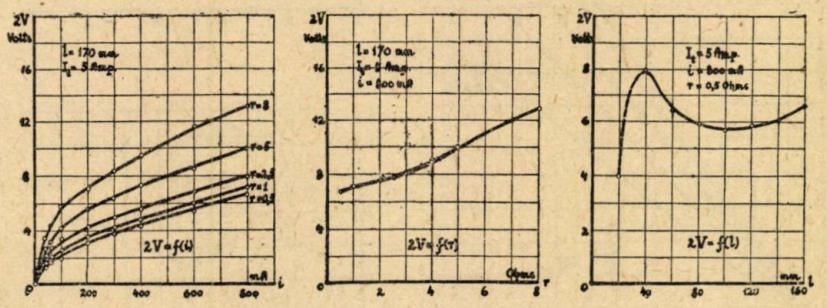


Fig. 9.

D'autre part, le même courant magnétisant i produit une dissimétrie des courants d'anodes et emmene leurs valeurs respectives de I_0 à I_1 et I_2.

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA BUDAPEST

Les courbes Fig. *10* montrent les variations de la différence $I_1 - I_2$ en fonction de i, r et l.

Soit P_1 la puissance en watts, employée dans les bobines du champ magnétique et P_2 la puissance modulée par la lampe. L'amplification

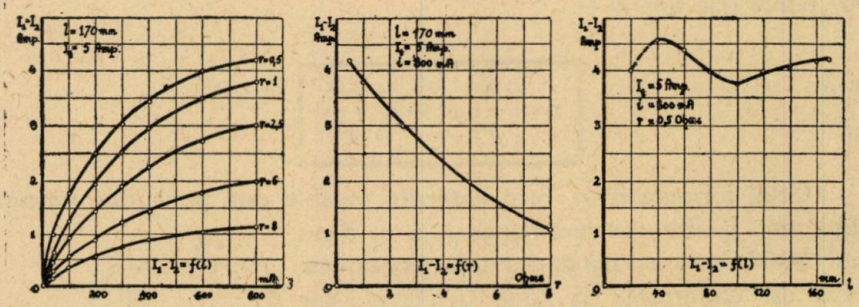


Fig. 10.

en puissance étant K, des courbes ci-dessus on peut déduire les courbes Fig. *11* qui, représentent réspectivement les fonctions

$$P_2 = K P_1 \; ; \quad K = f(r) \quad \text{et} \quad K = f(l).$$

Il est, peut-être, intéressant de remarquer que les fonctions

$$2V = f(l) \; ; \quad I_1 - I_2 = f(l) \quad \text{et} \quad K = f(l)$$

touchent leur minimum quand la longueur de l'arc est de 100 mm. et

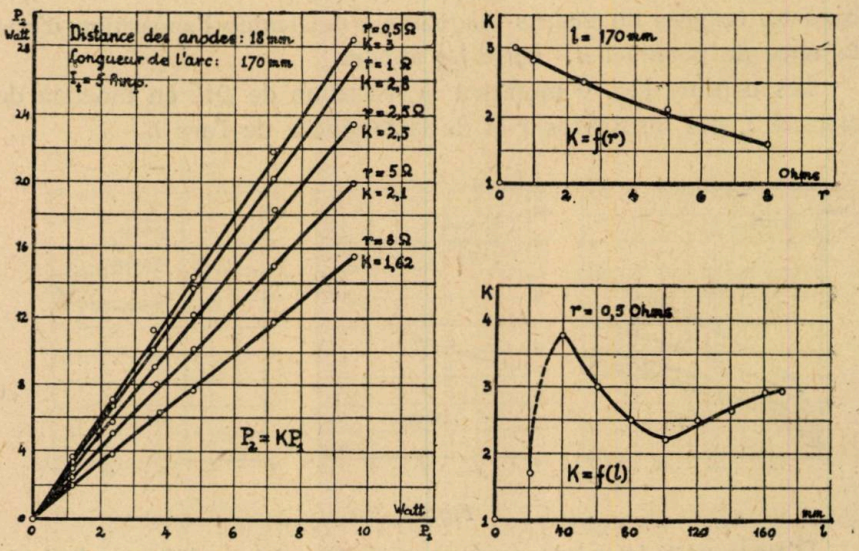


Fig. 11

un maximum (difficile à préciser, à cause de l'instabilité) quand cette

longueur est de 40 mm, c'est à dire au moment de l'apparition de la colonne positive.

d) *L'amplification en basse fréquence.* Il est évident que le montage Fig. 2 peut servir comme amplificateur à résistances, aussi bien en courant continu qu'en basse fréquence. Pour l'adapter aux constantes d'un diffuseur, nous avons aussi essayé un montage à transformateur en *Push-Pull.*

La figure 12 représente le schéma de ce montage.

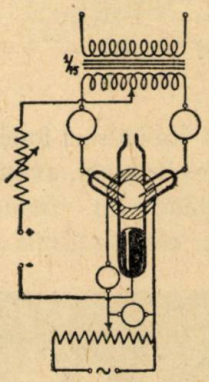


Fig. 12.

Les constantes du transformateur employé étaient les suivantes :

Fréquence de base, à amplifier : $N_0 = 50$ per/sec.

Selfinduction primaire : $L_p = 2 \times 0{,}06$ Hy.

Spires primaire : $N_p = 2 \times 340$, fil de *1,2* mm. diamètre.

Spires secondaire : $N_s = 10.200$, fil de *0,15* mm. diamètre.

Rapport de transformation : *1 | 15*

Section du noyau : *12,25* cm².

Les constantes des deux bobines du champ magnétiques étaient, cette fois-ci, les suivantes :

Diamètre extérieur : : 100 mm.

Diamètre intérieur : 55 mm.

Longueur du bobinage : 40 mm.

Nombre de spires : 2×1700, fil de 0,3 mm. d.

Impédance : 2×100 Ohms.

Distance entre bobines : 26 mm.

En notant par :

k_v, le rapport $\dfrac{\text{Tension efficace aux bornes des bobines}}{\text{Tension efficace au second. du transf.}}$

par

K, le rapport $\dfrac{\text{Puissance dans les bobines magnétiques}}{\text{Puissance dans le transformateur}}$

par

F, la fréquence à amplifier

par

P_1 et P_2, les puissances d'input et d'output

et par

I_t, l'intensité totale d'alimentation de l'arc,

nous avons tracé les courbes Fig. 13, qui représentent les variations des fonctions :

$$k_v = f(F); \quad P_2 = KP_1 \quad \text{et} \quad K = f(I_t).$$

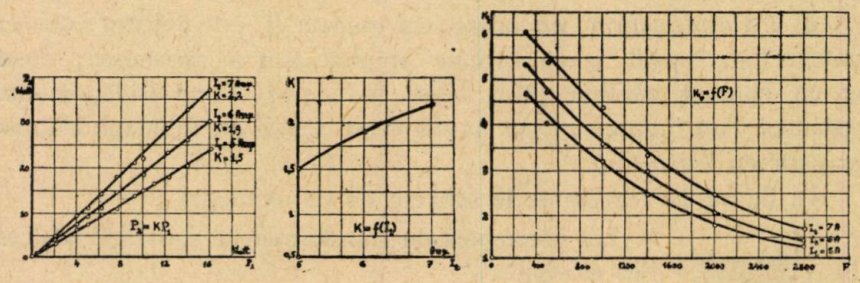


Fig. 13.

e) *La lampe comme modulatrice d'oscillations.* En laissant fonctionner notre lampe comme oscillateur à relaxations [1]) nous avons passé un courant de fréquence variable dans les bobines du champ magnétique et obtenu de très belles modulations de ces oscillations.

La Figure 14 montre une oscillation de 32.000 pér/sec. modulée à 800 pér/sec., photographiée à l'oscillographe cathodique.

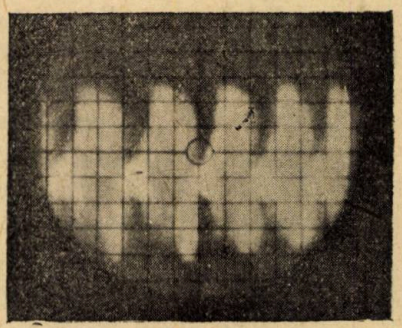


Fig. 14.

Il est évident que l'emploi de bobines magnétiques sans fer diminue de beaucoup l'amplification et qu'il serait avantageux d'y introduire un noyau.

Nous construirons, peut-être plus tard, un amplificateur transportable et pratique, où il sera tenu compte de toutes les modifications nécessaires.

Pour l'exécution dans l'atelier mécanique du laboratoire d'une partie des dispositifs nécessaires, nous exprimons nos meilleurs remerciements à Mr. V. Nichiforel, mécanicien en chef.

Laboratoire de Physique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

1) Voir l'article précédant, ce «Bulletin», pag. 481—485.

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS

Morse, Marston – *Topological methods in the theory of functions of a complex variable.* Annals of Mathematics Studies Nr. 15. Princeton University Press, Princeton (N. J.), 1947. IV+ 146 p. (lithoprinted).

The very rigorous, perhaps excessive, arithmetical-algebraic point of view of Weierstrass and his school in the classical theory of functions of a complex variable is well known; one is tempted to characterize it as follows:

The theory of functions is the study of a specific process (the analytical continuation) superposed upon a topological structure induced by an algebraic structure.

Another dominant tendency in this field, representend chiefly by Riemann, Klein, Schwarz and Poincaré makes a constant use of the geometrical intuition and its main tool the purely topological concept of Riemann surface, later put by Weyl into its adequate frame, that of the Hausdorff spaces.

This enlargement of the foundations of the theory of functions suggests naturally the following problem:

Given a not purely metrical property, pertaining to a class of analytic functions in a (closed) domain, to detect its topological kernel and afterwards to find a wider class of functions to which the respective property still belongs.

Among the pioneers in this field we are glad to quote the eminent roumanian mathematician S. Stoilow (Cf. his book „Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques", Paris 1939).

In the last years prof. Marston Morse, one of the prominent research men in various difficult fields of topology, e. g. in the theory of the calculus of variations in the large, had focused his attention upon the problem formulated above and in a series of papers written jointly with Dr. Maurice Heins has given a vigorous impetus to such studies.

In the monograph we are reviewing that contains substantially, as the author tells us, a set of lectures given at Princeton during the

fall of 1945, the point of view is a quite opposite one: the author starts with a more general class of functions and the results specialize into theorems on harmonic functions and meromorphic transformations.

It is quite impossible to give in a short review an adequate account of the great number of new results and new concepts of Morse, but I cannot refrain from quoting what seems to me the spine of the work, viz. the pseudo-harmonic functions and the interior transformations.

The rich harvest of results makes clear that, as it could be expected, the powerful topological methods, handled by expert hands, can open new paths to the science even in such old conservative fields as the theory of functions and the author are indebted to us to continue what himself characterises as „the beginning of such studies".

Table of contents.

Ch. I. The pseudo-harmonic functions. Ch. II. Differentiable boundary values. Ch. III. Interior transformations. Ch. IV. The general ordre theorem. Ch. V. Deformations of locally simple curves and of interior transformations.

Prof. Dr. **Al. C. CLIMESCU**

Mathematical Institute
of the Technical University
(Polytechnic Institute) of Jassy

* * *

Morand, Max – *Introduction mathématique aux théories physiques modernes* (Première partie: nombres complexes, matrices, opérateurs, applications élémentaires). Un vol. de 140 pages, Paris, Librairie Vuibert 1947.

C'est un fait bien connu que les mathématiciens français ont opposé pendant longtemps une résistance assez tenace à certains courants de la pensée mathématique moderne, entre autres au courant qu'on pourrait appeler opérationnel (par ex. les opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert) et le fait peut paraître surprenant à première vue de la part d'un mouvement scientifique si préoccuppé des fonctions d'un nombre complexe ordinaire et des espaces abstraits; mais l'explication se trouve peut être eu égard aux caractères propres de la cullure française, qui a toujours servi jusqu'ici de frein et de filtre et qui n'a accepté les idées nouvelles qu'à bon escient, après avoir été prouvé que lesdites idées sont réellement fructueuses ou qu'elles permettent d'organiser des résultats épars en un tout cohérent. Depuis une quinzaine d'années des symptômes certains-par ex. l'apparition de l'Introduction

mathématique aux théories quantiques" de M. Julia-indiquaient que le courant opérationnel avait acquis droit de cité, très probablement à la suite des succès éclatants qu'il remportait en physique mathématique. Bien entendu, le signe le plus certain de l'adoption d'une théorie est l'apparition des ouvrages destinés à sa diffusion chez les commençants et c'est le stade auquel on en est arrivé avec la théorie qui nous préoccupe.

M. Max Morand, professeur à la Sorbonne, bien connu du public spécialisé, par exemple pour ses belles recherches sur les principes de la physique, nous donne maintenant un ouvrage qui sera utile à de nombreux lecteurs, et cela à deux points de vue:

1°. Au point de vue de l'initiation à des théories et des méthodes qui, belles en elles-mêmes, sont indispensables aux physiciens.

2°. Au point de vue du rassemblement de certaines questions, apparemment distinctes, autour d'un petit nombre de principes unificateurs.

Signalons tout de suite que ce sont les idées de groupe et de matrice qui servent à M. Morand à axer toute son exposition.

L'ouvrage débute par un rappel axiomatique des propriétés des nombres naturels et des nombres rationnels: mais à l'occasion de la question des extractions des racines, l'auteur recourt fort opportunément à l'intution et nous dit textuellement ceci:

„Toutefois, nous pouvons penser qu'il existe un symbole bien défini permettant de représenter un nombre dont le carré est égal à 2, car les relations géométriques les plus élémentaires supposent à priori l'existence de nombres de cette espèce";...

Cela lui sert de transition à l'exposition de la représentation des nombres arithmétiques par des points d'une demi-droite, à l'introduction des ensembles de points et à la définition des nombres arithmétiques à l'aide des coupures; c'est malgré la critique de Weyl, la meilleure façon de légitimer leur emploi. Ensuite l'auteur introduit les nombres algébriques – c'est-à-dire pourvus d'un signe – et cela grâce au groupe des translations suivant une droite et au groupe des homothéties sur une droite; il passe enfin au groupe des déplacements du plan et à sa représentation linéaire algébrique, ce qui lui fournit le moyen approprié d'introduction des matrices et de leurs opérations. A ce moment le lecteur est préparé à accepter sans difficulté l'idée que toute matrice carrée de nombres réels réalise l'extension de l'idée de nombre et effectivement l'auteur introduit aussitôt les nombres complexes comme provenant de la représentation des transformations linéaires homogènes non-singulières du plan et inversement, tout nombre complexe peut être considéré à travers sa représentation par un couple de vecteurs orthogonaux comme un opérateur dans le plan.

Le Ch. II traite de l'analyse combinatoire, elle aussi rajeunie par les matrices, qui fournissent une représentation commode et suggestive des arrangements et des permutations et permettent de les interpréter comme un produit de symétries dans un espace convenable. Le Ch. III introduit les déterminants de la manière usuelle et traite aussi de leurs applications (équations linéaires, inversion des matrices) ; enfin le Ch. IV est consacré à l'application des matrices à la géométrie tridimensionnelle élémentaire, à la notion d'opérateur et de fonction d'opérateur appliquée à un vecteur (considéré lui-aussi comme une matrice d'un type particulier), aux nombres hypercomplexes, aux changements d'axes de coordonnées, enfin aux vecteurs et valeurs propres d'une matrice carrée. Pour terminer, l'auteur insiste sur la nécessité d'introduire des vecteurs à composantes complexes afin d'assurer aux théories mathématiques toute la généralité indispensable aux applications à la physique.

En tout et pour tout un livre attachant et unitairement charpenté et on en attend avec impatience la suite, qui doit traiter des géométries complexes, des tenseurs et spineurs etc. pour aboutir aux applications à la mécanique quantique et ondulatoire.

Prof. Dr. **Al. C. CLIMESCU**

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Cisotti, Umberto - *Analisi Matematica*. Ristampa della sesta edizione. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini. XIX + 692 pp. Milano 1946.

Sans connaître personnellement l'auteur de ce livre, nous tenons d'un de nos collègues, ancien élève de M. Cisotti, que son enseignement se distingue par une parfaite clarté et qu'il possède à un haut degré l'art de présenter les questions les plus difficiles d'une manière telle que même les moins doués parmi les auditeurs puissent les saisir et les suivre dans leur enchaînement conceptuel et démonstratif.

Les mêmes qualités caractérisent son cours d'analyse, dont d'ailleurs le succès de librairie témoigne qu'il répondait entièrement aux besoins des futurs ingénieurs. A la manière italienne, il comprend aussi l'exposition de certaines questions appartenant plutôt à l'algèbre qu'à l'analyse proprement dite, par ex. les Ch. I, II, III, qui traitent respectivement de l'analyse combinatoire, des déterminants et des équations linéaires.

Avec le 4-ème Ch. on aborde la présentation des notions d'analyse (intervalles, fonctions d'une variale, limites, continuité, fonctions hyperboliques), le tout facilité par un emploi constant des représentation graphiques, ce qui constitue d'ailleurs un caractère spécifique de tout le livre. Ensuite viennent (Ch. V) les dérivées, les infiniment petits et grands (Ch. VI), l'intégrale (Ch. VII) introduite d'une manière très intuitive en partant des quadratures et de l'expression du travail d'une force. Les Ch. VII et IX exposent la théorie des vecteurs et les applications géométriques du calcul différentiel et le Ch. X les nombres complexes. Les chapitres suivants traitent des équations algébriques (Ch. XI), des séries numériques et de puissances (Ch. XII), de l'intégration des fractions rationnelles (Ch. XIII) et des intégrales définies, y compris les intégrales impropres et généralisées (Ch. XIV).

La seconde partie débute avec le Ch. XV dans lequel on passe rapidement en revue, mais d'une manière assez complète, les propriétés des fonctions de plusieurs variables (continuité, dérivées partielles et différentielles totales, séries de Taylor, maximum et minimum). Le Ch. XVI s'occupe des intégrales de quelques fonctions irrationnelles et transcendantes, le Ch. XVII et le Ch. XVIII introduisent les intégrales multiples, le Ch. XIX traite des applications à la théorie des surfaces, le Ch. XX des intégrales de champ (curvilignes, de surface) et des relations qui les relient. Le Ch. XXI passe en revue les principales équations différentielles, le Ch. XXII traite de l'évaluation approximative des intégrales définies et le dernier Ch. traite des séries de Fourier.

En résumé, un livre qui par ses qualités d'ordre, d'appel à l'intuition et de clarté et par la variété des sujets traité est destiné à être un guide sûr non seulement pour les étudiants, mais aussi pour tous ceux qui ont besoin d'utiliser l'outil mathématique sans se soucier des subtilités tant aimées des théoriciens. Ajoutons toutefois que même le lecteur spécialisé le parcourt avec agrément et profit et que pour tout le monde l'agrément est accru du fait de l'excellente présentation typographique de la „Libreria Politecnica".

Prof. Dr. **Al. C. CLIMESCU**
Institut Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

I. N. Veselovsky, *Cours de Mécanique* (en russe). Editions d'Etat des publications théoriques et techniques, Leningrad, 1947, 592 pages.

La production scientifique moderne de l'Ecole soviétique de Mécanique rationnelle se développe d'une manière éclatante. Tout en puisant aux trésors fondamentaux de Mathématiques pures et appliquées que nous devons tous aux créateurs de cette Science, les travaux profonds de Mécanique, insérés dans les nombreuses revues scientifiques de l'U. R. S. S., élargissent incessamment la riche récolte des découvertes faites par les représentants célèbres de l'Ecole physico-mathématique russe, A. M. Liapounoff, N. J. Joukovsky, W. A. Stekloff et d'autres.

Parallèlement à cette production scientifique originale et vraiment prodigieuse, nous assistons à la parution ininterrompue des livres didactiques de bonne qualité, destinés à combler les lacunes provoquées dans ce pays par l'accroissement très sensible des établissements d'enseignement supérieur dans ces dernières années.

Un intervalle difficile à franchir, qui réclame des efforts incessants, sépare la Mécanique abstraite de ces applications; c'est ce que faisait déjà remarquer Poncelet, dons son „Introduction à la Mécanique Industriele", et la difficulté n'a pas diminué sensiblement depuis son temps. Néanmoins on connait dans la littérature scientifique universelle des traités destinés à surmonter nombre de ces difficultés (Qu'il me soit permis de rappeler ici à titre d'exemple l'excellent traité de Mécanique appliquée „The Applied Mechanics" par John Perry).

Le livre de M. Veselovsky, écrit pour les écoles techniques (établissements dont le programme d'études est intermédiaire entre celui des lycées et des universités techniques des autres pays) répond assez bien à ce propos, en offrant aux étudiants la possibilité d'une instruction solide, capable de porter des fruits dès leurs premiers pas professionnels, en s'appuyant sur des domaines réelles et des chiffres exacts.

Les premiers trois chapitres portent sur: I. Mouvement (pages 13–81: mouvement uniforme, vitesse, rotation uniforme, transmission des mouvements, mouvement hélicoïdal, mouvent uniformément varié accélération dans le mouvement curviligne); II. Force (pages 82–176: équilibre des forces ayant le même support, triangle des forces, méthode des projections, équilibre d'un corps rigide ayant un point fixe, systèmes de forces parallèles complanaires, centre de gravité, moment axiaux d'une force); III. Forces pendant le mouvement (pages 176–274: lois de Newton, quantité de mouvement et force vive, quantité de mouvement et force vive dans le mouvement curviligne ou de rotation d'un corps rigide, moment de rotation et moment de quantité du mouvement, principes fondamentaux de la dynamique des machines).

Les trois chapitres suivants, constituent certains développements destinés

aux étudiants plus avancés et portent sur : IV. Statique (pages 275–327 : couple, systèmes de forces appliquées, polygone funiculaire, calcul des structures à poutres) ; V. Cinématique (pages 328–428 : composition des mouvements, cinématique des corps rigiges, initiation à la théorie des mécanismes, systèmes articulés, mécanismes d'enregistrement) ; VI. Dynamique (pages 429–488 : principe de d'Alembert, dynamique d'un point matériel, dynamique d'un corps rigide, principe de la théorie du gyroscope).

Enfin, le dernier chapitre du livre est consacré à la Résistance des matériaux et constitue en principe l'exposition préparée par Mme T. V. Veselovsky pour un autre livre de l'auteur „*La Mécanique Technique*", édité pour la dernière fois en 1943. Chap. VII. (pages 489–587 : introduction, extension, compression, efforts, flexion, torsion).

La reproduction ci-dessus, bien que très schématique, de la table des matières, permet quand même d'entrevoir la portée de ce traité consacré à l'introduction à l'étude des divers formes de l'énergie mécanique et à celui de constructions déformables et des machines en mouvement et donne une nouvel exemple pour les discussions sur le sujet de la variété de l'ordination de la matière d'un cours de mécanique théorique ou appliquée, surtout en ce que regarde la justification de telle ou telle ordination.

En utilisant tout consciencieusement dans ce cours les méthodes de mathématiques élémentaires, l'auteur ne justifie l'utilisation exclusive de telles méthodes que dans le cas où elles comportent à une véritabe élégance mathématique ou bien à une simplicité remarquable. Telles sont, par exemple, les démonstrations de Poinsot et d'Archimède dans la théorie des centres de gravité, les déductions de Joukovsky dans la théorie du gyroscope etc. L'auteur réussit pleinement de préparer le lecteur-tout en renonçant aux expositions des schémas mathématiques telles que les équations différentielles ou plus généralement fonctionnelles régissant certain phénomènes mécaniques-à l'utilisation presque immédiate des méthodes de mathématiques supérieurs.

Les nombreux problèmes et exercices numériques (400) qui accompagnent tout les chapitres, la présentation typographique trèe soignée et surtout la manière d'exposition de l'auteur, rend ce livre particulièrement destiné à un cercle de lecteurs étendu et contribue essentiellement à la diffusion de la compréhension des choses scientifiques.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**

Seminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

M. Ghermănescu. – *Cours de Mecanique théorique.* I. Statique (en roumain). „Bibliothèque de l'étudiant", fondée par M. M. Ghermănescu, No. 1. Editeur „Librairie de l'étudiant", Iacob I. Lază, Timişoara, 1947, 238 pages.

Les lacunes provoquées dans nos bibliothèques pendant cette terrible et cruelle guerre qui a assombri le monde pendant ces dernières années ont donné une impulsion justifiée au développement tout à fait impressionant de la littérature scientifique roumaine de caractère didactique, surtout dans les centres d'enseignement supérieur universitaire et polytechnique provinciaux, privés des avantages de la capitale du pays.

Apres avoir participé à Jassy à la création de la „Collection des Monographies scientifiques", dont le premier volume, portant sur les „Colorants organiques" et constituant une mise au point parfaite, a été recensé dans le pages de ce „Bulletin", et parallèlement aux efforts dignes de toutes louanges deployés dans le même sens par les Presses Universitaires de Cluj, nous avons le plaisir le plus exquis de pouvoir saluer tout à fait chaleureusement la parution à Timişoara du premier volume de la collection intitulée „La Bibliothèque de l'étudiant", fondée par M. M. Ghermănescu.

Le fait que notre jeunesse choisit de préférence la carrière d'ingénieur en est peut être un motif de plus expliquant la publication chez nous dans ces dernières années d'un nombre relativement grand de traités de Mécanique rationnelle qui enrichissent la série des cours universitaires tout à fait *modernes* inaugurée par MM. S. Sanielevici (2 vols., éd. Casa Şcoalelor, Bucarest, 1929 et 1931) et I. Plăcinţeanu (Ath. D. Gheorghiu, Jassy, 1942).

Le volume, dont nous nous sommes proposé d'en donner le compte rendu ci-dessous, porte sur la statique des corps matériels.

En suivant la voie tracée par les représentants les plus autorisés de la Mécanique théorique et appliqués du monde entier, l'auteur ne veut pas qu'on donne aux étudiants une préparation exclusivement théorique, dont l'insuffisance leur inspire plus tard une sorte d'éloignement pour les vérités positives de la science. Cette préoccupation, comme d'ailleurs celle de voir resserrée par la physique mathématique et par l'algorithme du calcul vectoriel les vérités connues des différentes branches des sciences mathématiques, constituent la caractéristique fondamentale de ce premier volume qui fait partie d'une entière suite de livres de mécanique à paraître chez le même éditeur.

En s'éloignant quelque peu en ce que regarde l'ordination de la matière des traités de Mécanique modernes, que nous sommes habitués de considérer classiques, l'auteur répond le mieux possible à la coordination

des programmes d'études des différentes facultés de l'Ecole Polytechnique de Timişoara et d'un nombre d'institutions semblables des autres endroits.

Nous avons eu l'occasion de parler autre part (v. par exemple ce „Bulletin", I_2, 1946, 401) sur le renouvellement que nous souhaitons nécessaire à porter pour la mise au point de la plus grande partie des traités de Mécanique, en prenant comme point de départ les notions de l'intégrale généralisée au sens de Stieltjes adoptées d'une manière des plus heureuses pour enserrer de plus près la réalité physique et la science d'ingénieur aux développements scientifiques contemporains.

En attendant la réalisation de ces projets, nous n'avons qu'à féliciter très vivement l'auteur pour la réalisation d'une pénétration mutuelle de la science pure et appliquée, en montrant une fois de plus que les mathématiciens chargés d'enseigner la Mécanique dans les Ecoles Polytechniques savent toujours descendre de ces hautes cimes où plane le savant spéculatif pour se rapprocher du domaine de l'ingénieur et y faire de fréquentes incursions.

Le livre est divisé en dix chapitres dont voici la table des matières dans ses traits essentiels: I. Calcul vectoriel (pages 7-47: opérations vectorielles, géométrie vectorielle, opérateurs différentiels, lignes de forces, surfaces de niveau, classement des champs vectoriels, exercices); II. Forces concurentes (pages 47-69: principes de mécanique, décomposition des forces, moments axiaux, polaires et par rapport à un plan,...); III. Forces parallèles (pages 69-83: composition et centre des forces parallèles, couples, problèmes d'équilibre correspondants aux forces parallèles,..); IV. Centres de gravité (pages 83-99); V. Systèmes de vecteurs „Torseurs" (pages 99-115: réduction d'un système de vecteurs „torseurs", complexe de Chasles, dyades,..); VI. Equilibre sans frottement (pages 115-148); VII. Equilibre des systèmes déformables (pages 148-164); VIII. Equilibre avec frottement (pages 174-202); IX. Principe des déplacements virtuels (pages 202-222); X. Machines simples (pages 223-235: levier, balance, moufle, vis, courroies de transmission).

En soulignant surtout la richesse du matériel exposé dans les chapitres VI, VII et VIII, nous mentionnons encore une note insérée à la fin du livre portant sur la formule du triple produit vectoriel.

La méthode est basée sur l'argorithme vectoriel, dont l'unification des notations n'est pas atteinte, hélas! jusqu'aujourd'hui. Quelques déductions nouvelles des vérités mécaniques connues sont mentionnées par l'auteur même dans la préface.

Nombreux problèmes et exercices énoncés à la fin des chapitres,

MŰEGYETEM

munis des indications parfois essentiels pour leur résolution, montrent que l'auteur ne perd jamais de vue les fins pratiques et s'ingénie à jeter des aperçus et à ouvrir des horizonts sur les applications concrètes qui peuvent s'en déduire, faisant ainsi entrevoir au futur ingénieur le vaste domaine qu'il aura à exploiter.

En conclusion, l'auteur réussit pleinement dans le but qu'il s'est proposé dans la préface et répond par son livre tant aux besoins des techniciens qu'aux ceux des théoriciens, en combinant avec sûreté les méthodes d'enseignement qui doivent présider à leur formation.

En attendant avec l'impatience, justifiée exclusivement par la fidélité à notre vocation scientifique, la parution du second volume de M. Ghermănescu destiné à la Cinématique et à la Dynamique, nous n'avons qu'à recommander très volontairement à nos étudiants ce livre qui vient d'enrichir teute une chaîne de publications didactique de l'Ecole de Mécanique roumaine, caractérisé en ce que regarde sa production scientifique, tout à fait recemment, dans une esquisse assez pénétrante, par M. V. Vâlcovici (v. Revue générale des Sciences pures et appliquées, LIV (1947), pages 38-41).

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, The University of Toronto Press, Toronto, 1946, XXIX + 367 pages.

The history of the scientific thought results most prominently by studying the organisations, the developments and the role of the national, regional and especially international mathematical congress.

Indubitebly these contributions to the progress of the science, to the indebtedness of the scientists in general to the influence and inspiration of mathematicians and their ascendant function in the problem of the pacification of the mankind and of the world undestanding are universaly recognised.

The experience of working together during these congress and the enthusiastic support received on every side to each other are part of a lasting memory and inspiration for the future.

We are exceedingly happy to expose hereafter the substance of the first canadian mathematical congress (Montreal, June 17-22, 1945) favoured by the National Research Council, the Royal Society of Canada and all the universities and mathematicians from Halifax to Van-

couver and many scientists from abroad, with the hope and belief and heartily wishes, justified exclusively by the fidelity to our scientific vocation, that this congress will be the beginning of very important mathematical developments in Canada and the promoter of wider horizons both national and international.

We reproduce below the contens of the proceedings, useful, I think, to the specialists : Discussion on Secondary School Mathematics (1-21, four articles) ; Symposium on Statistics (22-24, five articles) ; Discussion on Engineering Mathematics (43-63, four papers) ; Discussion on research and Graduate work in Canada (64-89, two papers) ; Educational and methodological problems (111-180, six articles) ; Research papers (90-110) : Isotropic solutions of Einstein's fields equations, Max Wiman, 90 ; Lattice points in ovals, Douglas Derry, 94 ; Three line Latin rectangles, Lloyd Dulmage, 94 ; Some problems of approximation associated with linear differential systems, W. H. McEwen, 95 ; The four-vertex theorems, Peter Scherk, 97 ; Aeronautics, W. F. Campbell, 102 ; General conferences (181-364) : Introduction aux mathématiques, L'abbé A. Larue, 181 ; On some developments of modern algebra, Richard Brauer, 183 ; Cosmic rays and the elementary particles of physics, Franco Rasetti, 206 ; Les nouvelles statistiques en physique, Franco Rasetti, 219 ; Les mathématiques et l'astronomie, Frère Robert, 233 ; The foundations of geometry, G. de B. Robinson, 241 ; The nine regular solids, H. S. M. Coxeter, 252 ; The geometry of numbers L. J. Mordell, 265 ; Some topological properties of the disk and sphere, A. W. Tucker, 285 ; Universal Algebra, Garrett Birkhoff, 310 ; The application of the differential analyser to the evaluation of solutions of partial differential equations, D. R. Hartree, 327 ; La théorie des groupes de Lie, Claude Chevalley, 338 ; Conformal representation and hydrodynamics, Alexander Weinstein, 355.

The Canadian Mathematical Congress has adopted several resolutions of indubitably interest for the departments of education of the whole world concerning : A. The high school mathematics in relation to the university ; B. The development of the teaching of statistics and applications of the subject undertaken by men with sound mathematical training ; C. The necessity of offering to promising young graduates of enginiering and of physics with a view to developing them as mathematicians, through providing them with appropriate graduate courses in conjunction with the experience afforded in teaching ; D. The fundamental importance, both for cultural and material reasons,

of every effort made to restore graduate work in pure and applied mathematics at the earliest possible moment ; E. The question of granting priorities to universities and to polytechnic institutes to obtain building material and equipment necessary to the solution of some post-war problems ; F. The set up of a Committee to survey ways and means of organizing *research groups* and to make recommendations to the executive for implementation ; G. The urgency to continue and to enlarge the influence of mathematical and theoretical science in the National Research Council and, by a generous followship police, stimulate the study of these subjects in the universities and polytechnic institutes ; H. The necessity to provide generous grandts to the universities and faculties of engineering to enable the research staffs in mathematics and theoretical sciences to be enlarged, and to meet other necessary demands of this nature ; I. The organisation of the interchange of mathematicians between the universities of Canada and other countries.

We wish also very heartily by this ocasion to the general meeting of this congress the realisation of the resolution nr. 14 concerning the founding of a mathematical journal.

The exterior presentation of the volume, edited by the University of Toronto Press, is exceedingly too. We shall be glad to receive in due course, in the interest of international scientific cooperation, from this inctitution, other publications destinated likewise to a review in our „Bulletin" or in exchange.

Prof. Dr. **DEM. I. MANGERON**

Mathematical Department
of the Polytechnic Institute
of Jassy

* * *

Den 10. Skandinaviske Matematiker Kongres, Jul. Gjellerups Forlag, Köbenhavn, 1947, XXVI+383 pages.

A la suite de l'invitation faite par les professeurs de Mathématiques de toutes les universités suédoises pour discuter, de concert avec d'autres mathématiciens suédois, danois, finlandais et norvégiens, de telles questions du domaine des sciences mathématiques qui forment à présent l'objet principal de l'attention des géométres, s'est reuni à Stockholm, sous la présidence et l'initiative des célèbres mathématiciens G. Mittag-Leffler et Ivar Fredholm, en 1909 (22-25 Septembre) le premier congrès des mathématiciens scandinaves.

Depuis lors, ces congrès se sont succédés ayant lieu à Köbenhavn (1911), Kristiania (1913), Helsingfors (1922), Köbenhavn (1925), Oslo (1929), Stockholm (1934), Helsingfors (1938) et enrégistrant le nombre de plus en plus croissant des participants, dont l'oeuvre mathématique et le rôle dans le mouvement scientifique, technique et didactique représentent sans aucun doute le symbole des possibilités immenses de la civilisation de ces magnifiques pays nordiques.

Le long intervalle de huit ans qui s'est écoulé entre le neuvième congrès des mathématiciens scandinaves tenu à Helsingfors en 1938 (23-26 Août) et ce dixième congrès reuni à Copenhague en 1946 (26-10 Août), n'a pas apporté heureusement que très peu de changements fortuits à déplorer, de sorte qu'on peut voir dans les tables de matières de ces deux derniers congrès presque les mêmes noms si chers et si bien connus aux mathématiciens du monde entier.

Les apports scientifiques originaux qu'il est impossible d'analyser d'une manière quelque peu essentielle en un si petit nombre de lignes à notre disposition, portent surtout sur les préoccupations modernes des „écoles" de théorie des fonctions, de topologie, d'arithmétique supérieure et d'astronomie des Lars Ahlfors, Harald Bohr, Niels Bohr, Harald Cramér, Hjelmslev, Börge Jessen, F. Malmquist, P. J. Myrberg, Rolf Nevanlinna, Jakob Nielsen, N. E. Norlund, Oystein Ore, Ake Plejel, Marcel Riesz, Th. Skölem, Carl Störmer, A. Wiman.

Les travaux du congrès furent inaugurés par des brillantes esquisses de MM. Harold Bohr et N. E. Nörlund. Les sujets discutés pendant ce congrès, insérés dans un volume superbe édité par Jul. Gjellerups Forlag de Copenhague, dont nous reproduisons ci-dessous la table des matières, constituent les ouvrages destinés à faire progresser les différentes branches de la science moderne et contribuent à relier de plus en plus étroitement les relations scientifiques tendant à l'établissement de la coopération scientifique internationale et de l'entente mondiale: Ahlfors, L. et Beurling, A.: Invariants conformes et problèmes extrémaux II, 341; Bang, Thoger: On quasi-analytic functions, 249; Bergström, Harald: On sone Approximate Solutions of the Equation of Conduction and Their Connection with Distribution Functions, 271; Beurling, A et Ahlfors, L.: Invariants conformes et problèmes extrémaux I, (publié dans les Acta Mathematica); Bohr, Harald: On some functional spaces, 413; Borg, Göran: Inverse problems in the Theory of Caracteristic Values of Differential Systems, 172; Broman, Arne: Om konvergens pa randen av en klass potensserier (publié dans l'Arhiv för matematik, astronomi och fysik, vol. 31

B, 1944); Brun, Viggo: La somme des facteurs de Möbius, 40; Buch, Kai Rander: Remarques sur les mesures dans les espaces abstraits et sur la théorie de la probabilité, 249; Cramér, Harald: On the theory of stochastic processes, 28; Danielson, Gösta: Les sphères circonscrite et inscrite à un tétraèdre, 252; Elfving, G.: On a class of elementary Marcoff processes, 149; Fabricius-Bierre, Fr.: Sur les courbes gauches du quatrième ordre, 65; Fenchel, W.: On closed surfaces with constant sign of curvature in the projective space; Fjeldstad, J. E.: Litt om en funksjon nalligning og dens lösninger (à paraître dans l'Archiv för Mathematik og Naturvidenskab), Folner, Erling: Almost Periodic Functions on Abelian Groups, 356; Hellsten, Ulf: Determination of the denominator of Fredholm in some types of integral equations, 118; Hilding, Sven H., Sur les systèmes complets dans l'espace de Hilbert, 290; Hjelmslev, Johannes: Beroringsinvarianter, 241; Hulthén, Lamek: The Variational Principle for Continuous Spectra, 201; Hällström, Gunnar Af.: On the Study of Algebraic Functions of Automorphism by help of Graphs, 97; Jessen Borge: Mouvement moyen et distribution des valeurs de fonction presque-pérodiques, 301; Järnefelt, G.: On the One-Body Problem in the Expanding Universe, 160; Karhunen Karl: Lineare Transformationen stationärer stochastischer Prozesse, 320; Kjellberg, Bo: On some Inequalities, 333; Laasonen, Pennti: Über präharmonische Funktionen, 108; Lokki, Olli: Über eine Klasse von analytischen Funktionen, 213; Ljunggren, Wilhelm: A Diophantine Equation with two Unknowns, 265; Lundmark, Knut: The Distance Indicators of Astronomy, 17; Malmquist, F.: Approximation of real functions by linear exponential expressions, 70; Myrberg, P. J.: Über analytische Functionen auf transzententen Riemannschen Flächen, 77; Nevanlinna, Rolf: Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung, 215; Olsson, R. Gran: The Principle of Virtual Displacement Applied in Approximate Solutions of Eigenvalue Problems, 255; Petersen, Richard: On Lerch's Theorem, 376; Pimiä, Lauri: Die involutorischen Berührungstransformationen der höheren Kugelgeometrie, 245; Pleijel, Ake: Quelques remarques sur certains problèmes de vibrations dégénérés, 54; Qvist, Bertil: L'intégration d'un modèle d'étoile, 363; Rasch G.: A Principle for deriving the Remainder Terms in some Serial Ex, pansions, 293; Riesz, Marcel: Sur certains notions fondamentales en théorie quantique relativiste, 123; Schieldrop, Edgar: Klassisk mekanikk i sandsynlighetsteoretisk formulering (sera publé autre part); Selberg, Atle: The Zeta-Function and the Riemann Hypo-

thesis, 187 ; Selberg, Sigmund: An asymptotic Formula for the Distribution of the Two-Factorial Integers, 59 ; Skolem, Th.: The Development of Recursive Arithmetic, 1 ; Steffensen, J.F.: Bounds of Certain Trigonometrical Integrals, 181 ; Stubban, John Olav: Sur une classe de transformations birationnelles dans la Géométrie de direction, 329 ; Svartholm, Nils: On Clifford's Algebra over the Field of the Real Numbers, 281 ; Tornehave, Hans: On the variation of the Argument of Exponential Polynomials in two Variables, 325.

Après l'effroyable tourmente de ces dernières années, qui a rompu tant de liens, les rapprochements entre les savants provoqués par ces derniers congrès ont contribués beaucoup au progrès de mathématique pure et appliquée. Que tout ceux qui, sans aucune arrière-pensée, ont travaillés à faire progresser le culte désintéressé de la vérité, veuillent bien recevoir ici nos félicitations les plus chaleureuses.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**
Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Bericht über die Mathematiker Tagung in Tübingen, Editeur : l'Institut Mathématique de l'Université Tübingen, 143 pages. H. Laupp, Jr., Tübingen.

Après avoir subi une interruption de deux années, s'est réuni à Tübingen en 1946 (23-27 septembre), sous la présidence de l'éminent mathématicien M. E. Kamke, le congrès des mathématiciens allemands, inauguré pour la première fois à Halle, en 1891.

Nonobstant les difficultés explicables, le nombre des participants s'est élevé à environ 150, parmi lesquels il y avait quelques mathématiciens suisses et un français.

Le congrès fut ouvert par une brillante allocution de M. E. Kamke, soulignant les désastres matériels et moraux de ces derniàres décades de l'histoire de sont pays et incitant les savants au travail destiné au soulagement de l'umanité souffrante, par les mots que voici.

„Wir alle müssen uns mit all'unserer Kraft, mit unserer ganzen Person dafür einsetzen, dass die Wissenschaft niemals mehr einem Werk der Zerstörung sondern nur dem Wohle der Menschheit dient".

Parmi les nombreuses articles dont nous reproduisons ci-dessous la table des matières, nous remarquons tout specialement les mémoires de G. Bol, H. Knothe, G. Köthe, E. Peschl, L. Schwarz,

...,et, étant donné l'intérêt que présente le problème du coloriage des cartes géographiques et le fait qu'on n'est pas encore parvenu à démontrer ce théorème, nous nous permettons d'exprimer notre désir de recevoir les données complémentaires concernant l'article de M. W. Brödel: „Beweis des Vierfarbensatzes", 47–49.

Armsen, P. und Rohrbach, H.: Sequenzen in Permutationen 36, Bachmann, F.: Konstruierbarkeit mit Lineal, Rechtwinkelmass und Eichmass 38, Baier, O.: Die Hurwitzschen Bedingungen 40, Bol G.: Algebraische Flächen in der Differentialgeometrie 42, Bol, G.: Invarianten linearer Differentialgleichungen 44, Bödewadt, U. T.: Vektoroperationen in der Flächengeometrie 46, Brödel, W.: Beweis des Vierfarbensatzes 47, Buchholz, H.: Die konfluente hypergeometrische Funktion bei der Berechnung des Schallfeldes einer punktförmigen Schallquelle 49, Bückner, H.: Lösung von Integralgleichungen 56, Burau, W.: Lineare Räume auf quadratischen Hyperflächen 59, Collatz, L.: Lösung gewisser Differentialgleichungen mit dem harmonischen Analysator 60, Deuring, M.: Teilbarkeitseigenschaften der singulären Moduln der elliptischen Funktionen 62, Eichler, M. Zahlentheorie der quadratischen Formen 63, Göllnitz, E.: Über ganze Funktionen, die in den Ecken gewisser Polygone verschwinden 65, Grell, H.: Ueber die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie 67, Grunsky H. Zur Funktionentheorie in mehrfach zusammenhängenden Gebieten 68, Gut, M.: Ueber die Klassenzahlen der reellen Unterkörper der Körpers der l-ten Einheitswurzeln 70, Haack, W.: Ueber eine optisch-invariante Schar von Regelflächen eines Strahlenkomplexes 70, Hamel, G.: Aus der Analytischen Mechanik 72, Hasse, H.: Ueber die Berechnung der Klassenzahl reeller Abelscher Zahlkörper 74, Heinhold J.: Zur Praxis der konformen Abbildung 75, Heinz, C. Invariantentheorie im nichtholonomen Basenfeld 78, Hoheisel, G.: Ueber diophantische Gleichungen 81, Kanold, H. J.: Kreisteilungspolynome und ungerade vollkommene Zahlen 84, Kappos, D. A: Ortsfunktionen von zwei Veränderlichen und Doppelintegrale in Booleschen Algebren 87, Keller, O. H.: Eine charakteristiche Invariante ebener algebraischer Berüngstranformationen 89, Knothe, H.: Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Brunn-Minkowskischen Theorie 91, Köthe G: Zusammenhänge zwischen der Functionentheorie und der Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Veränderlichen 92, Lorentz, G. G.: Ueber den Gausschen Integralsatz 94, Lorentz, G. G.: Beziehungen zwischen den Umkehrsätzen der Limitierungstheorie 94, Maak W.: Zur Theorie der Kugelfunktionen 97, Maass, H.: Ueber automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung

von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen 100, Magnus W.: Ueber das Verhalten der Lösungen von $\Delta u + u = 0$ im Unendlichen 103, Maier, W.: Pyramidenmessung durch Dilogarithmen 104, Mahrun, K.: Ueber das Verhalten der Potentialfunktion im Unendlichen 106, Moufang, R.: Volumentreue Verzerrungen bei endlichen Formänderungen 109, Nőbeling, G.: Reguläre Variationsprobleme 110, Peschl, E.: Ueber die Bilder von Sternbereichen 112, Petersson, H.: Modulformen und Zahlentheorie 116, Pickert, G.: Veränderung des Unvollkommenheitsgrades bei unendlichen inseparablen Erweiterungen 118, Pinl, M.: Ueber Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsverktor 121, Quade, Auflösung linearer Gleichungen durch Matrizeniteration 123, Rothstein, W.: Der Hartogsche Hauptsatz für reguläre und meromorphe Funktionen 125, Sauer, R.: Finite Analoga zur Differentialgeometrie der Asymptotennetze 127. Schmidt, H: Eine Verallgemeinerung der projektiven Inversion 129, Schulz, G.: Das Summenproblem bei mehrdimensionalen arithmetischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen 131, Schwarz, L.: Zur Theorie der nichtkommutativen rationalen Funktionen 134, Strubecker, K.: Ueber die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören 136, Ullrich, E.: Zum Zwillingssatz von Viggo Brun 139.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**

Institut Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Annuaire Astronomique de l'U. R. S. S. pour l'an 1948. Vingt septième année publiée par l'Institut d'Astronomie théorique de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. Editeur: l'Académie des Sciences. de l'U. R. S. S., Leningrad, 1947 476 pag.

Les préoccupations principales de l'Institut d'Astronomie théorique de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. consistent en la résolution des différents problèmes de Mécanique céleste, l'application des théories générales au mouvement concret des astres, l'utilisation des données d'observation pour la détermination des constantes astronomiques, la préparation des tables numériques fondamentales du mouvement des corps célestes et la publication des annuaires astronomiques et des annuaires répondant aux nécessités de la géodésie et de la navigation maritime et aérienne (Il est à remarquer que, avant 1943, cet Institut portait le nom „Institut astronomique de Leningrad").

L'Annuaire astronomique de l'U. R. S. S. pour l'an 1948 est le 27-e volume des publications régulières commencées en 1922. Depuis 1941, l'Annuaire a reçu de nombreuses additions grâce à l'initiative prise par son Directeur, illustre astronome et mathématicien M. M. F. Subbotin, transféré en 1930 à Leningrad. A partir de cette date, pour assurer la publication de l'Annuaire, l'Institut a organisé le calcul indépendant non seulement des coordonnées apparentes des étoiles, comme dans les années précédentes, mais aussi des éphémérides fondamentales du Soleil, de la Lune et des planètes.

Après la fin de la guerre, cet Institut a inauguré une collaboration étroite avec le British Nautical Almanac Office, dirigé magistralement par M. Harold Spencer Jones, Astronome Royal et Président de l'Union Astronomique Internationale, et a réussi de cette manière de perfectionner les éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes et d'en donner une certaine extension de la Table des corrections pour les levers et couchers de la Lune. Cet Annuaire porte en outre les additions et les perfectionnements suivants: I. Les éléments de l'ellipsoïde terrestre, d'après F. N. Krassovski et la table correspondante pour le calcul des coordonnées géocentriques; II. Ephéméride pour le calcul de la libration de la Lune; III. Occultations visibles à Moscou, Kasan, Tomsk, Kharkov, Odessa, Simeis, Abastumani, Tachkent, Kitab et Stalingrad.

Les constantes et les tables numériques fondamentales utilisés dans cet Annuaire sont en concordance parfaite avec les conventions du Congrès International des Ephémerides Astronomiques tenue à Paris en Octobre 1911 et les résolutions de l'Union Astronomique Internationale.

De l'examen de la Table des matièrs de ce superbe volume, dont ci-dessous le contenu : Avertissement, Ephéméride du Soleil, 6, Aberration, parallaxe horizontale, longitude moyenne, obliquité apparente, nutation de l'obliquité, 22, Coordonnées rectilignes du Soleil (équinoxe moyen 1950,0), 31, Ephéméride de Mars, 72, Ephéméride de Jupiter, 80, Ephéméride de Saturne, 88, Ephéméride de Uranus, 96, Ephéméride de Neptune, 104, Coordonnées héliocentriques des planètes 112, Constantes pour la réduction des étoiles: $A+A'$, $B+B'$, C, D, A', B', 116, Constantes pour la réduction des étoiles: f, g, h, G, H, i, f', g', G', 124, Abréviations des noms des constellations, abréviations des noms des catalogues, 132, Différences systématiques $FK3-GC$, 133, Positions moyennes des étoiles, 134. Positions moyennes des étoiles circumpolaires, 146, Positions apparentes des étoiles, 147, Nombres constants pour les étoiles dont les positions apparentes ne sont pas

données. Epoque 1948,0, 270, Positions apparentes des étoiles circumpolaires, 272, Eclipses, 344, Phénomènes, 350, Ephéméride pour les observations physiques du Soleil, 352, Levers et couchers du Soleil pour les latitudes de $+30^0$ jusqu'à $+70^0$, 356, Levers et couchers de la Lune pour la latitude $+56^0$, 364, Corrections des levers et couchers de la Lune pour les latitudes de $+36^0$ jusqu'à $+70^0$, 368, Tables des hauteurs et des azimuts de la polaire, 371, Latitude par la hauteur de la Polaire, 374, Tables auxiliaires, 379-426, Explication de l'Annuaire astronomique pour l'an 1948, 427-451, Additions, 452-473, on conclut facilement la préseance la-dedans de tout matériel classique nécessaire aux observations astronomiques de haute teneur scientifique.

L'utilisation systématique des dénominations françaises, parallèlement au texte russe. et surtout les explications rédigées en français et insérées à la fin de chaque volume de l'Annuaire (v. pages 427-451), le font complètement comparable aux plus renommées publications des autres pays: British Nautical Almanac, Berliner Jahrbuch, Connaissance des Temps, Annuaire du Bureau des Longitudes et The American Ephemeris and Nautical Almanac.

Qu'il me soit permis d'énoncer ici une suggestion concernant l'introduction des cartes des eclipses dans les volumes de cet Annuaire qui vont venir.

Nous nous permettons de féliciter d'une manière la plus chaleureuse le personnel de l'Institut d'Astronomie théorique sous la Direction de M. Subbotin, pour les réalisations qui continuent la tradition glorieuse des grands astronomes Frédéric Georges Guilaume Struve, F. A. Bredichin, A. A. Belopolsky,... et qui contribuent par les échanges des publications et des idées, après l'effroyable tourmente de ces dernières années, à l'établissement de la coopération scientifique internationale et à l'entente mondiale.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**
Institut Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Maurice Fréchet et Ky Fan, *Introduction à la Topologie Combinatoire*, I. Initiation. Librairie Vuibert, Paris, 1946, VIII+88 pages.

Le développement de la *topologie ensembliste*, fondée par G. Cantor en 1879, s'est élargit d'une manière étonnante par Ascoli, Volterra, M. J. Hadamard et, depuis 1904, par le créateur dans

un certain sens de ce qu'on connait aujourd'hui sous le nom de topologie générale ou topologie abstraite, l'éminent géomètre M. Maurice Fréchet et par M. W. Sierpinski et l'Ecole polonaise, M. P. Alexandroff, H. Hopf, G. T. Whyburn, . . . (Parallèlement à ce développement, la topologie, cette branche relativement récente des sciences géométriques, s'est étendue avec les travaux de B. Riemann, Möbius, C. Jordan, Schläfli, W. Dyck, Betti, Kronecker, . . . dans une autre direction constituant la *topologie combinatoire*, qui doit ses progrès les plus notables à H. Poincaré et dans les temps tout à fait modernes à Brower, H. Lebesgue, Veblen, W. Alexander, Lefschetz, P. Alexandroff, H. Hopf, B. M. de Kerékjártó, . . . La topologie combatoire, c'est à dire la topologie de certains généralisations des surfaces, nommées les *complexes*, constitue principalement le sujet de cette brillante exposition introductive, unique, en 1946, dans la littérature contemporaine mathématique française, rédigé magistralement par M.M. Maurice Fréchet, l'auteur, outre les mémoires de spécialités, depuis 1912, d'un nombre de traités très appréciés, portant sur la théorie des fonctions, l'analyse et la physique mathématique et le calcul des probabilités, et Ky Fan, et destiné pour „être comprise sans connaissances mathématiques préalables et même par des élèves de l'enseignement secondaire". Nous sommes vraiment heureux de pouvoir recommander d'une manière la plus chaleureuse aux culteurs des sciences mathématiques ce petit livre d'une execution irreprochable due à la *Librairie Vuibert*, à Paris. Les spécialistes y trouveront toujours l'occasion pour des reflexions fructueuses et les personnes cultes y puiseront une riche récolte de notions et d'idées découvertes dans le temps si long et avec l'ingéniosité si grandes. Nous n'avons qu'à nous souhaiter de pouvoir lire le plus tôt possible les autres volumes annoncés par M. Fréchet, faisant suite à cette première partie dont ci-dessous nous reproduisons la très suggestive table des matières: Chap. I-er. *Généralités sur la Topologie.* Propriétés qualitatives géométriques 1, Coloriage des cartes géographiques, 2, Problèmes des régions voisines, 6, Topologie, géométrie de caoutchouc, 7, Homéomorphie, 8, Topologie, géométrie de continuité, 13, Comparaison entre la géométrie élémentaire, la géométrie projective et la topologie, 14, Propriétés topologiques relatives, 16, Topologie ensembliste et topologie combinatoire, 20, Le développement de la topologie, 22, Chap. 2-d. *Notions topologiques sur les surfaces.* Tréorème de Descartes, 25, Une application du théorème de Descartes, 29, Caractéristique d'une surface, 31, Surfaces unilatères, 33, Orientabilité et non-orientabilité, 36, Polygones topologiques, 41, Construction

de sufaces closes orientables à partir de polygones, en identifiant leurs côtés, 42, Construction de surfaces closes non orientables à partir de polygones, en identifiant leurs côtés, 46, Définition topologique des surfaces closes, 52, Chap. 3=me. *Classification topologique des surfaces closes.* Problème principal de la topologie des surfaces, 56, Schéma plan polygonal et représentation symbolique d'un polyèdre, 57, Opérations élémentaires, 61, Utilités des formes normales des polyèdres, 64, Réduction aux formes normales, I, II, 65, Caractéristique et orientabilité, 75, Théorème principal de la topologie des surfaces closes, 79, Application, 80, Genre et nombre de connexion des surfaces closes orientables, 81, Liste bibliographique de la première partie, 85.

La reproduction dans l'avant=propos de quelques pages particulièrement frappantes de ce qu'est la Topologie par H. Poincaré donne d'avance satisfaction au lecteur.

Prof. Dr. **DEM. I. MANGERON**
Institut Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

Giuseppe Bruni, *Chimica generale e inorganica.* Vol. I. *Chimica generale.* Con la collaborazione del Prof. M. A. Rollier. 7=e éd. 319 pag.& 102 fig. (Libreria editrice Politecnica, Cesare Tamburini. Milano, 1947). 1400 Lire, les deux volumes.

Le professeur G. Bruni, de l'Ecole Polytechnique de Milan, a publié son Cours de Chimie générale, anorganique et organique en trois volumes, la première édition étant de 1921. Cette septième édition a été revue par le professeur Rollier (Bruni est mort en 1946).

Le premier volume que j'analyse ici expose la Chimie générale ou théorique, et constitue une excellente introduction à la chimie physique, aussi bien qu'à la physique et la chimie de l'atome. D'ordinaire, es lois générales des combinaisons chimiques sont introduites successivement au fur et à mesure de l'exposition des différents élément chimiques. L'Auteur, suivant la voie tracée par les grands chimiste italiens, Cannizzaro et Ciamician, a exposé ces lois générales séparémment dans un premièr volume de Chimie générale.

Ici sont présentées les faits fondamentaux et les théories sur lesquels se base les développements de la chimie moderne:

Les lois fondamentales de la chimie ; l'étude des gaz, liquides solides, solutions ; l'étude des acides, bases et sels ; la termochimie, la photochimie, l'équilibre chimique ; la structure cristalline par les rayons X et l'énergie réticulaire avec laquelle sont tenus les ions dans

le véhicule ; chimie nucléaire, la fission des atomes lourds, les isotopes et leur séparation, les règles de stabilité des noyaux.

Il y a des chapitres excellemment traités, par exemple une ample exposition du système périodique des éléments de Mendelejeff et la prévision des éléments inconnus (14 pages); le nombre d'Avogadro et l'existence réelle des atomes (4 pages); la théorie de la valence de Werner (4 pages) et la théorie électronique de la valence avec les travaux de Lewis, Langmuir, Pauling et Slater, Hund et Millikan (15 pages).

On rencontre dans cette exposition le nom de quelques uns des grands physiciens et chimistes italiens, comme Volta, Avogadro, Cannizzaro, Fermi, Segre, qui ont contribué au progrès de notre Science commune à tous. Il est probable, que dans une future édition on aura plus de détails sur l'oeuvre de Fermi et de Majorana, relativement à la constitution du noyau de l'atome, et des indication sur les travaux de Majorana, relativement à l'anisotropie des particules colloïdales, par la méthode du champ magnétique. De cette sorte la contribution italienne au progrès de la science sera encore mieux mise en évidence.

Ce cours de Chimic générale est exposé avec un enchainement logique qui le fait facile à lire; il tient compte des nouvelles acquisitions de la chimie et des nouveaux points de vue de la théorie, ce qui le fait très utile aux étudiants en Chimie et en Physique, pour lesquels ce volume de Chimie constitue un excellent guide. Le livre est imprimé avec goût et les chapitres sout bien divisés.

Prof. Dr. **STEFAN PROCOPIU**

Laborafoire d'Electricité
de la Faculté des Sciences
de l'Université de Jassy

* * *

Mario Dornig, *Trattato Generale delle Macchine Termiche ed Idrauliche*, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini-Milano, 1947, Tome II, sous volume de 304 pages, contient les machines à vapeurs les générateurs à vapeurs et en outre les compresseurs et les machines frigorifiques.

Le domaine très étendu du contenu ne permet pas dans ce seul volume d'approfondir la matière, mais par le choix très judicieux de la matière à exposer et par l'ordre parfait dont s'enchainent les divers chapitres, ce traité donne des notions claires et précises sur les principales machines et leur fonctionnement.

Il contient la description, les notions sur le fonctionnement et des notions de calcul élémentaires, illustrées par des exemples bien choisis.

Grâce aux nombreuses figures et aux diagrammes bien choisis dont le texte est illustré, l'auteur a parfaitement réussi de concentrer dans un volume réduit une matière vaste, tout en rendant l'exposition claire et complète.

Le traité est au courant des installations les plus modernes, il contient : l'étude de la combustion de générateurs de vapeurs, de leur fonctionnement, des notions de calcul avec des exemples, l'étude des condensateurs, les machines à vapeur à piston et les turbines à vapeurs.

L'étude des compresseurs et des machines frigorifiques contenue dans ce même volume, assez inusitée, est pourtant très bien placée, parce que les organes de ces machines et les connaissances thermodynamiques nécessaires pour comprendre ces machines, sont les mêmes.

Ce volume suppose la connaissance de la thermodynamique générale et en spécial celle des vapeurs, la connaissance des organes des machines.

Le côté constructif n'y est contenu que sous forme descriptive. Le dimensionnement et le calcul des divers organes du point de vue mécanique y manque totalement. Ceci ne constitue pas un défaut, ce côté pouvant très bien constituer une étude à part.

L'édition „Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini-Milano", a réussi à nous présenter ce volume dans une forme parfaite, l'imprimérie étant très bonne et toutes les figures parfaitement claires.

Prof. Dr. Ing. **GERARD D'ALBON**

Laboratoire de Machines à vapeur
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

* * *

Maurice Denis-Papin : Principes généraux de ventilation industrielle et de conditionnement d'air. Editions Desforges, 29, Quai des Grands-Augustins-Paris, 1948, 117 pages.

C'est un excellent ouvrage, le premier d'une série de monographies intitulées „Monographies techniques du XX-e siecle", qui vont paraitre dans les Editions Desforges, sous la direction de M. Maurice Denis-Papin.

Par son appariton cet ouvrage vient de combler une lacune dans les publications techniques, en ressemblant dans une seule monographie tous les éléments nécessaires à la connaissance de la technique de la ventilation industrielle et du conditionnement d'air.

Par son contenu il permet à tous ceux qui sont intéressés aux applications industrielles de la ventilation, des informations exactes sur la ventilation simple, la ventilation chauffante, les problèmes de séchage et de dispersion de buées, les problèmes de climatisation, l'aspiration de poussière de fabrication, etc. Le choix des informations pratiques est parfait et pourvu de toutes les données numériques nécessaires.

La longue pratique de l'auteur lui permet beaucoup d'observations intéressantes concernant les applications industrielles usuelles.

Nous recommandons spécialement cette monographie aux industriels qui ont intérêt à ces applications et aussi à tous les techniciens, pour lesquels elle constitue un excellent moyen d'information.

Les Editions Desforges, en se chargeant de la publication de cette série de monographies, dont nous espérons qu'elles se poursuivront dans la même voie, rendront certainement un grand service à la technique.

Prof. Dr. Ing. **GERARD D'ALBON**
Laboratoire de Machines à vapeur
de l'Ecole Polytecnique
de Jassy

* * *

Portraits of famous physicists. With Biographical Accounts by Professor Henry Crew. *Scripta Mathematica*-Yeshiva College, New-York, 1942.

In the summer of 1937, a committee was selected by the editor of the *American Physics Teacher*-now the *American Journal of Physics*-to plan a portfolio of portraits of eminent physicists, to be published by „*Scripta Mathematica*". The committee, early decided that the portfolio should include only twelve of the more outstanding physicist and make the selection only from men not then living without pretention of being able to determine the twelve most eminent physicists of all time. The following names, considered to be genuinely great and whose lives and portraits are of deep interest to all students of physics, were selected: Galileo Galilei, Huygens, Newton, Ampère, Fresnel, Faraday, Joule, Clausius, Maxwell, Gibbs, Hertz, and Rowland.

The desision of the committee makes illusory our remark concerning the fact that the modern story does not begin with Galilei for the torch of science and the intellectual activity reached its first peak in the person of Leonardo da Vinci (1452-1519) who combined

artistic genius with remarkable acumen as physicist, biologist and mathematician.

Professor Henry Crew has prepared the brief biographical sketches which accompany the portraits, suitable for framing. Each biographical sketch contains the salient points in the education, personal life, and career of its subject together with a statment of his most important research writings, posterior bibliography and collected papers editions.

The cruel limitation of 800 words, deplored by Dr. Crew, explains the omission of many higly interesting details from the story of these rich and varied lives. The author most be heartily congratulated for he has succeded in indicating the environment surrounding the youth of its subject and has by reference to contemporary men of affairs, placed him against a background of history. Galilei, the greatest man of science in the world, is grouped with Shakespeare and Cervantes, Ampère associated with the French revolution, Frenel with the flourishing period of the *Académie des Sciences*, „a galaxy in the field of science which, at that time, contained perhaps more stars of the first magnitude than ever before or since", and Faraday with his work for which he will indeed be remembered, *semper, ubique et ab omnibus*, with the similar period of the Royal Society (Institution). Mention of friends and associates rounds out each biography adds many famous names to these pages and indicates both the scientific heritage and the legacy of each to succeding generations (For a plastic review and caracterization of this edition see also Helen A. Messenger, Scripta Mathematica, X, 1944, 190-191). An intimate as also historical or artistical touch are added to each folder which presents every biography as an illustration; a facsimile of a letter by J. W. Gibbs, a facsimile of a letter from Rowland, a part of Faraday's famous diary, of a brief note on polarized light from the pen of Fresnel, a Villa Medici where Galilei was entertained during his visits to Rome (1630-1633) and sketches of buildings and artistical reproductions associated with others.

No students could come in contact with this serene and impartial bio-bibliographical descriptions without feeling profoundly the great influence of this scientists in all his future studies of nature.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**

Mathematical Institute of the Polytechnic Institute of Jassy

* * *

Portraits of Eminent Mathematicians. With Brief Biographical Sketches by David Eugene Smith. Portfolio I. Scripta Mathematica - Yeshiva College, New-York, 1947. David Eugene Smith (1860-1944) was for many years the leading authority in the History of Mathematics. His research and writings in this field are of great importance. His „*Rara Arithmetica*" as well as his two large volumes on „*The History of Mathematics*" are among the most noted of his historical work, although a complete list of his papers and books would run well beyond 300 titles. Author and co-author of many mathematical textbooks and many monographs, writed in collaboration especially with Prof. Jekuthiel Ginsburg, Editor of the worthy periodical destinated to accomplish the most important and beautiful aims parallelly with that of the reviews „*Isis*", „*Osiris*" and, in the last time, the „*Archives Internationales d'Histoire des Sciences*", the late Prof. Smith knew to humanize the teaching of Mathematics. Professor Smith believed that poetry and mathematics were closely related as a reading of his book, „*The Poetry of Mathematics and Other Essays*" (The Scripta Mathematica Library, Number One, New York, 1947, second printing, IV+90 pag.), will show. The purpose of this portfolio, is to supply a series of portraits of mathematicians and of illustrations relating to the mathematical topics considered in schools of various kinds. In the illustrations of this portfolio, including: Archimedes, Copernicus, Viète, Galileo Galilei, Napier, Descartes, Newton, Leibniz, Lagranges, Gauss, Lobachevsky and Sylvester, we come to feel that we know something on the men who have helped greatly in the making of mathematics the basis or „the queen of all sciences".

The choosing of the men included in this portfolio was mad by the author from a wonderful collection of three thousand portraits of mathematicians brouth together in a period of half a century (now a propriety of the Library of Columbia University). The intimate touches added to each folder as illustrations appear generally also from the same collection. We mentioned there some reproductions of the title pages of rare books: Copernicus *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543), Vieta's *Canon Mathematicus* (1579), Galileo's *Dialogus de Systemate Mundi* (1635), Napier's *Mirifici Logarithmorum, Canonis Descriptio* (1614), the Autograph Letters of Descartes, Newton, Leibniz, Lobachevsky, facsimile of a poem by Sylvester and autographs of Gauss and Lagrange.

We most trust us with the hope that thanks to the initiative of Mr. Jekutiel Ginsburg and of the Executive Committee of the

Scripta Mathematica it will be possible to continue the successful publication of several portfolios of this nature planed by David Eugene Smith.

The pictures are admirably suited to framing. Each portrait is accompanied by a biographical sketch containing a specific statements as to which writings of each mathematician are vitale to a real knowledge of his field. We remark especially the sketches concerning Lagrange – one of the most representative figures of the period of the French Revolution – and two prominent mathematicians of the last century: Gauss aad Lobachevsky.

The writer is sure that the hope expressed by the author and the publisher of this Portfolio that the reviewed collection will serve to increase the interest of schools in the human side of the science as revealed by the history of mathematics and the lives of the great makers of the ancient subject is completely realized.

The sketches composing the Portfolio Number One by David Eugene Smith may fittingly and pleasurably recall a few at least of the innumerable contributions to science made by the mathematicians of different countries of the world and may help in a large way to further the international cooperation which is lifeblood of science.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**

Mathematical Institute of the Polytechnic Institute of Jassy

* * *

Brillouin, Léon: *Notions élémentaires de Mathématiques pour les sciences expérimentales.* Collection du P. C. B. (Certificat d'études physiques, chimiques et biologiques). Masson et Cie, Editeurs, Libraires de l'Académie de Médecine, Paris, 1947, 283 pages. 450 frs.

Depuis le fondement de la biométrie par Karl Pearson, Galton et d'autres et après les travaux de Vito Volterra et de son Ecole, cristallisés dans sa célèbre théorie mathématique de la lutte pour la vie, les mathématiques ont envahi l'un après l'autre les domaines des plus différents de la science contemporaine. Il s'est produisit de telle manière ce qu'on appelle la mathématisation de la science par les passages du qualitatif au quantitatif et réciproquement.

L'illustre mathématicien M. Léon Brillouin, l'auteur d'un grand nombre de publications d'une vaste portèe intéressant la physique mathématique et les théories mécaniques modernes (Voir, par exemple,

chez Masson et Cie, Cours de Physique théorique, Les tenseurs en Mécanique et en élasticité ; aux Presses Universitaires, Les statistiques quantiques et leurs applications et l'Atome de Bohr, et à la Librairie Hermann, dans cette magnifique collection que forme les Actualités scientifiques et industrielles, les issues nos. 39, 59, 71, 89, 159, 160, 549 et d'autres) est sans aucun doute un des plus compétents hommes de science de la France d'aujourd'hui capables d'approprier la grande beauté des mathématiques considérées comme science déductive, aux points de vue presque empiriques et à l'intution.

C'est en raison de nécessité de plus en plus pressante de pouvoir offrir un apprentissage nécessaire à tout chercheur qu'il soit physicien, chimiste, biologue, naturaliste ou médecin, que M. Brillouin c'est décidé à écrire ce livre comprenant les notions élémentaires de mathématiques pour les sciences expérimentales.

En rattachant directement les définitions à des exemples concrets et en les illustrant de nombreuses applications pratiques, l'auteur réussit excellemment de développer un enseignement presque expérimental des mathématiques.

Dans le chapitre I (pages 1-37) on apprend, dans les cadres d'une introduction à la géométrie analytique, à se servir des courbes et diagrammes, à lire rapidement leur signification, et à connaître quelques transformations simples, permettant de réduire une courbe à une autre de même allure, de manière à pouvoir en dégager nettement les lois générales. Des nombreuses figures, (47), parfaitement executées sont d'une utilité incontestable dans tout ce développement.

Le chap. II est consacré (pages 38-76, 27 figures) aux courbes et fonctions algébriques simples. Des les premières déductions on y utilise certaines courbes empiriques et on suivit constammement le désir de donner au lecteur la foie de la découverte.

Le troisième chapitre (pages 77-112, 32 figures) s'occupe des fonctions trigonométriques, tout en reflétant, dans les paragraphes destinés aux applications, nombreux problèmes importants d'analyse harmonique traduisants certains phénomèmes de la nature.

La chapitre IV (pages 113-136, 12 figures) est dédié à l'étude des problèmes assez divers s'avoisinant à la fonction exponentielle. C'est ici que que trouvent place les schémas mathématiques représentant les courbes de decroissance des corps radioactifs, les courbes avec saturation, et différentes courbes liées à certains aspects biologiques.

Le chapitre V (pages 137 - 166, 12 figures) est un véritable passage en revue du calcul numérique. Il est consacré au logarithmes, à la règle à calcul et aux applications variant d'une manière très sugges-

tive entre certains problèmes d'astronomie stellaire, de la croissance, d'acoustique et de l'énergétique.

Le chapitre VI (pages 167-221, 20 figures), que l'auteur le considère comme le plus difficile pour les non initiés, c'est celui qui traite de la notion d'intégrale et de quelques équations différentielles usuelles. C'est de chimie physique et de cinétique biologique que l'auteur puise des exemples instructifs aboutissant aux équations linéaires à coefficients constants ou bien aux certaines discussions qualitatives concernant les équations linéaires aux coefficients variables. C'est bien ici que nous rencontrons des extaits précieux des oeuvres de biologie, concernant symbiose, parasitisme et évolution, des Lotka, Volterra, Kostitzin et d'autres.

Le chap. VII (pages 221-248, 27 figures) étudie les fonctions de deux variables. C'est ici que trouvent très bien place le problème des cartes et certaines questions concernant les représentations dans l'espace de quelques lois physiques et la lecture d'un nombre de nomogrammes. Nous en citons d'une manière toute spéciale les indications sur les lampes amplificatrices.

Le chap. VIII et dernier (pages 249-279, 8 figures dans le texte) est consacré aux notions de calcul des probabilités et statistique. Ce sont quelques notions générales sur les probabilités aboutissant au problème de stabilité de la loi de Laplace-Gauss et à des indications sommaires sur la recherche de lois de moyennes, de corrélation ou covariation, inspirés des excellents livres de G. Darmois et ajoutés à la seconde édition, dont nous donnons ce compte rendu.

Le langage imagé de l'auteur, son effort continu d'habituer l'étudiant orienté vers les sciences expérimentales à ce qu'en est de l'important et de l'essentiel des différentes méthodes mathématiques, l'indication de la littérature bien choisi et écrit dans le même esprit, destiné à intéresser le lecteur plus poussé à raisonner avec une certaine rigueur mathématique et la variété des exemples présentés, très instructifs, constituent tant de caractéristiques de cette *initiation aux mathématiques* que nous recommandons très chaleureusement à nos lecteurs. Les soins de la Maison Masson et Cie, Editeurs, y ajoutent une élégance exquise et très attrayante.

Sur le seuil d'un changement des programmes d'études de quelques de nos institutions d'enseignement supérieur, qu'il nous soit permis de répéter ici notre conviction intime concernant l'utilité et la nécessité d'introduire chez nous les cours semblables à celui de M. Brillouin pour *tous les étudiants de nos facultés de médecine et de sciences naturelles* dans le but d'alléger les tares et d'améliorer les aptitudes plus eu moins héréditaires dans les populations humaines ou dans la flore ou la faune utilisées par l'homme pour le bienêtre de l'humanité entière.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**
Institut Mathématique de
l'Ecole Polytechnique de Jassy

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION*)

dont les comptes rendus seront publiés dans les volumes à paraître de notre „Bulletin", dans les cahiers annexes, dans les prochains numéros de la „Revue Scientifique" (Revista Ştiinţifică „V. Adamachi"-Jassy) ou bien dans d'autres revues scientifiques roumaines:

*) La Rédaction de ce „Bulletin" renouvelle son invitation très chaleureuse adressée aux organismes scientifiques, universitaires, académiques et polytechniques tant qu' aux éditeurs, librairies et hommes de science ou techniciens spécialisés du monde entier de vouloir bien nous faire parvenir leurs publications, réservées pour des comptes rendus dans une des revues scientifiques de notre pays et destinées pour combler les lacunes de la Bibliothèque centrale et de l'Institut Mathématique de l'Ecole Polytechnique (Polytechnic Institute, Technical University) de Jassy, detruits pendant cette horrible et cruelle guerre qui a assombri le monde pendant ces dernières années.

Bol, Marcel: Tables numériques universelles des laboratoires et bureaux d'études, 122 graphiques et un index. Paris, Dunod, 1947, 882 pages.

Botez, Şt. Mihail: Metode de rezolvire a ecuaţiilor trigonometrice (Méthodes de résolution des équations trigonométriques), en roumain. 2-e éd., revue et complétée, Iaşi, A. Ţerek, 1947, 72 pages.

Bottani, E. et Sartori, R. Electtrotecnica, I. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1947, 488 pages.

Brachet, F.; Dumarqué, J.; Pochard, H.: Elémenis de géométrie, 2 volumes, Paris, Librairie Delagrave, 1946, 208 pages et

Bruni, Giuseppe: Chimica Generale e inorganica con elementi di chimica organica, 7-e éd., Vol. III, Elementi di chimica organica, vol. II, Chimica Inorganica, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1947, XII + 202 pages.

Cesari, L.; Conforto, F.; Minelli, C.: Trave continue inflesse e sollecitate assialmente. Pubblicazioni dell'Istituto per le applicazioni del Calcolo, Roma, 1941, VIII + 244 pages.

Conforto, Fabio: Meccanica Razionale, Casa Editrice Giuseppe Principato, Milano, 1946, IV + 316 pages.

Contessini, Felice, : Impianti idroelettrici Volume primo, Problemi generali. Liberia Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1946, 164 pages.

Craig, Homer Vincent: Vector and Tensor Analysis, Mc. Graw-Hill Book Company, New-York, 1943, XIV + 434 pages.

Devresse, A.: Projections stéréographiques. Trigonométrie sphérique. Détermination du triangle des éléments et du triangle dérivé de G. Cesàro par la méthode des projections stéréographiques, Maison d'édition A. De Boeck, Bruxelles, 1947, 22 pages.

Mario Dornig - „Trattato generale delle Macchine Termiche ed Idrauliche" Volume primo Nona edizione Libreria editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano 1946. pag. 274.

Giauqué, Maxc: Technologie d'Ajustage - Mécanique, Ecole Technique de Québec, 1942, 626 pages.

Hartree, D. R.: Calculating Machines. Recent & Prospective Developments, Cambridge University Press, Cambridge, 1947, 40 pages.

Jellinek, Karl: Kurzes Lehrbuch der Physikalischen Chemie, Heft I, II. N. V. Uitgevers-Maatschappij AE. E. Kluwer, Deventer, 1938.

Kiely, Edmond R.: Surveying Instruments, National Council of Teachers of Mathematics, Nineteenth Yearbook, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, New-York, 1947, XIII + 411 pages.

Klumak, Robert: Über die wahre Bewegung der Sterne, Springer Verlag, Wien, 1946, 2 planches et 7 pages.

Kryloff, N. M., Bogoliuboff, N. N.: Méthodes nouvelles de la Mécanique non-linéaires dans leur application à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampe, I, Editions Technico-Théoriques d'Etat, Leningrad, 1934, 243 pages (en russe).

Landolt, Max: Grandeur, Mesure et Unité, Office International de Librairie, Bruxelles, 1947, 91 pages.

Lanoy, Henry: Encyclopédie de l'Electricité et de la T. S. F., à bord des avions modernes, vol. III, Equipement Electrique des Avions Modernes, Librairie des Sciences Pratiques, Desforges, Paris 1947, 282 pages.

Lepoivre, A.: Le livre de l'automobiliste. 3-e éd. Editions Desforges, Paris, 1947, 420 pages.

Malécot, G.: Les mathématiques de l'hérédité. Préface de L. Blaringhem. Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1948, X + 62 pages, 180 frs.

Mannoury, Gerrit: Les fondements psycho-linguistiques des Mathématiques, F. G. Kroonder, Bussum, 1947, 64 pages.

Mannoury, G,: Methodologisches und philosophisches zur elementar-Mathematik, Van Gorcum & Comp. N. V., Assen, 279 pages.

Mannoury, G.: Mathesis en Mystiek, en signifiese studie van kommunisties standpunt (en hollandais), Maatschappij, Handboekjes Elck't Beste, Amsterdam, 112 pages.

De Marchi, Giulio: Guglielmini, „La Scuola" Editrice, Brescia 1947, 147 pages.

Montel, Paul: Selecta, Cinquantenaire scientifique, 1897-1947, Gauthier-Villars, Paris, 1947, 277 pages.

Nautical Almanac Office, The American Ephemeris and Nautical Almanac for the year 1947, U. S. Government Printing Office, Washington, 1945, XVIII+630 pages.

Necrasoff, A. N.: Cours de Mécanique théorique (en russe), Vol. 2-d. OGIZ, Moscou, 1947, 456 pages.

Pérard, Albert: Les Mesures Physiques, Presses Universitaires de France, Coll. „Que sais je?", 1947, 135 pages.

Prontuario per il calcolo del cemento armato, Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo, Edizioni della Bussola, Roma, 1947, 271 pages.

Ryšavy, Josef: Vyšši Geodesie, Ceská Matice Technicá, Prague, 1947, 522 pages et 367 figures et 2 plaches.

The Scripta Mathematica Library, Number One, David Eugene Smith, The Poetry of Mathematics and other Essays, 2-e éd. Yeshiva College, New York, 1947, VI 90 pages.

The Scripta Mathematica Studies, Number Two, A Collection of Papers in memory of Sir William Rowan Hamilton, Yeshiva College, New York, 1945, 82, pages.

The Scripta Mathematica Library, Number Three, Scripta Mathematica Forum Lectures, Yeshiva College, 1937, 94 pages.

The Scripta Mathematica Library, Number Five, Galois Lectures, Yeshiva College, New York, 124 pages.

Silla, Lucio et Teofilato, Pietro: Aerodinamica, Tipografia Fusi, Pavia, 1941, 430 pages.

Table of Arc sin x, prepared by the Mathematical Tables Project, N. B. S., Columbia University Press, New York, 1945, 124 pages (Lyman J. Briggs, Director et Arnold N. Lowan, Project Director).

Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients, prepared by

the Mathematical Tables Project, N. B. S., Columbia University Press, New York, 1944, 394 pages.

Tables of Fractional Powers, prepared by the Mathematical Tables Project, N. B. S., Columbia University Press, New York, 1943, 201 pages.

Tables of Reciprocal of the Integers from 100,000 through 200,009 prepared by the Mathematical Tables Project, National Bureau of Standards, Columbia University Press, New York, 1945, 201 pages

Tables of Associated Legendre Functions, prepared by the Mathematical Tables Project, N. B S., Columbia University Press, New York, 1945, 303 pages.

Tables of Spherical Bessel Functions, prepared by the Mathematical Tables Project, I, National Bureau of Standards, Columbia University Press, 1947, 375 pages.

Table of the Bessel Functions, $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments, prepared by the Mathematical Table Project, N. B. S., Columbia University Press, New York, 1943, 403 pages.

Table of Circular and hyperbolic Tangents and Cotangents for Radian Arguments, prepared by the Mathematical Tables Project, Columbia University Press. New York, 1943, 410 pages.

Valiron, Georges: Théorie des Fonctions. 2-e éd. Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1948, II + 522 pages. 1000 frs.

Vardala, J.: Nouvelles idées et hypothèses au sujet des notions et des principes de la Mécanique rationnelle, Bucarest, 1947, 116 pages.

Wharton, A. S.: Quality through Statistics, The Gryphon Press, Jersey, 2-e éd., 1945, 62 pages et 12 planches.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**
Institut Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

Sommaire

du Tome II, fasc. 2. (Juillet à Décembre 1947)

		Pages
NECROLOGUE	† Prof. M. Konteschweller	253
Victor Lalan (Dr., Prof. à l'Ens. Sup. libre à Paris)	Etude des coefficients du binôme, modulo nombre premier p	255
S. J. Jasper (Dr., Prof. à l'Univ. Kentucky)	Helices in a flat space of four dimensions	262
F. Marcus (Dr. Ing., Services techniques de la ville de Botoşani)	Sur quelques surfaces en relation avec les congruences de Waelsh	267
Fritz Reutter (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Karlsruhe)	Über ganze rationale Funktionen einer dualkomplexen Veränderlichen	273
Şt. Petrescu (Dr., Maître. de Conf. à l'Univ. Cluj)	Sur les éléments singuliers et sur la géométrisation des systèmes de deux équations de Pfaff à huit variables	290
Ion Creangă (Dr. Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur une correspondance entre deux surfaces réglées	341
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Etudes sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes. I. L'indice de non-associativité	347
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des spectres concernant certains problèmes aux limites	372
Vasile Corlăteanu (Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Contributions théorique et expérimentale à l'étude d'un moteur synchrone par rapport à la variation de la tension d'alimentation	375
I. S. Gheorghiu (Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Bucarest)	Le quadripôle en T-circuit équivalent du moteur monophasé à répulsion à décalage de balais	435
Ştefan Procopiu (Dr., Prof. à l'Univ., Jassy)	Mesures magnétiques à Jassy de 1941 à 1947. I. Déclinaison magnétique et composante horizontale	443
N. Calinicenco (Dr., Maître de Conf. à l'Univ., Jassy)	Mesures magnétiques à Jassy de 1941 à 1947. II. Inclinaison magnétique	447

Virgiliu G. Gheorghiu
(Dr., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur une nouvelle méthode de mesure des coefficients de frottements

Ştefan Procoptu
(Dr., Prof. à l'Univ., Jassy) Valeurs des éléments magnétiques et des variations séculaires à Jassy, pendant 17 ans, de 1931 à 1947. Variation du magnétisme terrestre en Roumanie de 1772 à 1947 457

Gérard d'Albon
(Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy) Détermination de la position d'une source sonore mobile ou fixe à l'aide de l'oscillographe 471

T. Vescan
(Dr., Prof. à l'Univ. „Bolyai", Cluj) O explicaţie simplă a efectului Faraday 478

Alex. Cişman &
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)

E. Luca
(Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) Lampe à vapeur de mercure fonctionnant comme oscillateur à relaxations 481

Gh. Alexa &
Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)

Cristofor Simionescu
Ing., Chef. de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy) Contribution à la connaissance de l'huile de chènevis 486

C. Calistru
(Ing., Chef. de Travaux à l'Ec. (Polyt., Jassy) Sur un nouveau procédé de préparation de quelques bains galvaniques à l'aide du courant alternatif 495

N. I. Ioanid &
(Dr., Prof à l'Univ., Bucarest)

G. D. Borş
(Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Bucarest) Nouvelles réactions microchimiques pour l'identification du cardiazol 490

I. N. Ciochină &
(Dr. Ing., Uzines Métallurgiques, Reşiţa)

V. Ababii &
(Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)

R. Vasiliu
(Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, III–V. 498

Cleopatra Catrinici
(Ing., Ministère de l'Agric., Bucarest) Notes sur la Biologie et les moyens de destruction du Tanymecus dilaticollis Gyll („Gârgârița porumbului"). 527

M. Celan &
(Dr., Chef de travaux à l'Ecole Polyt., Jassy)

P. Babalean
(Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) Sur l'examen microscopique et histochimique des tissus affectés par la gelée 537

Nicolae Tănăsescu
(Dr. Ing., Direction des Forêts C. Lung Mold.) Les sables mouvants de Vâlcov-Jibrieni 544

Alex. Cișman & E. Luca Lampe à vapeur de mercure comme amplificateur 562

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS 571

Morse, Marston. – Topological methods in the theory of a complex variable. Princeton University Press, N. J. (1947). (Prof. Dr. Al. C. Climescu).

Morand, Max – Instroduction mathématique aux théories physiques modernes. Librairie Vuibert, Paris (1947). (Prof. Dr. Al. C. Climescu).

Cisotti Umberto – Analisi Matematica. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano (1946). (Prof. Dr. Al. C. Climescu)

Veselovsky, I. N. – Cours de Mécanique (en russe). Editions des publications théoriques et techniques, Leningrad (1947). (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Ghermănescu, M. – Cours de Mécanique théorique. I. Statique (en roumain). Editeur Librairie de l'étudiant, Timișoara, 1947. (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Proceedings of the First Canadian Malhematical Congress – The University of Toronto Press, (1947). (Prof. Dr. D. I. Mangeron).

Den 10. Skandinaviske Mathematiker Kongres – Jul. Gjellerups Forlag, Copenhague (1947). (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Bericht über die Mathematiker Tagung in Tübingen – Institut Mathématique de l'Université de Tubingue. (Prof Dr. D. I. Mangeron)

Annuaire Astronomique de l'U. R. S. S. pour l'an 1948 – Académie des Sciences de l'U. R. S. S. Institut d'Astronomie théorique, Leningrad (1947), (Prof. D. I. Mangeron)

Maurice Fréchet et Ky Fan – Introduction à la Topologie Combinatoire, I. Initiation. Libraire Vuibert, Paris, (1946). (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Bruni, Giuseppe – Chimica generale e inorganica, vol. I Chimica generale. Libreria Politecnica Cesase Tamburini, Milano (1947). (Prof. Dr. St. Procopiu)

Dornig, Mario – Trattato generale delle macchine termiche ed idrauliche. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano (1947). Prof. Dr. Ing. Gérard D'Albon)

Maurice Denis-Papin – Principes généraux de ventilation industrielle et de conditionnement d'air. Editions Desforges, Paris (1948). (Prof. Dr. Ing. Gérard D'Albon)

Portraits of famous physicists – with Biographical Accounts by Professor Henry Crew Scripta Mathematica – Yeshiva College, New York (1942). (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Portraits of Eminent Mathematicians with brief Biographical Sketches by Davis Eugene Smith, Portfolio I. – Scripta Mathematica – Yeshiva College, New York, 1947. (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Brillouin, Léon – Notions élémentaires de Mathématiques pour les sciences expérimentales. Masson et Cie. Editeurs, Paris, 1947. (Prof. Dr. D. I. Mangeron)

Livres reçus par la rédaction 600

Tables des matières 604